Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 13

В.Н.Гольдберг

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ 1

г.Горький,
1971 г.

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ I.

В.Н.Гольдберг

Введение и постановка задачи

В настоящей работе исследуется существование и единственность решения смешанной задачи

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial x} = P(x,t,p,q), \qquad (0.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} - N \frac{\partial q}{\partial x} = Q(x,t,p,q), \qquad (0.2)$$

$$p(x,0) = p_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x), \qquad (0.3)$$

$$A(t, p(0,t), q(0,t)) = 0, \qquad (0.4)$$

$$B(t, p(1,t), q(1,t)) = 0, \qquad (0.5)$$

где

$$p = (p^i), \ P = (P^i), \ A = (A^i), \ q = (q_j), \ Q = (Q_j), \ B = (B_j),$$

$$1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m, \ N = \mathrm{diag}[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m], \ \Lambda = \mathrm{diag}[\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1 \text{ раз}}; \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2 \text{ раз}}; \dots; \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{k_r \text{ раз}}], \ n = \sum_{s=1}^{r} k_s,$$

а постоянные

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0, \quad \nu_1 \ge \nu_2 \ge \dots \ge \nu_m > 0.$$

Задача (0.I)-(0.5) рассматривается в прямоугольнике $\Pi_T = \{0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le T < \infty\}$, все величины в (0.I)-(0.5) и далее в тексте вещественные.

В случае граничных условий, заданных в виде, разрешенном относительно $p(0,t)$ и $q(1,t)$, теоремы единственности и продолжаемости (по t) решения задачи (0.I)-(0.5) содержатся в [I-4].

Задача (0.I)-(0.5) при условии

$$|A_p(0, p_0(0), q_0(0))| \ne 0, \quad |B_q(0, p_0(1), q_0(1))| \ne 0$$

рассматривалась в малом в [2].

В данной работе задача (0.I)-(0.5) изучается в том случае, когда одно из неравенств

$$|A_p(t, p(0,t), q(0,t))| \neq 0, \quad |B_q(t, p(1,t), q(1,t))| \neq 0$$

обращается в равенство при продолжении решения. Ради простоты ниже предполагается выполненным неравенство $\overset{\circ}{T} < (\lambda_1 + \nu_1)^{-1}$, что исключает взаимное влияние граничных условий на свойства решения в $\bar{\Pi}_{\dagger}$. Поэтому мы ограничимся исследованием поставленной задачи в области $\bar{G}_{\dagger} = \{(x,t): 0 \leq t \leq \overset{\circ}{T},\ 0 \leq x \leq -\nu_1 t + 1\}$ +).

Работа состоит из шести параграфов; §§ I,2,3 составляют данную статью, §§ 4,5,6 – статью [10].

Остановимся на содержании работы. В § I устанавливается следующая теорема I.I существования и единственности классического (класса C_1) решения задачи (0.I)-(0.5): либо а) в $\bar{G}_{\dagger}$ существует единственное решение, и $|A_p(t, p(0,t), q(0,t))| > 0$ на $[0, \overset{\circ}{T}]$; либо б) найдется такое $0 < T^* \leq \overset{\circ}{T}$, что решение существует и единственно при $t < T^*$, $|A_p(t, p(0,t), q(0,t))| > 0$ на $[0, T^*)$, и имеет место по крайней мере одно из следующих утверждений: $1_б)$ " решения уходит на бесконечность" при $t \to T^*$; $2_б)$ $\inf\limits_{0 \leq t < T^*} |A_p(t, p(0,t), q(0,t))| = 0$.

Простые примеры показывают, что реализуются все логические возможности, указанные в теореме I.I. Теорема I.I доказана при следующих предположениях: вектор-функции P, Q, A, p_0, q_0 однократно непрерывно дифференцируемы в области $\vartheta = \bar{\Pi}_{\dagger} \times R_{n+m}$ и

+) Полученные в работе результаты нетрудно распространить на задачу (0.I)-(0.5), рассматриваемую в $\bar{\Pi}_{\dagger}$.

$$A(0, p_0(0), q_0(0)) = 0, \tag{0.6}$$

$$A_t(0, p_0(0), q_0(0)) + A_p(0, p_0(0), q_0(0))\left[-\Lambda p_0'(0) + P(0, 0, p_0(0), q_0(0))\right] +$$
$$+ A_q(0, p_0(0), q_0(0))\left[N q_0'(0) + Q(0, 0, p_0(0), q_0(0))\right] = 0, \tag{0.7}$$

$$|A_p(0, p_0(0), q_0(0))| \neq 0. \tag{0.8}$$

В §§ 2-6 P, Q, A дважды непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{E}$, удовлетворяют условиям (0.6)-(0.8) и ряду дополнительных ограничений, которые здесь не приводятся.

