Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
при Горьковском Государственном Университете

Препринт № 2

Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

г. Горький
1970 г.

Аннотация

Предложен метод асимптотического разложения для волновых процессов, близких к стационарным периодическим волнам произвольной формы. Если исходная (в том числе и неконсервативная) система может быть выведена из обобщенного вариационного принципа, то уравнения первого приближения записываются в виде уравнений Лагранжа второго рода для усредненных функций Лагранжа и Релея.

В настоящее время наибольшее число аналитических результатов в теории нелинейных волн получено с помощью приближенных методов, основанных на малости того или иного параметра в исходных уравнениях или в граничных (начальных) условиях. При этом сравнительно полно были исследованы волновые процессы в средах с малой нелинейностью и сильной дисперсией, когда решение близко к одной или суперпозиции нескольких квазигармонических волн [1-4] . Вместе с тем, как известно, во многих задачах, относящихся к волнам в плазме [5] , линиях передачи электромагнитных волн [6] , на поверхности жидкости [5] , а также в задачах нелинейной теории поля [7] , возникает необходимость рассматривать существенно несинусоидальные волны при произвольном соотношении параметров нелинейности и дисперсии. Здесь также были получены некоторые приближенные решения, основанные на локальной близости процесса к стационарной бегущей волне [5,8-10] . Из них наибольший интерес с точки зрения общности и физической наглядности представляет, по-видимому, вариационный принцип Гамильтона в усредненной форме, предложенный Уитэмом [8] . Уравнения для огибающих (амплитуды, частоты и т.д.) квазистационарной волны при этом получаются в виде дифференциальных уравнений Эйлера в соответствующей вариационной задаче с усредненным Лагранжианом. Такой подход, однако, непосредственно применим только к строго консервативным системам, для которых известен Лагранжиан (определение последнего часто представляет достаточно сложную задачу [11]). Кроме того, самостоятельный интерес представляет построение схемы асимптотического разложения, позволяющий получить усредненные уравнения в любом приближении по малому параметру, как это уже было сделано для одного нелинейного уравнения второго порядка [12].

В данной работе предложен асимптотический метод для исследования процессов, локально близких к плоским стационарным (вообще говоря, несинусоидальным) волнам, описываемых произвольной системой нелинейных уравнений в частных производных. Метод применяется к системам первого и второго порядка. Если исходная система может быть выведена из обобщенного вариационного принципа, то уравнения первого приближения можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода для медленно меняющихся величин.

I. Асимптотический метод для систем уравнений первого порядка.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$M(\tau,\vec{\rho},u,u_t,u_x,u_y,u_z)=\varepsilon F(\tau,\vec{\rho},u,u_t,u_x,u_y,u_z) \quad (I)$$

где $u(\vec{r},t)$ - вектор-функция с компонентами $u_1,\dots,u_N$; M и F совокупности известных функций $M_1,\dots,M_N$, $F_1,\dots,F_N$; ε - малый параметр; $\tau=\varepsilon t$ и $\vec{\rho}=\varepsilon\vec{r}$ параметры, характеризующие нестационарность и неоднородность среды. Относительно M и F предполагаем лишь, что это достаточно гладкие функции своих аргументов.

Наряду с (I) рассмотрим систему порождающих уравнений

$$M(\tau,\vec{\rho},u,u_t,u_x,u_y,u_z)=0;\ \tau,\rho=\mathrm{Const} \quad (2)$$

Будем считать, что порядок системы (I) по $\vec{r}$ и t

совпадает с порядком порождающей системы (2)+).

Предположим, что (2) имеет решение в виде стационарных плоских волн $u=U(\theta)$, $\theta=\omega t-\vec{k}\vec{r}$, которые определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M(\tau,\vec{\rho},U,\omega U_\theta,-\vec{k}U_\theta)=0 \qquad (3)$$

и зависят от m произвольных констант интегрирования θ_0, $A=(A_2,\dots A_m)$ и от параметров τ, $\vec{\rho}$, ω, $\vec{k}$. Частота ω и волновое число $\vec{k}$ связаны с A дисперсионным соотношением $\omega=\omega(\vec{k},A)$ и выбраны таким образом, что U – периодическая функция θ с периодом 2π. Число постоянных m в общем случае меньше N; если $m=N$, то U является общим решением уравнений (3).

