



Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 8

С.Н.Власов, В.А.Петришев, В.И.Таланов



НИРФИ

УСРЕДНЕННОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ
В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ
(МЕТОД МОМЕНТОВ)

г. Горький
1970 г.

Как известно, одним из эффективных методов решения задач в теории переноса является метод моментов [1,2]. Он состоит в том, что задача отыскания некоторого распределения $f(t)$ заменяется определением моментов $R_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$ этого распределения. Эффективность метода моментов в задачах теории переноса связана с относительной простотой уравнений для R_n . Знание всех моментов позволяет известными методами восстановить вид функции $f(t)$ [3].

Однако, даже в тех случаях, когда оказывается невозможным определить все моменты искомого распределения, информация о нескольких первых моментах оказывается полезной [4,5]. Это особенно важно для нелинейных задач, в которых отыскание всего распределения требует привлечения численных методов. В данной работе речь пойдет о привлечении метода моментов к анализу задач линейной и нелинейной квазиоптики.

§ 1. Связь усредненного описания поля с законами сохранения энергии и импульса.

Пусть в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) имеется некоторый набор величин: $w(t, \vec{r})$ - скаляр,

$\vec{S}(t, \vec{r})$ - вектор, $T_{\alpha\beta}(t, \vec{r})$ - тензор, удовлетворяю -
щих уравнениям

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{S} \quad (a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{T} \quad (b) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} = - \operatorname{div} \vec{Q} \quad (c)$$

где \vec{Q} - некоторый вектор. Введем в рассмотре -
ние моменты величины $w(t, \vec{r})$: нулевого поряд -
ка

$$W(t) = \int_V w \, dV \quad (1.2)$$

первого порядка

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{W} \int_V \vec{r} w \, dV \quad (1.3)$$

и центробежный момент второго порядка

$$I(t) \equiv a_{\text{эфф}}^2 = \frac{1}{W} \int_V r^2 w(t, \vec{r}) \, dV \quad (1.4)$$

В (2) - (4) интеграл берется по всему бесконечно-

му пространству. Если величине W приписать смысл плотности энергии, то первые два уравнения (1) будут описывать законы сохранения энергии и импульса поля. Так, в случае электромагнитного поля в вакууме

$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$, $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$ - плотность потока энергии, $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^M = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_{\alpha} E_{\beta} + H_{\alpha} H_{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right\}$ - максвелловский тензор натяжений, $\sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} = w$ и

$\vec{Q} = \vec{S} \cdot \vec{V}$. В однородной среде с проницаемостями ϵ, μ :

$$w = \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}}{8\pi}; \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}];$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{1}{4\pi} \left\{ E_{\alpha} D_{\beta} + H_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E_{\alpha} D_{\beta} + H_{\alpha} B_{\beta}) \right\} = \frac{1}{\epsilon\mu} T_{\alpha\beta}^M;$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\epsilon\mu} w; \quad \vec{Q} = \frac{\vec{S}}{\epsilon\mu}.$$

В силу уравнений (1.1) для поля, локализованного в некоторой области пространства, выполняются следующие соотношения:

$$W(t) = \text{const} = W(0) \quad (a)$$

$$\frac{dr_u(t)}{dt} = \text{const} = \left. \frac{d\bar{r}_u}{dt} \right|_{t=0} \quad (b) \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} = \text{const} = \left. \frac{d^2 I}{dt^2} \right|_{t=0} \quad (c)$$

Здесь (5 а) следует из (1 а), (5 в) - из (1 в), а (5 с) - из (1 а) - (1 с).

