

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Преприат № 12

Л.А.Островский, В.Е.Фридман

О ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ МОШНОГО
АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

г.Горький,
1971 г.

А н н о т а ц и я

Рассматривается звуковое поле в волновой зоне произвольного излучателя с учетом нелинейных искажений. Показано, что эффекты нелинейного затухания приводят к "изотропизации" углового распределения излучения.

1. Как известно, поле произвольного акустического излучателя в дальней зоне соответствует квазисферической волне с фиксированным угловым распределением интенсивности. В связи с задачами нелинейной акустики представляется существенным вопрос об угловом распределении излучения от мощного источника, для которого сказываются нелинейные искажения поля; этот вопрос и рассматривается ниже.

Отметим прежде всего то обстоятельство, что при малой нелинейности искажения волны проявляются лишь на достаточно больших расстояниях. Простые оценки, основанные на методе возмущений для гармоник поля (ср. [1]), показывают, что если характерное число Маха M звукового поля, создаваемого излучателем, мало ($M = v_a/c$, где v_a — амплитуда колебаний скорости v частиц среды в непосредственной близости от излучателя, c — скорость звука), то нелинейные искажения малы вплоть до волновой зоны. При этом, очевидно, можно выбрать такую сферу радиуса R_0 , находящуюся в дальней зоне излучателя, распределение поля на которой близко к решению линейной задачи:

$$v(R_0, t) \approx v_0 \sin \omega t \cdot F(\theta, \varphi) \quad (1)$$

где θ, φ — углы сферической системы координат. Например, для излучающей пластинки с размером D , большим длины волны λ , величина R_0 должна удовлетворять неравенству

$$\left(\frac{D}{\lambda}\right)^2 < \frac{R_0}{\lambda} < \frac{1}{M(\gamma+1)\pi} \quad (2)$$

откуда ясно ограничение, налагаемое на величину M ; если же $D \ll \lambda$, то это ограничение сводится к условию $M \ll 1$.

При дальнейшем распространении нелинейные искажения накапливаются, и в случае достаточно малой вязкости среды становятся значительными, несмотря на ослабление поля из-за сферической расходимости [1 - 3]. Для определения поля при $r > R_0$ можно воспользоваться приближенным решением, основанным на том, что распространение волны рассматривается независимо для каждой сферически расходящейся лучевой трубки [4]. Соответствующее решение для данной трубки имеет, как известно, вид сферической квазипростой волны (см., например, [3,4])

$$t - \frac{r - R_0}{c} + \frac{\delta + 1}{2c^2} v r \ln \frac{r}{R_0} = f(vr), \quad (3)$$

где f - произвольная функция, определяемая из граничного условия (1)+.

Деформация волны (3) ведет к образованию разрыва-ударной волны. Координата возникновения разрыва $r = r_*$ и соответствующее значение скорости $v = v_*$, как обычно, находятся из условий $\partial t / \partial v = 0$; $\partial^2 t / \partial v^2 = 0$, которые для волны (3) дают

$$\frac{\delta + 1}{2c^2} \ln \frac{r_*}{R_0} = \frac{df}{d(vr)} \Big|_{v=v_*}; \quad \frac{d^2 f}{d(vr)^2} \Big|_{v=v_*} = 0 \quad (4)$$

+ Здесь для определенности рассматривается поведение скорости частиц в волне. Ясно, что в данном приближении остальные величины изменяются аналогично. Так, для возмущения давления имеем $p' \approx c \rho v$

Если амплитуда ударной волны достаточно мала, то процесс при $r > r_*$ может описываться уравнением (3), дополненным граничными условиями на скачке. В результате можно найти закон движения ударной волны и зависимость ее амплитуды от расстояния. Для знакопеременного поля, когда скачок разделяет два равных по величине и противоположных по знаку значения $v = \pm v_s$, скорость скачка равна c , и для его амплитуды имеем

$$\frac{\sigma + 1}{2c^2} v_s r \ln \frac{r}{R_0} = f(v_s r) \quad (5)$$

Воспользуемся теперь граничным условием (1); подставляя его в (3), получим

$$f(vr) = \frac{1}{\omega} \arcsin \left[\frac{vr}{v_0 R_0} F^{-1}(\theta, \psi) \right] \quad (6)$$

Угловое распределение входит в (6) как параметр данной трубки, характеризуемой углами θ , ψ .

2. Из (4), (6) следует, что разрыв образуется при $v=0$, а координата его возникновения r_* равна

$$r_*(\theta, \psi) = R_0 \exp \left[\frac{R_*}{R_0} F^{-1}(\theta, \psi) \right] \quad (7)$$

Здесь $R_* = 2c^2 / (\sigma + 1) v_0 \omega_0$ — расстояние, на котором образуется разрыв в плоской волне с той же амплитудой v_0 .