Если уравнения (2) описывают консервативную систему, то рассматриваемые периодические решения заполняют некоторое подпространство в фазовом пространстве решений (3) при заданном ω или $\vec{k}$. Профиль волны определяется конкретным видом (3) и может сильно отличаться от синусоидального. Для активной системы периодическое решение U, если оно существует, представляет собой изолированную траекторию в фазовом пространстве; для него все A фиксированы. Определение условий существования периодических решений для произвольной системы уравнений вида (3) само по себе является сложной задачей, которая решена лишь в некоторых частных случаях [I4,I5].

+) Если при переходе от (2) к (I) порядок системы повышается, то полученные ниже результаты применимы лишь для частных классов стационарных волн ("медленных" движений в фазовом пространстве системы (3)). Пример усреднения по "быстрым" стационарным волнам рассмотрен в [I3].

Решение исходной системы уравнений (I), близкое к $U(\theta)$, будем искать в виде асимптотического ряда по малому параметру

$$u = U(\theta, \tau, \vec{\rho}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u^{(n)}(t, \vec{r})$$
$$\omega(\vec{\rho}, \tau) = \theta_t \quad , \quad \vec{k}(\vec{\rho}, \tau) = -\nabla\theta \tag{4}$$

где

$$A(\tau, \vec{\rho}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A^{(n)}(\tau, \vec{\rho})$$
$$\theta = \theta^{(0)}(\tau, \vec{\rho}, t, \vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \theta^{(n)}(\tau, \vec{\rho}) \tag{5}$$

Здесь τ и $\vec{\rho}$ медленные переменные, характеризующие отличие решения от стационарного из-за наличия малого параметра в уравнениях или в граничных (начальных) условиях.

Разложим M и F в ряды по ε

$$M = M^{(0)}(U, \omega U_{\theta}, -\vec{k}U_{\theta}) + \varepsilon\Big\{\frac{\partial M^{(0)}}{\partial U} u^{(1)} + \frac{\partial M^{(0)}}{\partial U_t}(U_{\tau} +$$
$$+ u_t^{(1)}) + \frac{\partial M^{(0)}}{\partial \nabla U}(\nabla_{\rho} U + \nabla u^{(1)})\Big\} + \varepsilon^2 \ldots \tag{6}$$
$$\varepsilon F = \varepsilon F^{(0)}(U, \omega U_{\theta}, -\vec{k}U_{\theta}) + \varepsilon^2 \ldots$$

где

$\partial M^{(0)}/\partial U - \partial M/\partial U\,(U, \omega U_{\theta}, -kU_{\theta})$; $\partial M^{(0)}/\partial U_t = \dfrac{\partial M}{\partial U_t}(U, \omega U_{\theta}, -\vec{k}U_{\theta})$

$\dfrac{\partial M^{(0)}}{\partial \nabla U} = \dfrac{\partial M}{\partial \nabla U}(U, \omega U_{\theta}, -\vec{k}U_{\theta})$ – квадратные матрицы,

$\nabla_{\rho} U = \dfrac{\partial U}{\partial \vec{\rho}}$, а члены типа $\partial M/\partial U \cdot U$ представляют собой произведение матрицы $\partial M/\partial U$ на столбец U.

Подставляя (4)-(6) в (I) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим с учетом (3)

$$\hat{T}\left(\tau, \bar{\rho}, \theta, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u^{(n)} = H^{(n)}; n=1, \dots \quad (7)$$

где

$$\hat{T} u^{(n)} = \frac{\partial M^{(0)}}{\partial U} u^{(n)} + \frac{\partial M^{(0)}}{\partial U_t} \cdot u_t^{(n)} + \frac{\partial M^{(0)}}{\partial \nabla U} \nabla u^{(n)} \quad (8)$$

$$H^{(1)} = F^{(0)} - \frac{\partial M^{(0)}}{\partial U_t} \cdot U_\tau - \frac{\partial M^{(0)}}{\partial \nabla U} \cdot \nabla_\rho U \quad (9)$$

Следовательно, определе функций A и θ в любом приближении связано с ешением системы линейных неоднородных уравнений в частных производных (7) с периодическими коэффициентами и периодической по θ правой частью. Естественно, что вынужденное решение (7) является также функцией θ (и параметров $\tau, \bar{\rho}$). Поэтому его отыскание сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, которая получается из (7) заменой $\frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}$ и $\nabla = -\bar{k} \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Решение $u^{(n)}$ можно представить в виде

$$u^{(n)} = Y \int_0^\theta Y^{-1} H^{(n)} d\theta' \quad (10)$$

где Y - матрица, составленная из векторов фундаментальной системы решений уравнений в вариациях

$$\hat{T}\left(\tau, \bar{\rho}, \omega, k, \theta, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \psi = 0 \quad (11)$$

а Y^{-1} - матрица, обр ная Y .