Таким образом, указанные выше моменты рас-

предела $w(t)$ представляются по t полиномами соответствующего порядка:

$$W = W_0; \quad \bar{r}_u = \bar{r}_{u,0} + \bar{v}_u t \quad (1.6)$$

$$I = I_0 + Bt + At^2$$

- с коэффициентами, определяемыми начальными условиями:

$$\bar{v}_u = \frac{1}{W_0} \int_V \bar{S} dv \Big|_{t=0}$$

$$A = -\frac{c^2}{W_0} \int_V \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} dv \Big|_{t=0}; \quad B = \frac{2}{W_0} \int_V \bar{r} \bar{S} dv \Big|_{t=0}.$$

Соотношения (6) имеют простой физический смысл: энергия сгустка поля W сохраняется, "центр энергии" \bar{r}_u движется по прямой с постоянной скоростью \bar{v}_u , а квадрат эффективного радиуса сгустка $a_{\text{эфф}}^2$ изменяется по параболическому закону (при $t \rightarrow \infty, a_{\text{эфф}} \sim t$) - движение сгустка подобно движению облака невзаимодействующих частиц в отсутствие внешних сил (в этом случае \bar{r}_u определяется как центр масс).

§ 2. Усредненное описание стационарных волновых пучков в линейной среде.

Рассмотрим теперь стационарный во времени волновой пучок $E = E e^{-ikz}$, описываемый уравнением квазиоптики (в координатах $\bar{k} \bar{r}$):

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2i} \Delta_{\perp} E \quad (2.1)$$

Будем интересоваться зависимостью от \bar{x} моментов интенсивности $|E|^2$:

$$r_{mn} = \int_S x^m y^n |E|^2 dx dy. \quad (2.2)$$

Поскольку, как следует из (2.1), имеют место соотношения:

$$\frac{\partial |E|^2}{\partial \bar{x}} = -\operatorname{div}_{\perp} \bar{S}_{\perp}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_{\perp}}{\partial \bar{x}} = \operatorname{div}_{\perp} \bar{T}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \sum_{i=1}^2 T_{ii} = -\operatorname{div}_{\perp} \bar{Q}, \quad (2.5)$$

где
$$\bar{S}_{\perp} = \frac{E \nabla_{\perp} E^* - \text{к.с.}}{2i} \quad (2.6)$$

$$T_{ik} = \frac{1}{4} \Delta_{\perp} |E|^2 \delta_{ik} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial x_i} \frac{\partial E^*}{\partial x_k} + \frac{\partial E}{\partial x_k} \frac{\partial E^*}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

$$\bar{Q} = -\frac{1}{4i} \{ E \nabla_{\perp} \Delta_{\perp} E^* - \text{к.с.} \} \quad (2.8)$$

то для величин

$$r_{00} \equiv W_0$$

$$\frac{1}{r_{00}} (r_{10} \bar{x}_0 + r_{01} \bar{y}_0) \equiv \bar{r}_{u \perp}$$

$$\frac{1}{r_{00}} (r_{20} + r_{02}) \equiv a_{\text{эфф}}^2.$$

применимы формулы, аналогичные (1,2) - (1,4) с заменой t на ξ и V на S

$$r_{00}(\xi) = r_{00}(0) \quad (2.8)$$

$$r_{4,1}(\xi) = \bar{r}_{4,1}(0) + \bar{\alpha} \xi \quad (2.10)$$

$$a_{\text{эфф}}^2(\xi) = a_{\text{эфф}}^2(0) + \beta \xi + A \xi^2, \quad (2.11)$$

$$\text{где } \bar{\alpha} = \frac{1}{r_{00}} \int_S \bar{S}_1 ds \equiv \frac{1}{r_{00}} \int_S E_0^2 \nabla_1 \varphi ds \Big|_{\xi=0} \quad (2.12)$$

$$\beta = \frac{2}{r_{00}} \int_S \bar{r}_1 \bar{S}_1 ds \equiv \frac{2}{r_{00}} \int_S (\bar{r}_1 \nabla_1 \varphi) E_0^2 ds \Big|_{\xi=0} \quad (2.13)$$

$$A = \frac{1}{r_{00}} \int_S |\nabla_1 E|^2 ds \equiv \frac{1}{r_{00}} \int_S [(\nabla_1 E_0)^2 + E_0^2 (\nabla_1 \varphi)^2] ds \Big|_{\xi=0} \quad (2.14)$$

$E = E_0 e^{-i\varphi}$

Таким образом, полный поток энергии пучка сохраняется, центр интенсивности лежит на одной прямой^{*)} (следствие закона сохранения поперечного импульса пучка), а квадрат эффективной ширины пучка изменяется по параболическому закону.

