Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
при Горьковском Государственном Университете

НИРФИ

Препринт № 3

Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

г. Горький
1970 г.

Распространение волн в нелинейных диспергирующих средах сравнительно полно исследовано лишь для сред с малой нелинейностью и сильной дисперсией, когда решение близко к синусоидальной волне или суперпозиции таких волн. Вместе с тем в ряде задач, относящихся к физике плазмы, теории волновых движений жидкости и электродинамике нелинейных сред, возникает необходимость рассматривать существенно несинусоидальные волны при произвольном соотношении параметров нелинейности и дисперсии.

Весьма общий метод волновых процессов, локально близких к стационарным плоским волнам основан на вариационном принципе Гамильтона в усредненной форме [I].

Уравнения для амплитуды и фазы квазистационарной волны при этом получаются в виде дифференциальных уравнений Эйлера в соответствующей вариационной задаче с средним за период Лагранжианом системы. Таким путем можно исследовать распространение модулированных волн при произвольной форме "несущей" волны, вообще говоря, отличающейся от синусоидальной. Однако влияние диссипации в рамках этого метода не учитывается.

В работах [2,3] с помощью асимптотического метода для несинусоидальных волн получены усредненные уравнения аналогичного, но более общего вида, справедливые для неконсервативных систем. При этом, если исходная система выведена из обобщенного вариационного принципа, то уравнения первого приближения можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{k}} = \frac{\overline{\delta W}}{\delta \theta},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = - \frac{\overline{\delta W}}{\delta A}.$$

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + \nabla\omega = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{k} = 0, \tag{I}$$

где θ – фаза, $A(\vec{r},t)$, $\omega(\vec{r},t)=\theta_t$, $\vec{k}(\vec{r},t) = -\nabla\theta$ амплитуда, частота и волновое число соответственно, $\mathcal{L}(A,\omega,\vec{k})$, $\overline{\delta W}(A,\omega,\vec{k})$ – среднее значение плотностей функции Лагранжа и виртуальной работы обобщенных сил.

В настоящей работе рассматриваются процессы преобразования формы волны, обусловленные неоднородностью параметров с диссипацией энергии в среде.

2. Довольно широкий класс неоднородных систем с диссипацией описывается уравнением

$$c^2(x)u_x + uu_\tau + \frac{c^3(x)}{\beta}u_{\tau\tau\tau} + \frac{3}{4}\frac{\partial c^2(x)}{\partial x}u + \alpha c(x)u - \frac{\delta}{c(x)}u_{\tau\tau} = 0. \tag{2}$$

В отсутствие диссипации и неоднородности (2) переходит в известное уравнение Кортевега-де Вриза:

$$c^2 u_x + uu_\tau + \frac{c^3}{\beta}u_{\tau\tau\tau} = 0, \qquad c = \mathrm{Const} \tag{3}$$

которое описывает распространение поверхностных волн на "мелкой воде" [4], акустических и магнитогидродинамических волн в плазме [4], электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи [5]. Близкое к (3) уравнение получается также в теории колебаний атмосферы [6] и для катящихся волн в открытых руслах [7]. Уравнение (3) применяется для описания волн, распространяющихся со скоростью, близкой к некоторой постоянной скорости C, соответствующей линейному приближению.

x - координата, $\tau = \int \frac{dx}{C(x)} - t$, u - величина, имеющая размерность скорости, β - параметр дисперсии.