Заметим, что m частных векторов указанной системы решений определяются через решения порождающей системы уравнений [I5]

$$Y_1 = \frac{\partial U}{\partial \theta} \qquad Y_k = \frac{\partial U}{\partial A_k} \qquad k=2,\ldots,m \tag{I2}$$

Легко видеть, что Y_1 – периодическая функция θ, а Y_k в общем случае представима как [I2,I5]

$$Y_k = U_{A_k} + \alpha_k \theta U_\theta \tag{I3}$$

где под U_A здесь и далее понимается производная от U по явно входящему параметру A, а α – постоянная, определяемая зависимостью ω и k от A. Секулярный характер Y_k связан с неизохронностью движения в фазовом пространстве решений (3), аналогичной неизохронности нелинейных колебаний [I6].

Остальные $N-m$ векторов фундаментальной системы решений можно, в силу теоремы Флоке, записать в виде:

$$Y_i = e^{\lambda_i \theta} f_i(\theta) \tag{I4}$$

причем $f(\theta + 2\pi) \equiv f(\theta)$. Предположим, что характеристические показатели λ не имеют положительной вещественной части. Кроме того, будем считать, что если для $i=\ell$ $\mathrm{Re}\,\lambda_\ell = 0$, то $\mathrm{Im}\,\lambda_\ell \neq 0, \pm 1, \ldots$. Эти условия обычно используются в теории квазилинейных колебаний как условия отсутствия внутреннего резонанса [I6]. В этом случае все Y_i – ограниченные функции θ, не находящиеся в "резонансе" с рассматриваемым семейством решений.

Согласно (I2)-(I4), матрица фундаментальной системы решений имеет вид

$$Y = \Big\| \underbrace{U_\theta}_{1} \quad \underbrace{U_{A_k} + \alpha_k \theta U_\theta}_{k=2,\ldots,m} \quad \underbrace{e^{\lambda_i \theta} f_i}_{i=m+1,\ldots,N} \Big\| \Big\} N \tag{I5}$$

Обратную матрицу можно найти, например, методом Гревилля [I7]

$$Y^{-1}=\left\|\begin{array}{c} \overbrace{U_\theta-\theta\sum_{k=2}^{m}\alpha_k U_{A_k}}^{N} \\ U_{A_k} \\ e^{-\lambda_i\theta}f_i^* \end{array}\right\| \begin{array}{l} \}\ 1 \\ \}\ k=2,\ldots,m \\ \}\ i=m+1,\ldots,N \end{array} \qquad (I6)$$

Подставляя Y и Y^{-1} в (I0), получим после несложных преобразований

$$u^{(n)}=U_\theta\int_0^\theta d\theta'\Big\{U_{\theta'}H^{(n)}+\sum_{k=2}^{m}\alpha_k\int_0^{\theta'}U_{A_k}H^{(n)}d\theta''\Big\}+$$

$$+\sum_{k=2}^{m}U_{A_k}\int_0^\theta\{U_{A_k}H^{(n)}\}d\theta'+\sum_{i=m+1}^{N}e^{\lambda_i\theta}f_i\,\cdot \qquad (I7)$$

$$\cdot\int_0^\theta e^{-\lambda_i\theta'}\{f_i^*H^{(n)}\}d\theta'+к.с.$$

В силу предположений о характере λ последний член в (I7) ограничен при любом θ. Таким образом, $u^{(n)}$ будет ограниченной функцией θ, если выполняются условия ортогональности

$$\int_0^{2\pi}U_\theta H^{(n)}d\theta=0 \qquad n=1,\ldots, \qquad (I8a)$$

$$\int_0^{2\pi}U_{A_k}H^{(n)}d\theta=0 \qquad k=2,\ldots,m \qquad (I8б)$$

Напомним, что под U_A следует понимать производную U по явно входящему параметру A. К полученным уравнениям необходимо добавить соотношения, вытекающие

$$\nabla\omega + \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{rot}\, \vec{k} = 0 \tag{19}$$