Можно показать, что полиномиальное (по ξ) представление моментов интенсивности поля, описываемого уравнением (2.1), имеет место и для последующих порядков r_{m1} :

$$r_{m1}(\xi) = \rho_{m+n}(\xi), \quad (2.15)$$

^{*)} На это обстоятельство уже обращалось внимание в работе [6].

где $P_{m+n}(z)$ - полином степени $(m+n)$. В этом проще всего убедиться, используя интегральное преобразование Френеля, эквивалентное уравнению (2.1):

$$E(\vec{r}, z) = \frac{i}{2\pi z} \int_S E(\vec{r}', 0) e^{-i \frac{|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2z}} d^2 r'_\perp \quad (2.16)$$

Рассмотрим для иллюстрации фокусировку гауссова пучка $E = E_0 e^{-\frac{r^2}{2a_0^2} + i \frac{r^2}{2F}}$. Для него $\alpha_{\text{эфф}} = \alpha$, и выражение

$$\alpha_{\text{эфф}}^2(z) \equiv \alpha^2(z) = \frac{1}{\alpha_0^2} z^2 + \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 \alpha_0^2 \quad (2.17)$$

описывает изменение действительной ширины пучка α . Таким образом, волновые пучки в усредненном описании ведут себя аналогично гауссовым пучкам соответствующей ширины и расходимости. Можно показать, что для коллимированных пучков ($\psi(0) = 0$) при заданной величине $\alpha_{\text{эфф}}^2(0)$ гауссовы распределения реализуют минимальную дифракционную расходимость эффективного сечения.

В качестве другого примера рассмотрим прохождение произвольного пучка через квадратичный фазовый корректор $\psi_0 = -\frac{r^2}{2F}$. Полагая в (2.9) - (2.14); $\psi = \psi_{\text{п}} + \psi_0$, где $\psi_{\text{п}}$ - фаза падающего пучка, найдем что

$$(\vec{r}_{\perp})_{\text{вых}} = (r_{\perp})_{\text{вх}}; \vec{\alpha}_{\text{вых}} = \vec{\alpha}_{\text{вх}} - \frac{(\vec{r}_{\perp})_{\text{вх}}}{F} \quad (2.18)$$

$$(a_{\text{эфф}})_{\text{вых}} = (a_{\text{эфф}})_{\text{вх}}$$

$$V_{\text{вых}} = V_{\text{вх}} - \frac{2(a_{\text{эфф}}^2)_{\text{вх}}}{F}; A_{\text{вых}} = A_{\text{вх}} - \frac{V_{\text{вх}}}{F} + \frac{(a_{\text{эфф}}^2)_{\text{вх}}}{F^2}$$

Указанные соотношения, наряду с (2.9) + (2.14), позволяют проводить рассмотрение произвольных пучков в системах квадратичных фазовых корректоров. Заметим, что для неквадратичных корректоров преобразования коэффициентов, определяющих изменение эффективной ширины пучка и его направления, будут содержать моменты входного распределения выше второго.

§ 3. Описание частично-когерентных полей и полей в статистически-неоднородных средах.