Естественно, что r_* минимально в направлении максимума диаграммы направленности источника. Обратная зависимость $F^{-1}(\theta_*, \psi_*) = \frac{R_0}{R_*} \ln r/R_0$ определяет телесный угол, внутри которого уже существует ударная волна на данном расстоянии r .

Далее найдем угловую зависимость амплитуды скачка, развивающегося из синусоидальной волны. Для этого воспользуемся выражением (5), откуда с учетом (6) получим трансцендентное уравнение

$$\sin\left(D_S \frac{R_0}{R_x} \ln \frac{r}{R_0}\right) = D_S F^{-1}(\theta, \psi) \quad (8)$$

Здесь $D_S(\theta, \psi) = v_s r / v_0 R_0$ — искомая амплитуда скорости сразу за скачком, нормированная на расходимость. Для каждого направления из (8) можно, в частности, найти расстояние $r_p > r_*$, на котором скачок достигает максимума, т.е. $D_S F^{-1} = 1$. Это расстояние равно

$$r_p(\theta, \psi) = R_0 \exp\left[\frac{1}{2} \frac{R_*}{R_0} F^{-1}(\theta, \psi)\right] \quad (9)$$

В данном направлении $D_S(r)$ растет при $r < r_p$ и падает при $r > r_p$. Ясно, что максимум давления в волне при $r < r_p$ совпадает с амплитудой квазипростой волны (1.3), а при $r > r_p$ определяется величиной скачка $p'_s = c p_0 v'_s$.

Рассмотрим подробнее поведение волны на больших расстояниях. Если ударная волна затухла настолько, что $\Delta F^{-1} \ll 1$, то из (8) получается явное выражение для \mathcal{D}_S :

$$\mathcal{D}_S(r, \theta, \varphi) \approx \mathcal{I} \frac{R_*}{R_0} \left(\ln \frac{r}{R_0} \right)^{-1} \quad (10)$$

Существенно, что $\mathcal{D}_S(r, \theta, \varphi)$ в (10) не зависит от направления. Следовательно, диаграмма направленности произвольного излучателя становится изотропной всюду, где справедливо (10). Лишь для углов, близких к нулям диаграммы излучателя, точнее при $F \ll R_*/R_0, \ln r/R_0$ амплитуда ударной волны резко падает. Такая "изотропизация" связана с более быстрым развитием и диссипацией ударных волн в направлении максимума диаграммы направленности.

На рис. 1. показано угловое распределение амплитуды ударной волны \mathcal{D}_S для дипольного излучения ($F(\theta, \varphi) = \cos \theta$) при $R_* = 2R_0$. Все кривые выходят из начала координат под углом θ_S и при $\theta = \theta_p$ касаются исходной диаграммы ($\cos \theta$). Максимальное значение нормированной скорости частиц в волне, очевидно, равно единице при $r < r_p$ и \mathcal{D}_S при $r > r_p$. Заметная "изотропизация" начинает проявляться после того, как r превышает значение r_p для существенной части диаграммы; качественно это утверждение справедливо и для произвольного излучателя.

Отметим, что профиль волны на больших расстояниях близок к треугольному и не изменяется, поэтому угловое распределение каждой гармонической ком-

полюсы в волне совпадают с (10). Наконец, при еще больших r волна снова близка к синусоидальной, поскольку из-за вязкости все высшие гармоники затухают быстрее основной [3]. Ясно, что при этом изотропия основной части диаграммы направленности не нарушается.

Оценим еще степень диссипации энергии излучения на различных расстояниях. Энергетической характеристикой волны может служить функция

$$e(r, \theta, \varphi) = \frac{r^2 \int_0^T v^2(r, t, \theta, \varphi) dt}{R_0^2 \int_0^T v^2(R_0, t, \theta, \varphi) dt} \quad (11)$$

Очевидно, $e d\theta$ дает энергию, проходящую за период волны в угле $d\theta$ на расстоянии r , отнесенную к той же величине при максимуме диаграммы направленности на уровне $r = R_0$; очевидно, что $e = F^2(\theta, \varphi)$ при всех $r < r_*$.

Чтобы вычислить интеграл в (11), учтем, что, согласно (3), $v r$ является обратной к ξ неявной функцией аргумента, ξ , где ξ - левая часть (3). Как показано в работе [5], для периодических функций интегрирование по t в (11) можно заменить интегрированием по ξ . Однако при наличии разрыва пределы интегрирования по ξ не постоянны, а соответствуют положениям соседних разрывов, т.е. необходимо учитывать изменение масштаба координаты ξ по сравнению с t . В результате вычислений получим энергетическую диаграмму направленности