Уравнения первого приближения удобно привести к несколько другому виду. Умножим (3) на U_A и проинтегрируем по θ (при постоянных τ, ρ, ω, k, A). Из полученного соотношения вычтем (18а). В результате получим

$$\int_0^{2\pi} M(\tau, \vec{\rho}, U, U_t, U_x, U_y, U_z) U_{A_k}\, d\theta =$$

$$= \varepsilon \int_0^{2\pi} F(\tau, \rho, U, \omega U_\theta, -\vec{k} U_\theta) U_{A_k}\, d\theta \tag{20a}$$

и аналогично из (3), (18б) следует

$$\int_0^{2\pi} M(\tau, \rho, U, U_t, U_x, \dots) U_\theta\, d\theta = \varepsilon \int_0^{2\pi} F(\tau, \rho, U, \omega U_\theta, -\vec{k} U_\theta) U_\theta\, d\theta \tag{20б}$$

Таким образом, для получения уравнений первого приближения достаточно умножить (I) скалярно на U_A или U_θ и проинтегрировать по θ при постоянных параметрах τ и ρ.

Система (I9)-(20) полна относительно неизвестных функций A, ω, k. Однако для определения фазы θ с точностью до ε необходимо решить уравнения второго приближения. Такая ситуация характерна для неизохронных колебательных систем [I6]. Ясно, что во втором приближении получить решение значительно сложнее, так как необходимо знать все векторы фундаментальной системы Y. Только в том случае, когда известно общее решение системы (3) $(m = N)$, все Y_i выражаются через U по формулам (I2).

Нетрудно видеть, что уравнения (I9)-(20) квазилинейны и принадлежат либо к гиперболическому, либо к эллиптическому типу (последнее имеет место только для нелинейных систем) [9-10]. В гиперболическом случае существует семейство действительных характеристик - лучей в пространстве $\vec{r}, t$. В этом смысле данный метод можно рассматривать как обобщение пространственно-временной геометрической оптики на нелинейные среды. Ясно, что вообще говоря, (19)-(20) могут иметь особенности, связанные с пересечением лучей (каустиками), где эти уравнения не пригодны. Конкретный анализ (19)-(20) выходит за рамки данной статьи. Заметим лишь, что когда M - линейная функция U и ее производных при постоянных ω и k из (19)-(20) следуют известные результаты для квазигармонических волн [3] +).

Отметим, что вопрос о сходимости изложенного здесь асимптотического метода и устойчивости решения остается пока открытым.

2. Система второго порядка. Обобщенный вариационный принцип.

В тех случаях, когда исходная система описывается уравнениями Лагранжева типа, уравнения первого приближения допускают более детальный анализ, позволяющий, в частности, связать полученные результаты с "усредненным вариационным принципом" [8], а также обобщить последний на неконсервативные системы. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial u_t}+\nabla\frac{\partial L}{\partial \nabla u}-\frac{\partial L}{\partial u}=\frac{\delta W}{\delta u}=\frac{\delta W^{(0)}}{\delta u}+\varepsilon\frac{\delta W^{(1)}}{\delta u}+\varepsilon^2\ldots \qquad (21)$$

+) Заметим, что результаты некоторых работ [9,21,22], приводившиеся для случая малой нелинейности без конкретизации параметров дисперсии и, следовательно, формы стационарной волны, фактически справедливы только при сильной дисперсии, когда стационарные волны близки к гармоническим.

где L – Лагранжиан (плотность функции Лагранжа),
$\delta W = \Phi \delta u$ – виртуальная работа обобщенных сил Φ. L и Φ считаются достаточно гладкими функциями своих аргументов τ, $\vec{\rho}$, u, u_t, u_x, u_y, u_z.