Укажем еще один путь получения моментов распределения интенсивности в квазиоптике, пригодный и для описания частично-когерентных полей. Введем в рассмотрение функцию взаимной когерентности [5]

$$V(\vec{r}, \vec{\rho}, z) = \langle E(\vec{r} + \frac{\vec{\rho}}{2}, z) E^*(\vec{r} - \frac{\vec{\rho}}{2}, z) \rangle, \quad (3.1)$$

где $\vec{r}(x, y)$, $\vec{\rho}(\xi, \eta)$ - радиус-вектора в плоскости $z = \text{const}$. Уравнение для функции $V(\vec{r}, \vec{\rho}, z)$

$$i \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{r}, \vec{\rho}, z) = \nabla_{\vec{r}} \nabla_{\vec{\rho}} V(\vec{r}, \vec{\rho}, z), \quad (3.2)$$

вытекающее из (2.1), можно решить методом, аналогичным развитому в работе [5]. Для моментов функции взаимной когерентности

$$r_{mn}(\bar{\rho}) = \int_S B(\bar{r}, \bar{\rho}, z) x^m y^n d^2 \bar{r} \quad (3.3)$$

из (3.2) нетрудно получить рекуррентное уравнение

$$i \frac{\partial r_{mn}}{\partial z} = -m \frac{\partial}{\partial \xi} r_{m-1, n} - n \frac{\partial}{\partial \eta} r_{m, n-1} \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что

$$r_{00}(\bar{\rho}, z) = r_{00}(\bar{\rho}, 0) = \text{const} \quad (3.5)$$

$$r_{01}(\bar{\rho}, z) = r_{01}(\bar{\rho}, 0) - \frac{1}{i} z \frac{\partial r_{00}(\bar{\rho}, 0)}{\partial \eta}$$

$$r_{10}(\bar{\rho}, z) = r_{10}(\bar{\rho}, 0) - \frac{1}{i} z \frac{\partial r_{00}(\bar{\rho}, 0)}{\partial \xi} \quad (3.6)$$

$$r_{02}(\bar{\rho}, z) = r_{02}(\bar{\rho}, 0) - \frac{2}{i} z \frac{\partial r_{01}(\bar{\rho}, 0)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 r_{00}(\bar{\rho}, 0)}{\partial \eta^2} z^2 \quad (3.7)$$

$$r_{20}(\bar{\rho}, z) = r_{20}(\bar{\rho}, 0) - \frac{2}{i} z \frac{\partial r_{10}(\bar{\rho}, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r_{00}(\bar{\rho}, 0)}{\partial \xi^2} z^2$$

и т.п.

Таким образом, полиномиальное представление для моментов интенсивности есть частный случай (при $\bar{\rho} = 0$) полиномиального представления для моментов функции взаимной когерентности $B(\bar{r}, \bar{\rho}, z)$. Результаты (3.4) - (3.7) естественно обобщаются на случай распространения частично-когерентных волновых пучков в статистически-неоднородных средах.

В известном приближении [5,7] этот случай описывается уравнением

$$i \frac{\partial B}{\partial z} = \nabla_{\vec{r}} \nabla_{\vec{\rho}} B - \frac{i}{4} d_{\epsilon}(\vec{\rho}) B \quad (3.8)$$

для функции взаимной когерентности (3.1).

В (3.8)

$$d_{\epsilon}(\vec{\rho}) = \int_0^{\infty} D_{\epsilon}(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz + \int_0^{\infty} D_{\epsilon}(\sqrt{z^2}) dz,$$

$$D_{\epsilon}(\vec{\rho}^{(3)}) = \langle [\epsilon(\vec{R} + \frac{\vec{\rho}^{(3)}}{2}) - \epsilon(\vec{R} - \frac{\vec{\rho}^{(3)}}{2})] \rangle \equiv D_{\epsilon}(\rho^{(3)})$$

— структурная функция локально-однородных и изотропных флуктуаций диэлектрической проницаемости ϵ .
 $(\vec{R}$ и $\vec{\rho}^{(3)})$ — радиус-вектора в трехмерном пространстве x, y, z :

$$\rho^{(3)} = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Из (3.8) можно получить рекуррентное уравнение, описывающее изменение моментов функции взаимной когерентности B .

$$i \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{4} d_{\epsilon}(\rho) \right) r_{mn} = \quad (3.9)$$

$$= -m \frac{\partial}{\partial \xi} r_{m-1, n} - n \frac{\partial}{\partial \eta} r_{m, n-1}$$