Стационарные решения - кноидальные волны (3) хорошо изучены (см., например, [8]) и мы приведем их в виде:

$$u = \frac{12\omega^2 c^3}{\pi\beta} \cdot K(\gamma) \frac{\partial}{\partial\theta} Z\left[\frac{K(\gamma)\theta}{\pi} ; \gamma\right],$$

$$\theta = \omega\tau - kx, \tag{4}$$

$$k = \frac{4\omega^3 c}{\pi^2 \beta} K^2(\gamma)\left[2 - \gamma - 3\frac{E(\gamma)}{K(\gamma)}\right].$$

Здесь Z - дзета-функция Якоби с периодом 2π по θ и нулевым средним значением, $E(\gamma)$ и $K(\gamma)$ - полные эллиптические интервалы с модулем $\sqrt{\gamma}$, ω и k - частота и волновое число соответственно. По существу, γ является параметром несинусоидальности волны, определяющим коэффициенты разложения функции Z в ряд Фурье. Так, при малых γ решение близко к синусоидальному ($\frac{\partial Z}{\partial\theta} \sim \gamma \cos\theta$), а $\gamma = 1$ соответствует одиночной волне - солитону ($\frac{\partial Z}{\partial\theta} \sim \operatorname{sech}^2\theta$). Вид функции $\partial Z / \partial\theta$, определяющий профиль волны, приведен для различных значений γ на рис.I (см. также

[8]). Параметр γ определяет также амплитуду волны

$$A = u_{max} - u_{min} = \frac{12\omega^2 c^3}{\pi^2 \beta} \gamma K^2(\gamma). \qquad (5)$$

В уравнении (2) члены αu и $\delta u_{\tau\tau}$ ответственны за "низкочастотную" и "высокочастотную" диссипацию. Так, для волн на поверхности жидкости: α - коэффициент трения жидкости о грунт или воздух, δ - кинематическая вязкость. Зависимость $C(x)$ позволяет учесть, например, изменение глубины жидкости с расстоянием. Аналогичным образом могут быть описаны электромагнитные волны в нелинейных линиях передачи [5].

3. Для дальнейшего удобно преобразовать уравнени (2). Если ввести замену переменных

$$\Phi_\tau = u, \quad H = u_\tau - \frac{\delta\beta}{2c^4} u, \qquad (6)$$

то легко записать (2) в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial\Phi_\tau} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\Phi_x} = -\frac{\partial R}{\partial\Phi_\tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial H_\tau} - \frac{\partial L}{\partial H} = -\frac{\partial R}{\partial H_\tau}, \qquad (7)$$

где L - Лагранжиан (плотность функции Лагранжа)

$$L = \frac{c^3}{2}\Phi_\tau \Phi_x + \frac{c}{6}\Phi_\tau^3 + \frac{c^4}{\beta} H_\tau \Phi_\tau + \frac{c^4}{2\beta} H^2 - \frac{\delta\beta}{8c^4}\Phi_\tau^2, \qquad (8)$$

а R - плотность функции Релея

$$R=\frac{\alpha c^2}{2}\,\Phi_\tau^2-\frac{\delta}{2}\,H_\tau\Phi_\tau. \qquad (8б)$$

Из-за наличия неоднородности параметров и диссипации энергии в системе решение (4), вообще говоря, несправедливо, но при малых значениях α и δ и плавном изменении скорости $C(x)$ можно считать, что волна локально близка к кноидальной, огибающие которой (амплитуда, волновое число, частота), являются медленными функциями времени и координат.

Для простоты рассмотрим граничную задачу, т.е. определим изменения параметров решения с заданными в точке $x=0$ значениями $A_0, k_0, \omega_0, \gamma_0$ +). Очевидно, что при $x>0$ период волны не изменяется ($\omega\equiv\omega_0$). Остальные параметры будут функциями координаты.

При этих условиях (I) сводится к

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}. \qquad (9)$$

Здесь

$$\mathcal{L}=\langle L\rangle=-\frac{c^3\omega k}{2}\langle\Phi_\theta^2\rangle+\frac{c^4\omega^2}{\beta}\langle\Phi_\theta H_\theta\rangle+\frac{c^4}{2\beta}\langle H\rangle-$$

$$-\frac{\delta\beta\omega^2}{8c^4}\langle\Phi_\theta^2\rangle$$

$$\bar{R}-\langle R\rangle=\frac{\alpha c^2\omega^2}{2}\langle\Phi_\theta^2\rangle-\frac{\delta\omega^2}{2}\langle\Phi_\theta H_\theta\rangle \qquad (10)$$

$$\langle f\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\theta.$$

+) Отметим, что так как уравнение Кортевега-де Вриза описывает волновые процессы в слабонелинейных системах, то решение начальной задачи можно получить из решения граничной, заменив t на $\int\frac{dx}{c(x)}$.