Как известно [I8], уравнения (2I) могут быть получены из обобщенного вариационного принципа Гамильтона+)

$$\int (\delta L + \delta W)\, dV\, dt = 0 \tag{22}$$

Порождающая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial u_t} + \nabla \frac{\partial L}{\partial \nabla u} - \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\delta W^{(0)}}{\delta u}; \tau, \vec{\rho} = \mathrm{Const} \tag{23}$$

Снова предполагаем, что (23) имеет m -параметрическое семейство периодических решений $U(\theta)$ со свойствами, обсуждавшимися выше. Отметим, что для (23) легко выделить класс консервативных систем, полагая $\delta W^{(0)} \equiv 0$. Решение исходной системы (2I) ищем в виде ряда (4). Разложим $\partial L/\partial u$, $\partial L/\partial u_t$, $\frac{\partial L}{\partial \nabla u}$ и $\delta W/\delta u$ в ряды по ε так же, как это делалось в первой части этой работы для M и F. Подставляя соответствующие ряды в (2I) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим с учетом (23)

$$\tilde{T} u^{(n)} = \tilde{H}^{(n)} \qquad n = 1, \dots \tag{24}$$

+) Отметим, что для неконсервативной системы нельзя в общем случае сформулировать вариационную задачу, соответствующую (22), так как не существует функционала, вариация которого совпадает с $\delta L + \delta W$ [I8].

The

$$\hat{\tilde{T}} u^{(n)} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial U_t \partial U} u^{(n)} + \frac{\partial^2 L}{\partial U_t^2} u_t^{(n)} + \frac{\partial^2 L}{\partial U_t \partial \nabla U} \cdot \nabla u^{(n)}\right] +$$

$$+ \nabla\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \nabla U \partial U} u^{(n)} + \frac{\partial^2 L}{\partial \nabla U \partial U_t} u_t^{(n)} + \frac{\partial^2 L}{\partial (\nabla U)^2} \nabla u^{(n)}\right] - \frac{\partial^2 L}{\partial U^2} u^{(n)} -$$

$$- \frac{\partial^2 L}{\partial U \partial U_t} u_t^{(n)} - \frac{\partial^2 L}{\partial U \partial \nabla U} \nabla u^{(n)} - \frac{\partial}{\partial U_t} \frac{\delta W^{(0)}}{\delta U} \cdot u_t^{(n)} - \frac{\partial}{\partial \nabla U} \frac{\delta W^{(0)}}{\delta U} \nabla u^{(n)} \qquad (25)$$

$$\tilde{H}^{(1)} = \frac{\delta W^{(1)}}{\delta U} + \frac{\partial}{\partial U_t} \frac{\delta W^{(0)}}{\delta U} \cdot U_\tau + \frac{\partial}{\partial \nabla U} \frac{\delta W^{(0)}}{\delta U} \nabla_\rho U - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial U_t} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial U_t^2} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial U_t \partial \nabla U} \nabla_\rho U\right] - \nabla_\rho \frac{\partial L}{\partial \nabla U} - \nabla\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \nabla U \partial U_t} U_\tau\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 L}{\partial (\nabla U)^2} \nabla_\rho U\right] - \frac{\partial^2 L}{\partial U \partial U_\tau} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial U \partial \nabla U} \nabla_\rho U \qquad (26)$$

Тем же методом, что и в предыдущем разделе, можно получить условия ортогональности в виде

$$\int_0^{2\pi} U_\theta \tilde{H}^{(n)}\, d\theta = 0 \qquad n = 1, \ldots \tag{27а}$$

$$\int_0^{2\pi} U_{A_k} \tilde{H}^{(n)}\, d\theta = 0 \qquad k = 2, \ldots, m \tag{27б}$$

Рассмотрим уравнения первого приближения. Из (27а) вычтем среднее по θ значение скалярного произведения U_θ на уравнение нулевого приближения (23), тогда получим

$$\int_0^{2\pi} d\theta \Big\{ \varepsilon \Big[-U_\theta \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial U_\tau^2} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial U_t \partial \nabla U} \nabla_\rho U \Big) + U_\theta \frac{\partial^2 L}{\partial U \partial U_t} U_\tau -$$

$$- U_\theta \nabla \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \nabla U \partial U_t} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial (\nabla U)^2} \nabla_\rho U \Big) + U_\theta \frac{\partial^2 L}{\partial U \partial \nabla U} \nabla_\rho U - \tag{28}$$

$$- U_\theta \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial U_t} - U_\theta \cdot \nabla_\rho \frac{\partial L}{\partial \nabla U} \Big] + \frac{\delta W}{\delta U} U_\theta - \Big[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial U_t} + \nabla \frac{\partial L}{\partial \nabla U} - \frac{\partial L}{\partial U} \Big] U_\theta \Big\} = 0$$