обобщающее (3.4). Из него следует, что

$$\begin{aligned}
r_{00}(\bar{\rho}, z) &= r_{00}(\bar{\rho}, 0) \exp\left(-\frac{1}{4} d_{\varepsilon}(\rho) \cdot z\right) \\
r_{01}(\bar{\rho}, z) &= \left[r_{01}(\bar{\rho}, 0) - \frac{1}{i} \frac{\partial r_{00}(\bar{\rho}, 0)}{\partial z} z + \frac{1}{i} \frac{\partial d_{\varepsilon}}{\partial z} r_{00}(\bar{\rho}, 0) \cdot \right. \\
&\quad \left. \times \frac{z^2}{8} \right] e^{-1/4 d_{\varepsilon}(\rho) z}, \quad (3.10) \\
r_{02}(\bar{\rho}, z) &= \left[(r_{02}(\bar{\rho}, z))_{\text{рег}} + \frac{1}{i} \frac{\partial d_{\varepsilon}}{\partial z} r_{01}(\bar{\rho}, 0) \frac{z^2}{4} + \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^2 d_{\varepsilon}}{\partial z^2} r_{00}(\bar{\rho}, z) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial d_{\varepsilon}}{\partial z} \cdot \frac{\partial r_{00}(\bar{\rho}, 0)}{\partial z} \right) z^3 - \left(\frac{\partial d_{\varepsilon}}{\partial z} \right)^2 r_{00}(\bar{\rho}, 0) \frac{z^4}{64} \right] e^{-1/4 d_{\varepsilon}(\rho) z}
\end{aligned}$$

В частности,

$$a_{\text{эфф}}^2(z) = (a_{\text{эфф}}^2(z))_{\text{рег}} + \frac{1}{12} [\Delta_{\bar{\rho}} d_{\varepsilon}(\rho)]_{\rho=0} z^3, \quad (3.11)$$

Как видно из (3.11), хаотическая нерегулярность среды вносит в уширение эффективного сечения пучка аддитивный вклад [4, 5].

§ 4. Волновые пучки в нелинейной среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \varepsilon' |E|^2)$$

Рассмотрим волновые пучки в кубичной среде, описываемые уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2i} (\Delta_{\perp} E + \varepsilon' |E|^2 E). \quad (4.1)$$

Непосредственным дифференцированием моментов интенсивности по ξ с использованием уравнения (4.1) можно показать, что для волновых пучков в средах с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \epsilon' |E|^2)$ справедливы соотношения (2.3) - (2.5), в которых

$$T_{ik} = T_{ik}^L + \frac{1}{4} \epsilon' |E|^4 \delta_{ik}$$

T_{ik}^L и \bar{Q}^L - соответствующие выражения для линейной среды.

$$\bar{Q} = \bar{Q}^L - \frac{\epsilon'}{2i} |E|^2 (E \nabla_{\perp} E^* - \text{к.с.})$$

В результате этого, попрежнему имеют место формулы (2.9) - (2.11) с единственным отличием:

$$A = A^{NL} = A^L - \frac{\epsilon'}{2r_{00}} \int_S |E|^4 ds. \quad (4.2)$$

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из соотношений (2.9) - (2.11) с учетом (4.2). В нелинейной среде центр интенсивности пучка распространяется по прямой, причем той же, что и в линейной среде. Этот вывод справедлив не только для кубических сред, но и при произвольной зависимости $\epsilon(|E|^2)$. Это значит, что поперечные смещения пучка с асимметричным профилем амплитуды [8] носят локальный характер, в целом же пучок распространяется прямолинейно.

Из (2.11) и (4.2) следует, что любой коллимированный пучок, начиная с некоторой критической мощности $P_{кр}$, в нелинейной среде будет в среднем

+) Ввиду произвольности начала отсчета координаты в (2.11) коэффициент A является интегралом исходных уравнений. Для произвольной нелинейности аналогичный инвариант был определен в работе [14].