ти излучателя при $r > r_*$

$$e(r, \theta, \varphi) = F^2 \left[n \mp \left(\frac{1}{\pi} \arcsin D_S F^{-1} - D_S F^{-1} \sqrt{1 - D_S F^{-1}} \right) \right] + \quad (12)$$

$$+ \frac{(r+1)\omega_0 \nu_0}{3c^2} R_0 D_S^3 \ln r/R_0$$

Здесь расстояниям $r < r_p$ соответствует $n=1$ и знак $-$, а для $r > r_p$ — $n=0$ и знак $+$; значение $D_S(r, \theta, \varphi)$ определяется из (8). На больших расстояниях, когда $DF \ll 1$, получаем

$$e \approx 2\pi^2 \frac{R_* / R_0^2}{(\ln r/R_0)^2} \quad (13)$$

Следовательно, угловое распределение энергии знакопеременной волны также становится изотропным, что впрочем, сразу следует из неизменности ее формы при $r \rightarrow \infty$ в данном приближении.

Сделаем еще замечание относительно справедливости полученных формул. При выборе R_0 имеется произвол в рамках неравенства типа (2); при изменении R_0 следует изменять и ν_0 в (1) согласно условию $\nu_0 R_0 = \text{const}$. Тогда отношение R_*/R_0 не зависит от R_0 , а r_* и r_p пропорциональны R_0 ; более точное определение этих величин требует конкретизации излучающей системы. Существенно, однако, что в выражениях (8), (10), (13) для амплитуды

и энергии волны имеется (при $R_*/R_0 = \text{const}$) лишь логарифмическая зависимость от R_0 , которая при больших Γ практически несущественна. В этом смысле полученные здесь результаты действительно справедливы для произвольного излучателя.

3. В ряде случаев представляет интерес задача об излучении немонахроматического поля. Ясно, что из-за неприменимости принципа суперпозиции эта задача требует, вообще говоря, специального анализа в каждом случае. Для иллюстрации рассмотрим здесь излучение одиночного видеоимпульса, когда граничное возмущение имеет вид (1) для $0 \leq t \leq T = \pi/\omega$ и равно нулю вне этого интервала. Разумеется, соответствующий излучатель должен быть весьма широкополосным, только тогда форма импульса может считаться не зависящей от направления в значительном интервале углов θ, ψ ; однако этот простой пример, по-видимому, отражает особенности некоторых реальных процессов.

Весь процесс до образования разрыва протекает здесь так же, как в соответствующем полупериоде синусоиды, рассмотренной выше. Однако разрыв теперь не симметричен и распространяется со скоростью $c - \frac{\Gamma+1}{4} v$, т.е. импульс растягивается. Для его амплитуды вместо (5) имеем уравнение

$$\frac{\Gamma+1}{2} \ln \frac{r}{R_0} = \frac{2c}{v^2 r^2} \int_0^{v r} \frac{df}{dz} dz, \quad (14)$$

где $f(r)$ снова определяется из (8). Производя интегрирование, получим, в отличие от (9), явное выражение для $D_s = v_s r / v_0 R_0$.

$$D_s(r, \theta, \varphi) = 2 \frac{R_*}{R_0} \frac{\sqrt{\frac{R_0}{R_*} \ln \frac{r}{R_0} F(\theta, \varphi) - 1}}{\ln r / R_0} \quad (15)$$

Поверхность, на которой скачок достигает максимального значения, имеет вид $r_p(\theta, \varphi) = R_0 \exp\left[2 \frac{R_*}{R_0} F^{-1}(\theta, \varphi)\right]$, т.е. располагается дальше, чем аналогичная поверхность (10) для знакопеременной волны. Это означает, что диссипация волны в данном случае происходит медленнее.

На больших расстояниях выражение (15) снова упрощается для всех направлений, исключая узкие области углов вблизи нулей диаграммы направленности излучателя

$$D_s(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) \approx 2 \sqrt{\frac{R_* F(\theta, \varphi)}{R_0 \ln r / R_0}} \quad (16)$$

Отсюда видно, что угловое распределение амплитуды разрыва вновь стремится к постоянному, но последнее, в отличие от предыдущего случая, не изотропно, хотя и сглажено по сравнению с исходной диаграммой ($\sqrt{F(\theta, \varphi)}$ вместо $F(\theta, \varphi)$).

Изменение энергии волны и в этом случае описывается выражением (11), где теперь $T = T(r)$ — для-

тельность импульса. Для больших расстояний поступим

$$e \approx \frac{16}{3} \sqrt{\frac{R_* F^3(\theta, \varphi)}{R_0 \ln r/R_0}} \quad (17)$$

Такое более медленное, чем в (13), спадание связано с увеличением длительности импульса после образования разрыва.