Проинтегрируем по частям интегралы, содержащие круглые скобки

$$-\int \Big[U_\theta \frac{\partial}{\partial t}(\quad) + U_\theta \nabla(\quad) \Big] d\theta = \int \Big[U_{\theta t} \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial U_t^2} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial U_t \partial \nabla U} \nabla_\rho U \Big) +$$

$$+ \nabla U_\theta \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \nabla U \partial U_t} U_\tau + \frac{\partial^2 L}{\partial (\nabla U)^2} \nabla_\rho U \Big) \Big] d\theta \tag{29}$$

Прибавляя к (29а) остальные интегралы, входящие в квадратные скобки, нетрудно убедиться, что полученное соотношение записывается в виде

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial U_t}\right)U_\tau+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \nabla U}\right)\nabla_\rho U\right]d\theta=-\int\left[\frac{\partial L}{\partial U_t}U_{\tau\theta}+\frac{\partial L}{\partial\nabla U}\nabla_\rho U_\theta\right]d\theta \tag{29б}$$

Подставляя (29) в (28), легко видеть, что (3I) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}-\nabla\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{k}}=\frac{\overline{\delta W}}{\delta\theta} \tag{30а}$$

Аналогично, преобразовывая (27б), получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k}=-\frac{\overline{\delta W}}{\delta A_k}\qquad k=2,\ \dots,\ m \tag{30б}$$

Здесь $\mathcal{L}$ - среднее значение Лагранжиана

$$\mathcal{L}(A,\omega,\bar{k},\tau,\bar{\rho})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L\left[\tau,\rho,U,\omega U_\theta,-kU_\theta\right]d\theta, \tag{3I}$$

$\overline{\delta W}$ - средняя виртуальная работа

$$\overline{\delta W}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta W\,d\theta \tag{32}$$

а символами $\overline{\delta W}/\delta\theta$ и $\overline{\delta W}/\delta A$ обозначены коэффициенты при вариациях δA и $\delta\theta$ в выражении для $\overline{\delta W}$

$$\overline{\delta W}=\overline{\Phi U_\theta}\cdot\delta\theta+\overline{\Phi U_A}\,\delta A \tag{33}$$

где $\Phi = \delta W / \delta U$ – обобщенная сила в (21).

Таким образом, в первом приближении (30) являются уравнениями Лагранжа второго рода для некоторой системы, описываемой обобщенными функциями A и θ. Следовательно, можно сформулировать обобщенный вариационный принцип Гамильтона в усредненной форме

$$\int (\delta \mathcal{L} + \overline{\delta W})\, dV\, dt = 0 \qquad (34)$$

Итак, для составления уравнений первого приближения достаточно усреднить Лагранжиан и виртуальную работу за период волны и записать уравнения Лагранжа второго рода для обобщенных функций A и θ. Именно такой подход и был предложен в [8] для консервативных систем.

Как известно [18], в сосредоточенной системе обобщенные силы, не зависящие явно от времени, определяются через диссипативную функцию Релея. Можно обобщить это описание на распределенные системы, вводя плотность функции Релея R

$$\frac{\delta W}{\delta U} = - \frac{\partial R}{\partial U_t} \qquad (35)$$

Используя среднее значение плотности функции Релея

$$\overline{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R\left[\tau, \vec{\rho}, U, \omega U_\theta, -\vec{k} U_\theta\right] d\theta \qquad (36)$$

нетрудно показать, что (30а) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{k}} = - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \omega} \qquad (37)$$

С помощью (37) можно получить уравнение переноса для средних значений плотности энергии $E = \omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} - \mathcal{L}$ и потока энергии $\bar{\vec{S}} = -\omega \; \partial\mathcal{L} / \partial \bar{\vec{k}}$ в диссипативных средах:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\vec{S}} = -\omega \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} \qquad (38)$$

Здесь $\omega \, \partial \bar{R} / \partial\omega$ - плотность диссипированной мощности (которая может быть как положительной, так и отрицательной), а $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau}$ - характеризует изменение энергии, связанное с нестационарностью среды.

Для волновых пакетов, локализованных в пространстве, из (37) следует соотношение

$$\frac{d}{dt} \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \, dV = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial R}{\partial \omega} \, dV \qquad (39)$$

В частности, при $R \equiv 0$ величина $\int \partial\mathcal{L} / \partial\omega \, dV$ является адиабатическим инвариантом.