В §§ 2,3 проводится изучение однозначной разрешимости задачи (0.I)-(0.4) в том случае, когда имеет место утверждение б) теоремы I,I, $T^* < \mathring{T}$, но "решение не уходит на бесконечность" при $t \to T^*$. В этом случае при некоторых дополнительных предположениях решение задачи (0.I)-(0.4) оставаясь непрерывным в $\overline{G}_{T^*}$, оказывается, вообще говоря, непродолжаемым даже в классе непрерывных обобщенных решений, и повышение гладкости и согласованности данных задачи не приводит к существованию непрерывных обобщенных решений при $t > T^*$. В описанной ситуации естественно обратиться к построению разрывного решения задачи при $t > T^*$.

В § 2 для граничных условий

$$p^s(0,t) - g^s(t, p^l(0,t), q(0,t)) = 0, \quad 1 \le s \le n, \quad s \ne l \tag{0.9}$$

$$A^l(t, p(0,t), q(0,t)) = 0, \tag{0.I0}$$

где $1 \le l \le n$ некоторое фиксированное число, вводится определение разрывного решения ($p.p.$) задачи (0.I)-(0.4) в $\overline{G}_T$, $T^* < T \le \mathring{T}$, и устанавливается теорема I.2 единственности и продолжаемости $p.p.$ при $t > T^*$, аналогичная теореме I.I.

В § 3 при некоторых дополнительных ограничениях устанавливается теорема I.3 о непродолжаемости в $\overline{G}_T$ при $T > T^*$ непрерывного обобщенного решения (н.о.р.) смешанных задач, изучавшихся в § 2.

В §§ 4,5,6 исследуется смешанная задача (0.I)-(0.3), (0.9), (0.II)

$$\mu_\ell L(p,q) + A^\ell(t, p(0,t), q(0,t)) = 0, \qquad (0.II)$$

где μ_ℓ - малый параметр, а оператор

$$L(p,q) \equiv \left[a_\ell^{(1)} \frac{\partial p^\ell}{\partial t} + a_\ell^{(2)} \frac{\partial p^\ell}{\partial x} + \sum_{j=1}^{m} \left(b_j^{(1)} \frac{\partial q_j}{\partial t} + b_j^{(2)} \frac{\partial q_j}{\partial x} \right) \right]_{x=0}$$

(все величины $a_\ell^{(s)}$, $b_j^{(s)}$ - постоянные)

Условимся называть задачу (0.I)-(0.3), (0.9), (0.I0) задачей $(\mu = 0)$, а (0.I)-(0.3), (0.9), (0.II) - задачей $(\mu \neq 0)$. В предположении, что ρ ρ задачи ($\mu = 0$) существует в $\bar{G}_{\overset{\circ}{T}}$, в §§ 4,5,6 устанавливается теорема существования и единственности в $\bar{G}_{\overset{\circ}{T}}$ гладкого решения задачи $(\mu \neq 0)$ при достаточно малых $\mu_\ell \neq 0$, а также теорема о сходимости решения вместе с первыми производными к ρ. ρ при $\mu_\ell \to 0$.

В § 4 доказывается теорема I.4 о существовании, единственности и равномерной сходимости решения задачи $(\mu \neq 0)$ в G_{T_0} при любом $0 < T_0 < T^*$. Соответствующие результаты о сходимости первых производных содержатся в теореме 2.4.

В § 5 устанавливается теорема I.5 об однозначной разрешимости задачи $(\mu \neq 0)$ в области $\bar{G}_{T(\mu_\ell)}$, где $T^* < T(\mu_\ell) < \overset{\circ}{T}$ и $T(\mu_\ell) \to T^*$ при $\mu_\ell \to 0$.

В § 6 доказываются теоремы I.6 и 3.6 об однозначной разрешимости задачи $(\mu \neq 0)$ в $\bar{G}_{\overset{\circ}{T}}$ и о равномерной сходимости решения вместе с первыми производными в каждой односвязной замкнутой области, не имеющей общих точек ни с одной характеристикой $x = \lambda_i t$, $x = \lambda_i (t - T^*)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Настоящая работа является естественным развитием работ [8,9], где проведено построение разрывных решений нелинейных смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка на плоскости. Основные результаты данной работы для случая $r = 1$, $k_1 = 1$ анонсированы в [5].