Подставляя (IO) в (9), получим

$$\frac{d}{dx}\left[c^9 Y_1(\gamma)\right] = -2\alpha c^8 Y_1(\gamma) - 2\delta\omega^2 c^6 Y_2(\gamma)\,, \qquad (II)$$

где

$$Y_1(\gamma) = K^2\langle Z_\theta^2\rangle = \frac{K^4}{\pi^2}\left\{\frac{4-2\gamma}{3}\cdot\frac{E}{K} - \frac{1-\gamma}{3} - \frac{E^2}{K^2}\right\}$$

$$Y_2(\gamma) = K^2\langle Z_{\theta\theta}^2\rangle = \frac{4K^6}{15\pi^4}\left\{2(\gamma^2-\gamma+1)\frac{E}{K} - (1-\gamma)(2-\gamma)\right\} \qquad (I2)$$

Определяя γ из уравнения (II), мы тем самым найдем все характеристики волны ее амплитуду и частоту. Между тем знание γ представляет и независимый интерес, так как этим параметром определяется эквивалентная ширина спектра волны (степень ее несинусоидальности).

4. Найти решение уравнения (II) в общем виде не представляется возможным. Однако в случаях малых и больших γ нетрудно получить простые асимптотические выражения для $\gamma(x)$ и $A(x)$.

Если $\gamma \ll 1$ (при этом волна близка к гармонической), то $Y_1 \approx Y_2 \approx \frac{\pi^2}{128}\gamma^2$, $K(\gamma) \simeq \frac{\pi}{2}$ и получаем

$$\gamma(x) = \gamma_0 \exp\left\{-\int_0^x \left(\frac{9}{2}\frac{c'}{c} + \frac{\alpha}{c} + \frac{\delta\omega^2}{c^3}\right)dx'\right\} \qquad (I3a)$$

$$A(x)\,C^{3/2}(x) = A_0 C_0^{3/2} \exp\left\{-\int_0^x \left(\frac{\alpha}{C} + \frac{\delta\omega^2}{C^3}\right) dx'\right\}. \qquad (13б)$$

Естественно, что последний результат может быть легко получен из (2), если пренебречь в нем нелинейным членом $u u_\tau$.

Если же $1-\gamma \ll 1$ (при этом волна близка к последовательности слабо связанных между собой солитонов), то $Y_1 \simeq \frac{2}{3\pi} K^3$, $Y_2 \simeq \frac{8}{15\pi^4} K^5$, $K(\gamma) \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-\gamma}$ и получаем:

$$A(x)\,C^3(x) = \frac{A_0 C_0^3\, e^{-\frac{4}{3}\int_0^x \frac{\alpha\, dx'}{C}}}{1 + \frac{4 A_0 C_0^3 \delta\beta}{45} \int_0^x \frac{dx'}{C^9}\, e^{-\frac{4}{3}\int_0^{x'} \frac{\alpha\, dx''}{C}}} \qquad (14)$$

В отсутствие диссипации из (14) следует соотношение

$$A(x)\,C^3(x) = \mathrm{const}. \qquad (15)$$

Амплитуда солитона изменяется быстрее, чем амплитуда синусоидальной волны. Укажем еще на два частных случая, вытекающих из (14). При $\alpha = 0$ и $C = \mathrm{Const}$ на достаточно большом расстоянии от места образования амплитуды солитона не зависит от граничных условий+)

$$A(x) \simeq \frac{45\, C^6}{4\delta\beta x}, \quad x \to \infty \qquad (16)$$

+) Аналогичная ситуация имеет место для ударных волн в среде с вязкостью [9].