Отметим еще случай, когда $\bar{R}$ пропорционально кинетической части $\mathcal{L}$, так что имеет место равенство $\partial \bar{R} / \partial\omega = \beta \, \partial\mathcal{L} / \partial\omega$, где β - постоянная. При этом (39) интегрируется+)

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \, dV e^{\beta t} = \mathrm{Const}, \qquad (40)$$

и величина $\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} e^{\beta t} dV$ может быть названа "приведенным" адиабатическим инвариантом. Для сосредоточенной системы с одной степенью свободы соотношение, аналогичное (40), было получено в [16].

+) В этом случае можно ввести приведенный Лагранжан $L^* = L e^{\beta t}$ (соответственно $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} e^{\beta t}$) и сформулировать вариационную задачу для функционала приведенного действия $\int L^* dV dt$. Общий вид L^* для диссипативных систем с сосредоточенными параметрами обсуждается в [19,20].

Отметим в заключение, что все полученные уравнения справедливы и непосредственно для колебательных систем с сосредоточенными параметрами при любом числе степеней свободы, если положить $\gamma = 0$ и понимать под L и R соответственно функции Лагранжа и Релея системы. Соответствующие результаты, конечно, совпадают с известными [16]. Однако и здесь использованный выше подход обладает некоторыми преимуществами, так как Лагранжева формулировка метода позволяет получить ряд результатов в более простой форме, особенно для сильно нелинейных колебаний в системах со многими степенями свободы.

Авторы благодарны А.В.Гапонову и М.И.Рабиновичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А.Митропольский, Б.М.Мосеенков, Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1968.

2. T.Taniuti, N.Yajma, A perturbation method for a nonlinear wave modulation I
J.Math. Phys.10,N 8,1369 (1969).

3. М.И.Рабинович, Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем, ДАН СССР 171, № 6, 1253 (1970).

4. А.В.Гапонов, Л.А.Островский, М.И.Рабинович, Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 13, № 2, 164 (1970).

5. G.B.Whitham, Nonlinear dispersive waves.
Proc.Roy.Soc., A283,238 (1965).

6. Ю.Ф.Филиппов, К теории распространения стационарных волн конечной амплитуды в ферритах, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 8, № 2, 292 (1965).

7. Д.Ф. Курдгелаидзе, Теория нелинейного поля $(\square-\lambda^2\varphi^2)\varphi=0$; ЖЭТФ, 36, 842 (1959).

8. G.B.Whitham A general aproach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian.
J.Fluid.Mech. 22,N2,273 (1965).

9. M.J.Lighthill. Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems.
J.Inst.Math.Appl. 1,N3,269(1965).

10. A discussion on nonlinear theory of wave propagation in dispersive systems (organized by M.J.Lighthill). Proc.Roy.Soc. A299, N1456 (1967).

11. R.L.Seliger, G.B.Whitham, Variational principle in continium mechanics, Proc.Roy.Soc. A308, 3,(1968).

(перевод в "Механика" 5, 117 (1969).

12. J.C.Luke, A perturbation method for nonlinear dispersive wav problems. Proc.Roy.Soc. A292, 403 (1966).

13. М.И.Рабинович, О методе усреднения по стационарным волнам, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 10, № 2, 214 (1967).

14. Н.Н.Куликов, Условия существования и нахождение параметров периодических движений автономных систем, Изв.АН СССР, Механика и машиностроение, 4, 56 (1959).

15. И.Г.Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИИТЛ, М., 1956.

16. Ю.А.Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Изд.2, Наука, М., 1964.

17. Ф.Р.Гантмахер, Теория матриц, изд.2, Наука, М., 1966.

18. А.И.Лурье, Аналитическая механика Ф.М., М., 1961.

19. R. van der Vaast, Variational principle for certain nonconservative systems.
Amer.J. of Phys. 35, N5,419(1967).

20. В.А.Касьянов, Н.Е.Ткаченко, Описание диссипативных систем с помощью формализма Гамильтона, Прикладная механика, 6, № 2, 93 (1970).

21. В.И.Карпман, Е.М.Крушкаль, О модулированных волнах в нелинейных диспергирующих средах, ЖЭТФ, 55, № 2, 530 (1968).

22. G.K.W.Tam Nonlinear dispersion of cold plasma waves.
J.of Plasma Phys. 4,NI,I09 (1970).