"схлопываться": при $A^{N\omega} < 0$ $\frac{d^2 a^2_{\text{эфф}}}{d\xi^2} < 0$. Критическая мощность находится из условия $A^{N\omega} = 0$:

$$\int_S [|\nabla_{\perp} E|^2 - \frac{\epsilon'}{2} |E|^4] ds = 0. \quad (4.3)$$

Полагая $E = E_0 f(\vec{r}_{\perp})$, из (4.3) получим

$$E_{0\text{кр}}^2 = \frac{2}{\epsilon'} \frac{\int_S (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_S f^4 ds} \quad (4.4)$$

или

$$P_{\text{кр}} = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \epsilon'} \frac{\int_S (\nabla_{\perp} f)^2 ds \int_S f^2 ds}{\int_S f^4 ds}, \quad (4.5)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}$. Критическая мощность (4.5) определяется лишь параметрами среды и профилем поперечного распределения $f(\vec{r}_{\perp})$, она не зависит от его амплитуды или ширины. Так, для гауссова пучка $f \sim e^{-r_{\perp}^2/2a^2}$

$$P_{\text{кр}}^r = \frac{cn}{2\epsilon' k_0^2}. \quad (4.6)$$

Определим профиль, для которого критическая мощность минимальна. Варьируя $P_{\text{кр}}$ по $f(\vec{r}_{\perp})$, находим, что этот профиль должен удовлетворять уравнению

$$\Delta_{\perp} f + 2 \frac{\int_S (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_S f^4 ds} f^3 - \frac{\int_S (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_S f^2 ds} f = 0,$$

которые заменой

$$\bar{r}_{\text{нов}} = \bar{r}_1 \left(\int_S (\nabla_1 f)^2 ds / \int_S f^2 ds \right)^{1/2}$$

$$f_{\text{нов}} = f \cdot \left(2 \int_S f^2 ds / \int_S f^4 ds \right)^{1/2}$$

можно привести к виду

$$\Delta_1 f_{\text{нов}} + f_{\text{нов}}^3 - f_{\text{нов}} = 0. \quad (4.7)$$

Простейшему решению этого уравнения соответствует аксиально-симметричный пучок, являющийся не зависящим от ξ решением уравнения (4.1). Таким образом пучок, профиль которого совпадает с профилем однородного (по ξ) пучка, имеет наименьшую критическую мощность: $P_{\text{кр. min}} = P_{\text{огн}}$. Величина

$$P_{\text{огн}} = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \epsilon'} \cdot 5,7637. \quad (4.8)$$

была определена в работе [9] численным интегрированием уравнения (4.7). Однако, стационарные свойства функционала $P_{\text{кр}}[f]$ позволяют вычислить ее со сравнительно высокой точностью стандартными вариационными методами. Как видно из (4.6), уже гауссов пучок дает практически достаточное приближение для $P_{\text{огн}}$: $P_{\text{кр}}^{\text{Г}} = 1,09 P_{\text{огн}}$. Обратим внимание, что полученное значение критической мощности гауссова пучка несколько выше значения, определенного в результате численных расчетов [10]: $P_{\text{кр}}^{\text{Г}} = 1,015 P_{\text{огн}}$. Это связано с

тем, что в первом случае критическая мощность определяет порог "схлопывания" пучка как целого $\left(\frac{d^2 a^2_{\text{эфф}}}{d z^2} < 0 \right)$, когда на оси пучка образуется фокальная точка с бесконечной интенсивностью. В некотором небольшом интервале мощностей $\rho_{\text{огн}} - \rho = 1,09 \rho_{\text{огн}}$ образование фокальной точки сопровождается увеличением эффективной ширины пучка.