При $\delta = 0$ и $c = Const$ амплитуда солитона уменьшается по экспоненциальному закону, но с большим показателем, чем амплитуда гармонической волны:

$$A(x) = A_0 e^{-\frac{4\alpha x}{3c}} . \qquad (17)$$

Отметим, также, что при некотором специальном законе изменения скорости можно добиться того, что амплитуда солитона не изменяется вдоль x, однако получаемое таким образом решение справедливо лишь для ограниченного интервала x. [7].

6. Исследование процессов трансформации волны с произвольным γ удается провести в случаях, когда отсутствует либо диссипация энергии, либо неоднородность. Если $\alpha = \delta = 0$, то из (11) следует, что

$$c^9(x)\, Y_1(\gamma) = Const. \qquad (18)$$

Нетрудно показать, что (18) выражает условие сохранения среднего потока энергии в волне.

Из формулы (18) следует, что при уменьшении $c(x)$ параметр несинусоидальности волны γ растет ($dY_1/d\gamma > 0$), и, следовательно, волна, независимо от начальной формы, трансформируется в последовательность "одиночных" волн с $\gamma \gtrsim 0{,}95$ (если, конечно, амплитуда не вырастает раньше на столько, что уравнение (2) становится непригодным). На рис.2 изображена зависимость $\gamma(c)$ для нескольких значений γ_0, определяющих профиль волны при $x = 0$. Формула (18) дает близкое к действительности описание процесса трансформации волны, качественно описанного в [10] для волн на поверхности жидкости.

В отсутствие неоднородности диссипацию энергии удобно характеризовать коэффициентом поглощения:

$$\varkappa = -\frac{d}{dx}\ln\frac{A(x)}{A_0}. \qquad (19)$$

Пользуясь (5), (II), для величины $\varkappa$ получим

$$\varkappa = 2\left(\frac{\alpha}{c}Y_1 + \frac{\delta\omega^2}{c^3}Y_2\right)\frac{d\ln(\gamma K^2)/d\gamma}{dY_1/d\gamma}. \qquad (20)$$

Графики зависимостей $\varkappa' = \frac{c\varkappa}{\alpha}$ (при $\delta = 0$) и $\varkappa' = \frac{c^3\varkappa}{\delta\omega^2}$ (при $\alpha = 0$) приведены на рис.3. Отметим, что коэффициент поглощения $\varkappa$ сильно изменяется только вблизи $\gamma = 1$. Это связано с тем, что существенное отличие эллиптических функций от тригонометрических сказывается около $\gamma = 1$ (см., например, [8]) и, таким образом, в большом диапазоне изменения величины γ можно пользоваться квазилинейным приближением, основанном на близости волны к синусоидальной. При малых γ нетрудно получить, что

$$\varkappa = \frac{\alpha}{c} + \frac{\delta\omega^2}{c^3} \qquad (21а)$$

в соответствии с результатами линейной теории (13).

Если $1-\gamma \ll 1$, что соответствует форме волны, близкой к последовательности солитонов, то из (20) и (5) следует:

$$\varkappa = \frac{4\alpha}{3c} + \frac{4\delta\beta A}{45c^6} \qquad (21б)$$

Относительно вычисления коэффициента поглощения заметим еще следующее. Для слаболинейных сред некоторые авторы (см., например, [9]) предлагают находить $\varkappa$ как сумму парциальных (по частоте) коэффициентов поглощения. Согласно этому методу коэффициент поглощения солитона был бы равен $\frac{\alpha}{c} + 0{,}085\,\frac{\sigma\beta A}{c^6}$, т.е. примерно на 30% меньше, чем по формуле (21б), учитывающей нелинейность процесса.