Введем некоторые обозначения, используемые в §§ 1–6.

1. Пусть матрица $\mathfrak{A} = \|\alpha_{u,v}\|$ размера $u_0 \times v_0$ и вектор-функции $\varphi = (\varphi^j)$, $y = (y^s)$, $\eta = (\eta^j)$, $1 \le s \le n$, $1 \le j \le m$ непрерывны на множестве $D \in \overline{G}_f$, а вектор-функция $f = (f^s)$ на D кусочно-непрерывна+). Положим

$$|\mathfrak{A}(x,t)| = \sum_{u=1}^{u_0} \sum_{v=1}^{v_0} |\alpha_{u,v}(x,t)|$$

$$\|\mathfrak{A}\|_D = \sup_D |\mathfrak{A}| = \sum_{u=1}^{u_0} \sum_{v=1}^{v_0} \sup_D |\alpha_{u,v}|$$

$$\|\mathfrak{A}\|_D = \max_D |\mathfrak{A}| = \sum_{u=1}^{u_0} \sum_{v=1}^{v_0} \max_D |\alpha_{u,v}| \quad \text{если } D \text{ замкнуто.}$$

Пусть $C[f,\varphi]_{(x,t)} = \|C_\ell(x,t,f(x,t),\varphi(x,t))\|$ матрица размера $\ell_0 \times 1$. Введем матрицы $f_i = \|f_{i\varkappa}\|$, $1 \le i \le r$, размера $k_i \times 1$ с элементами $f_{i\varkappa} = f^{\sigma_{i-1}+\varkappa}$, $1 \le \varkappa \le k_i$, где $\sigma_0 = 0$, $\sigma_i = \sum_{\rho=1}^{i} k_\rho$ и матрицы

$$\Delta C(x,t,f,\varphi) = C(x,t,f(x,t+0),\varphi(x,t)) - C(x,t,f(x,t-0),\varphi(x,t))$$

$$C_f[f,\varphi]_{(x,t)} = \frac{\partial C[f,\varphi]}{\partial f}_{(x,t)} = \left\| \frac{\partial C_\ell(x,t,f(x,t),\varphi(x,t))}{\partial f^s} \right\| \quad \text{размера } \ell_0 \times n,$$

$$C_{f_i}[f,\varphi]_{(x,t)} = \frac{\partial C[f,\varphi]}{\partial f_i}_{(x,t)} = \left\| \frac{\partial C_\ell(x,t,f(x,t),\varphi(x,t))}{\partial f_{i\varkappa}} \right\| \quad \text{размера } \ell_0 \times k_i,$$

$$C_\varphi[f,\varphi]_{(x,t)} = \frac{\partial C[f,\varphi]}{\partial \varphi}_{(x,t)} = \left\| \frac{\partial C_\ell(x,t,f(x,t),\varphi(x,t))}{\partial \varphi^j} \right\| \quad \text{размера } \ell_0 \times m$$

+) Произвольная матрица (вектор-функции мы рассматриваем как матрицы – столбцы) называется непрерывной (кусочно-непрерывной) на D, если все ее элементы непрерывны (кусочно-непрерывны) на D.

Понимая $\frac{\partial C[\xi,\eta]}{\partial t}\Big|_{(x,t)}$ как частную производную матрицы $C[\xi,\eta]_{(x,t)}$ по t, не входящему в ξ и η, положим

$$\mathcal{L}[\xi,\eta,y,q]_{(x,t)} = C_t[\xi,\eta]_{(x,t)} + C_\xi[\xi,\eta]_{(x,t)}\, y(x,t) +$$

$$+ C_\eta[\xi,\eta]_{(x,t)}\, q(x,t).$$

2. Пусть $(x,t)\in \bar{G}_{\mathring{T}}$. Введем следующие обозначения: $\varkappa_i^-(\tau,x,t) = \lambda_i\tau + x - \lambda_i t$, $\varkappa_j^+(\tau,x,t) = -\nu_j\tau + x + \nu_j t$; $(\xi_i^-(x,t),\ \theta_i^-(x,t))$ – точка пересечения границы области $\bar{G}_{\mathring{T}}$ с характеристикой $\xi = \varkappa_i^-(\tau,x,t)$ при продолжении ее для $\tau = t$; $(\xi^{\pm j,x,t}_{\pm s,\bar{x},\bar{t}},\ \tau^{\pm j,x,t}_{\pm s,\bar{x},\bar{t}})$ – точка пересечения характеристик $\xi = \varkappa_s^\pm(\tau,\bar{x},\bar{t})$ и $\xi = \varkappa_j^\pm(\tau,x,t)$; $\tau_i(x) = \lambda_i^{-1}x + T^*$.