Специфическим для данной задачи является вопрос о форме ударного фронта. В предыдущем случае этот фронт остается сферическим, поскольку скорость его в данном приближении равна c . Здесь же скорость движения скачка зависит от его амплитуды, и фронт искривляется. Рассматривая уравнение характеристики (3) вместе с уравнением траектории скачка $dt/dr = (c + \frac{r+1}{4} v)^{-1}$, можно получить закон движения скачка в виде:

$$t(r, \theta, \varphi) = \frac{r-r_*}{c} - \frac{2}{\omega} \left\{ \sqrt{\frac{R_0}{R_*} \ln \frac{r}{R_0} \cdot F - 1} - \arctg \sqrt{\frac{R_0}{R_*} \ln \frac{r}{R_0} F - 1} + m\pi \right\} \quad m=0,1,2\dots \quad (18)$$

Для больших расстояний отсюда имеем

$$t = \frac{r}{c} - \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{R_0}{R_*} \ln \frac{r}{R_0} F(\theta, \varphi)} \quad (19)$$

Как и следовало ожидать, ударный фронт вытягивается в направлении максимума диаграммы направленности.

Нетрудно также найти выражение для длительности τ и длины Λ импульса, учитывая, что (18) дает положение его фронта, конец же импульса движется со скоростью c . В частности, для больших r получим

$$\tau \approx \frac{\Lambda}{c} \approx (r+1) \frac{v_0}{c^2} \sqrt{R_* R_0 F(\theta, \psi) \ln \frac{r}{R_0}} \quad (20)$$

Следовательно, импульс имеет наибольшую длительность в направлении максимума диаграммы. При этом профиль импульса, как известно, становится треугольным.

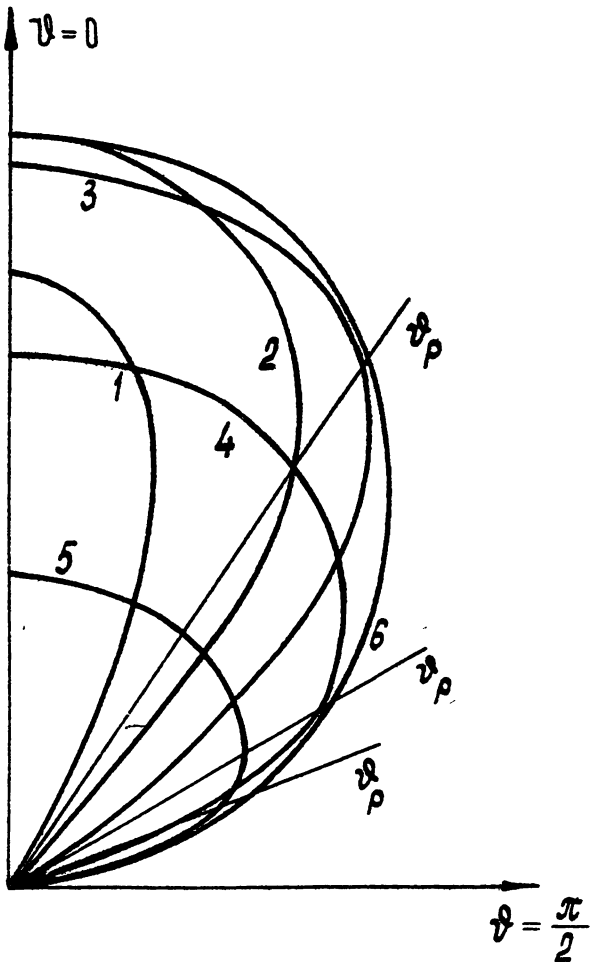
Рассмотренные здесь эффекты, связанные с изменением диаграммы направленности, по-видимому, должны учитываться при расчете поля мощных ультразвуковых излучателей в воде и воздухе. Так, согласно грубым оценкам, для плоского излучателя размером 1-2 см, создающего в воде акустическое поле мощностью порядка 50 Вт/см² на частоте около 1,5 мГц, изотропизация диаграммы проявляется уже на расстояниях, меньших 10-20 м.

Интересно отметить, в частности, то обстоятельство, что диаграммы направленности таких систем на излучение (мощный сигнал) и на прием (слабый сигнал) различны.

Авторы весьма признательны А.В.Гапонову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.К.Зарембо, В.А.Красильников, Введение в нелинейную акустику, "Наука", М., 1966.
2. Л.Д.Ландау, Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения, ПММ, 1945, 9, 286 .
3. К.А.Наугольных, С.И.Солуяг, Р.В.Хохлов, Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Акуст. ж., 1963, 9, 54.
4. Л.А.Островский, К теории волн в нестационарных сжимаемых средах, ПММ, 1963, 27, 824.
5. Л.А.Островский, Величины второго порядка в бегущей звуковой волне, Акуст. ж., 1968, 14, 82.



$$R_* = 2R_0$$

$$1. r = 5R_*$$

$$2. r = 10R_*$$

$$3. r = 10^2 R_*$$

$$4. r = 5 \cdot 10^2 R_*$$

$$5. r = 10^4 R_*$$

$$D = \cos \theta$$