В заключение отметим, что выводы теории хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными для волн на воде [10, 11], а также для уединенных радиоволн в нелинейной линии передачи [5].

Авторы благодарны А.А.Андронову и А.В.Гапонову за полезные замечания, высказанные при обсуждении данной работы.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. I. I) $\gamma = 0{,}3$ 2) $\gamma = 0.9$

3) $\gamma = 0{,}95$

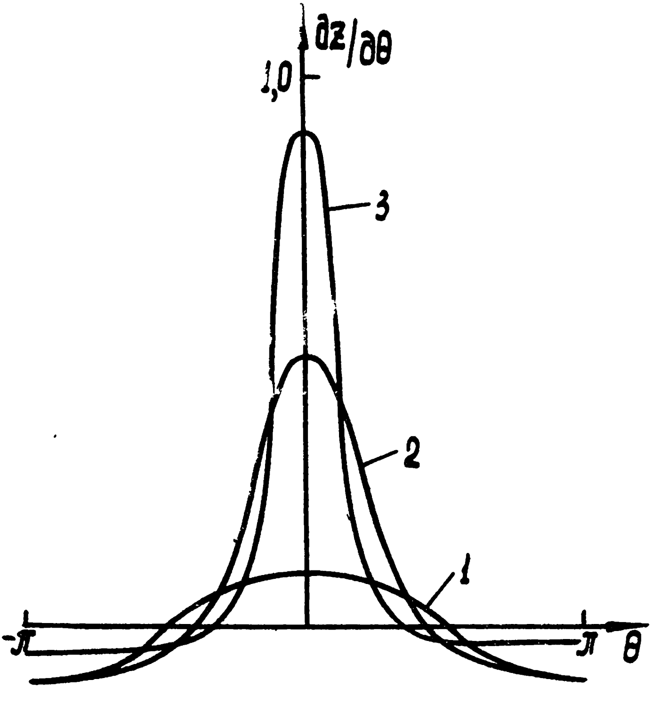
Рис.2. Зависимость $\gamma(c)$ при различных начальных значениях γ_0

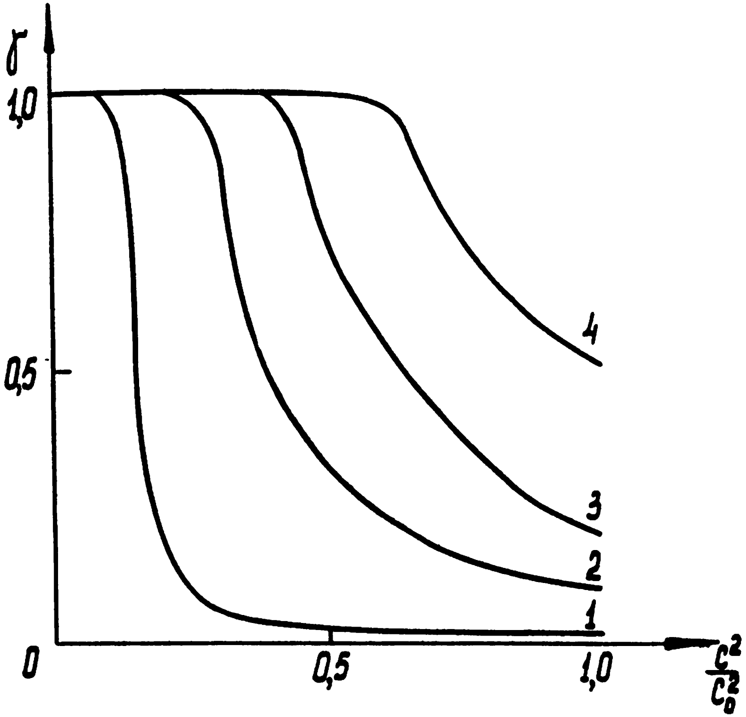
I) $\gamma_0 = 0{,}0I$ 2) $\gamma_0 = 0{,}I$