Запишем выражение (2.11) для эффективной ширины пучка, введя в него критическую мощность (4.5)

$$a^2_{\text{эфф}} = A_0^L \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{кр}}} \right) z^2 + \frac{\int_S (\vec{F}_1 + \nabla_{\perp} \psi z)^2 E_0^2 ds}{\int_S E_0^2 ds}, \quad (4.9)$$

где

$$A_0^L = \frac{\int_S (\nabla_{\perp} E_0)^2 ds}{\int_S E_0^2 ds} \quad (4.10)$$

- коэффициент характеризующий дифракционную расходимость в линейной среде коллимированного пучка того же амплитудного профиля. В частности, для сфокусированного пучка $(\psi = -r^2/2F)$

$$a^2_{\text{эфф}}(z) = A_0^L \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{кр}}} \right) z^2 + \left(1 - \frac{z}{F} \right)^2 a^2_{\text{эфф}}(0). \quad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что критическая мощность самофокусировки для сфокусированного пучка $(F > 0)$ та же, что и для коллимированного: при $\rho = \rho_{\text{кр}}$ волно-

вой пучок в среднем имеет вид конуса $a_{эфф} = \left(1 - \frac{z}{F}\right) a_{эфф}(0)$ с вершиной в т. $z = F$. Этот результат уже был отмечен в работе [11]. Нетрудно убедиться, что эффективная ширина пучка (2.11) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 a_{эфф}}{dz^2} = \frac{A a_{эфф}^2(0) - \frac{B^2}{4}}{a_{эфф}^3} \quad (4.12)$$

В частности, для сфокусированного пучка

$$\frac{d^2 a_{эфф}}{dz^2} = \frac{A_0 \left(1 - \frac{P}{P_{кр}}\right) a_{эфф}^2(0)}{a_{эфф}^3} \quad (4.12a)$$

Если $E = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)$ то $a_{эфф}(0) = a_0$.

$$A_0 = \frac{1}{a_0^2} \quad \frac{d^2 a_{эфф}}{dz^2} = \frac{1 - P/P_{кр}}{a_{эфф}^3} \quad (4.12b)$$

К последнему уравнению приходят в теории так называемой безабберационной самофокусировки [12], понимая под $a_{эфф}$ ширину гауссова пучка. Проведенное рассмотрение уточняет смысл безабберационного приближения: получающееся уравнение описывает эффективную ширину самофокусирующегося пучка, которая может заметно отличаться от действительной ширины, определенной по какому-нибудь фиксированному уровню. Вместе с тем в (4.12b) уточнен и смысл критической мощности: $P_{кр} = 4\bar{P}_{кр}$ где $\bar{P}_{кр}$ — критическая мощность самофокусировки, получаемая в приосевом приближении [12]. Заметим, что урав-

нение для ширины гауссова пучка, которое может быть получено из функционала действия для уравнения (4.1) вариационным методом [13], полностью совпадает с (4.126) и таким образом описывает не истинную, а эффективную ширину пучка.

Из (4.11) при $\rho > \rho_{кр}$ можно определить длину самофокусировки как расстояние до точки, где $a_{зф\phi} = 0$; для коллимированного пучка:

$$z_{сф}^* = \frac{a_{зф\phi}(0)}{[A_0^2 (\rho/\rho_{кр} - 1)]^{1/2}} \quad (4.13)$$

Для гауссова пучка

$$z_{сф}^* = \frac{a_0^2}{(\rho/\rho_{кр} - 1)^{1/2}} \quad (4.14)$$

Интересно сопоставить это выражение со значением длины самофокусировки, определяемой из численных расчетов как расстояние до фокальной точки с бесконечной интенсивностью на оси [10]:

$$z_{сф} = \frac{0,366 a_0^2}{\left\{ \left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_{кр}}} - 0,825 \right)^2 - 0,03 \right\}^{1/2}} \quad (4.15)$$

При $\rho \rightarrow \rho_{кр}^r$

$$z_{сф}^* = \frac{a_0^2}{(\rho/\rho_{кр})^{1/2}}; \quad z_{сф} = \frac{a_0^2}{2\sqrt{2}(\rho/\rho_{кр})^{1/2}} \quad (4.16)$$

т.е. $z_{сф}$ меньше $z_{сф}^*$ почти в 3 раза.

При $\rho \sim \rho_{кр}^r$ $\xi_{сф} \approx \frac{0,85 a_0^2}{(\rho/\rho_{кр} - 1)^{1/2}}$, что весьма

близко к $\xi_{сф}^*$. Таким образом, определение $\xi_{сф}$ из усредненного описания (а также и безабберационного приближения с уточненной критической мощностью) даст незначительную ошибку лишь при $\rho \sim \rho_{кр}$. С увеличением мощности $\xi_{сф}$ и $\xi_{сф}^*$ начинают сильно расходиться. Точки $\xi_{сф}$ и $\xi_{сф}^*$ можно было бы интерпретировать, соответственно, как точки локального (частичного) и абсолютного (полного) слоупывания пучка. Однако, в точке локального слоупывания мы имеем дело с сингулярностью решения, вследствие чего усредненное описание справедливо лишь до этой точки. При этом, величина $\xi_{сф}^*$ характеризует общую тенденцию поведения пучка на участке $0 < \xi < \xi_{сф}^*$. Подставляя $\xi = \xi_{сф}$ из (4.16) в выражение $\alpha_{эф}^2(\xi)$ для гауссова пучка нетрудно убедиться, что при $\rho \rightarrow \rho_{кр}$ эффективное сечение к точке $\xi_{сф}$ уменьшается на 12,5%. Заметим, что при $\rho \rightarrow \rho_{кр}$ эффективное уширение пучка в линейной среде на расстояниях $\xi \sim \xi_{сф}$ составляет величину порядка $\frac{1}{8} \frac{\rho_{кр}}{\rho} \ll 1$, так что нелинейная фокусировка лишь незначительно уменьшает пучок по сравнению с его шириной в линейной среде. Заметим, что в силу инвариантности уравнения (4.1) относительно преобразования фокусировки [11] этот вывод касается и сфокусированных пучков: к точкам локального слоупывания эффективная ширина пучка меняется мало по сравнению с линейной средой.

Заключение

Возможности усредненного описания не ограничиваются рассмотренными здесь случаями. В приближении квазиоптики полиномиальное представление моментов интенсивности имеет место и для импульсов в диспергирующих средах. Из нелинейных задач следует указать на описание взаимодействия пучков с различной поляризацией поля, а также описание полей в статистически неоднородных средах с кубической нелинейностью. Последняя задача будет рассмотрена в отдельной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Дэвисон, Теория переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1960.
2. Л.М.Романова, Изв.АН СССР, сер.Физика атом. и океана, 4, № 3 (1968).
3. Н.И.Ахизер, Классическая проблема моментов, М., Физматгиз, 1961.
4. З.И.Фейзулин, Ю.А.Кравцов, Изв.вузов-Радиофизика 10, № 1, 68 (1967).
5. Л.С.Долин, Изв. вузов-Радиофизика, 11, 840 (1968)
6. Р.Б.Ваганов, Радиотехника и электроника, 15, 2016 (1970).
7. В.И.Татарский, ЖЭТФ 56, 2106 (1969).
8. А.Е.Каплан, Письма ЖЭТФ, 9, 69 (1969).
М.С.Бродия, А.М.Камуз, Письма ЖЭТФ, 9, 577 (1969).
9. R. Chiao, E. Garmire, C. Townes, Phys. Rev. Lett. 13, 479 (1964); Phys. Rev. Lett. 14, 1056 (1965).
10. В.Н.Гольдберг, В.И.Таланов, Р.Э.Эрм, Изв.вузов Радиофизика 10, 74 (1967).
11. В.И.Таланов, Письма ЖЭТФ, 11, 303 (1970).
12. С.А.Ахманов, А.П.Сухоруков, Р.В.Хохлов, УФН 93, 19 (1967).
13. Воробьев, Изв. вузов, Радиофизика (в печати).
14. В.Е.Захаров, Аннотации докладов, представленных на У Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике (Кишинев, 10-15 ноября 1970 г.) Изд. МГУ, 1970.