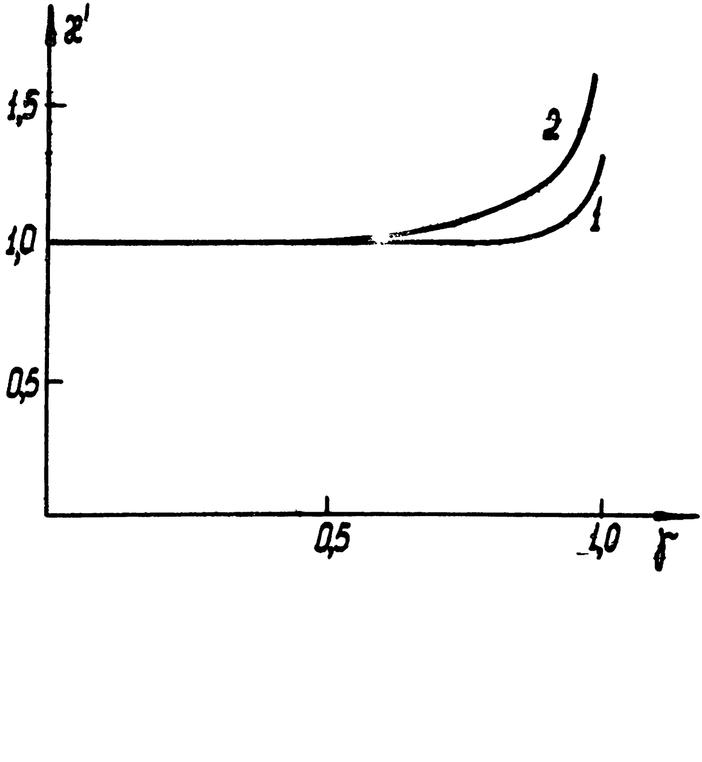
3) $\gamma_0 = 0{,}2$ 4) $\gamma_0 = 0{,}5$

Рис.3. Зависимость безразмерного коэффициента поглощения $\varkappa'$ от параметра несинусоидальности γ

I) $\delta = 0$ 2) $\alpha = 0$


∂z/∂θ
1,0
3
2
1
-π
π
θ


γ
1,0
0,5
0
0,5
1,0
$\frac{C^2}{C_0^2}$
1
2
3
4



æ'
1,5
1,0
0,5
2
1
0,5
1,0
r

ЛИТЕРАТУРА

I. G.B.Whitham, A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian, J.Fluid.Mech., 22, N 2, 273 (1965).

2. Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский, Метод усреднения и обобщенный вариационный принцип для несинусоидальных волн, ПММ (в печати).

3. Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский, Метод усреднения для несинусоидальных волн, ДАН СССР (в печати).

4. В.И.Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд-во НГУ, Новосибирск (1968).

5. Л.А.Островский, В.В.Папко, Е.Н.Пелиновский, Уединенные радиоволны в нелинейных линиях передачи, Изв.ВУЗов, Радиофизика (в печати).

6. Т.З.Сохов, Л.Н.Гутман, О мезометеорологических уединенных волнах, Изв.ВУЗов, Физика атмосферы и океана, 4, № 4, 271, (1968).

7. Ю.П.Иванилов, Катящиеся волны в наклонном канале, ЖВМ и МФ I, № 6 1061 (1961).

8. R.J.Wiegel, A presentation of cnoidal wave theory for pratical applications, J.Fluid.Mech., 7, N 2, 273 (1960).

9. Л.К.Зарембо, В.Н.Красильников, Введение в нелинейную акустику, Изд.Наука", М., 1966.

10. В.Мунк, Теория одиночных волн и ее применение к зоне прибоя. В сб. Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя, ИЛ, М., 1951.

11. З.К.Григораш, Опытное исследование уединенной волны в канале переменного сечения, Труды Гос.гидрофизического ин-та АН СССР № 5, 53 (1955).