3. Положим $\varkappa^-_{r+1}(t,0,\tau) = 0$ при $0 < \tau < t \le \mathring{T}$. Для $0 < T \le \mathring{T}$, $0 \le \tau_1 < \tau_2 < T$, $1 \le i,\ j \le r$ и $0 \le \tau < T$, $1 \le k < l \le r+1$ обозначим

$$G_T = \{(x,t):\ 0 < t < T,\ \ 0 < x < \varkappa_1^+(t,1,0)\},$$

$$G_T(i_{\tau_1}, j_{\tau_2}) = \{(x,t):\ \tau_1 < t < \tau_2,\ 0 < x < \varkappa_i^-(t,0,\tau_1);\ \tau_2 < t < T,$$

$$\varkappa_j^-(t,0,\tau_2) < x < \varkappa_i^-(t,0,\tau_1)\}$$ (ниже τ_1, τ_2, T, i, j всегда такие, что область $G_T(i_{\tau_1}, j_{\tau_2})$ – четырехугольник),

$$G_T(k_\tau, l_\tau) = \{(x,t):\ \tau < t < T,\ \varkappa_l^-(t,0,\tau) < x < \varkappa_k^-(t,0,\tau)\},$$

$$G_T(k_\tau) = \{(x,t):\ \tau < t < T,\ 0 \le x < \varkappa_k^-(t,0,\tau)\}.$$

Присоединение к введенным областям точек соответствующего отрезка прямой $t = T$ условимся отмечать чертой над буквой G, а присоединение точек соответствующего отрезка характеристики – заменой круглой скобки на квадратную. Например:

$$\bar{G}_T(i_{\tau_1}, j_{\tau_2}] = \{(x,t): \tau_1 < t < \tau_2,\ 0 < x < \varkappa_i^-(t,0,\tau_1);$$
$$\tau_2 < t < T,\ \varkappa_j^-(t,0,\tau_2) < x < \varkappa_i^-(t,0,\tau_1)\}.$$

Ниже фигурируют также области $\bar{G}'_T = \bar{G}_T \setminus (0,T)$, $\bar{G}'_T[K_\tau] = \bar{G}_T[K_\tau] \setminus (0,T)$, $D_T(K_\tau) = G_T \setminus G_T[K_\tau]$ и $\bar{D}_T(K_\tau)$, $\bar{D}_T[K_\tau]$, $D_T[K_\tau]$ – (определение последних очевидно).

4. C, C_j ($j = 1,2,\dots$) – различные положительные постоянные, зависящие только от данных задачи (0.I)-(0.4); $C(M)$, $C_j(M)$ – различные положительные постоянные, зависящие только от данных задачи (0.I)-(0.4) и от постоянной $0 < M < \infty$.

§ I. Теорема единственности и продолжаемости классического решения задачи (0.I)-(0.4)

Определение I.I. Вектор-функция $(p,q) \in C(\bar{G}_T)$, $0 < T < \dagger$, удовлетворяющая (0.3) при $x \in [0,1]$ и (0.4) при $t \in [0,T]$, называется н.о.р. задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_T$, если для $(x,t) \in \bar{G}_T$

$$p_i(x,t) = p_i(\xi_i^-(x,t), \theta_i^-(x,t)) + \int_{\theta_i^-(x,t)}^{t} P_i[p,q]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{I.I}$$

$$q_j(x,t) = q_{0j}(x+\nu_j t) + \int_0^t Q_j[p,q]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{2.I}$$

Лемма I.I. Пусть $P, Q, A \in C_2(\vartheta)$, $(\hat{p},\hat{q})$ – н.о.р. Задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_T$, $0 < T < \dagger$, и $|A_p(t, \hat{p}(0,t), \hat{q}(0,t))| > 0$ на $[0,T]$.
Тогда $(\hat{p},\hat{q}) \in C_1(\bar{G}_T)$ и $(\hat{p},\hat{q})$ – классическое решение задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_T$.

Доказательство.

По условиям леммы I.I найдутся такие $0 < \sigma_1, \sigma_2 < 1$, что для любой точки $(t,q) \in \mathcal{M}_{\sigma_1} = \{(t,q): 0 \le t \le T, \max_j |q_j - \hat{q}_j(0,t)| \le \sigma_1\}$ система $A(t,p,q) = 0$ имеет решение $p = f(t,q) \in$

$C_2(\mathfrak{M}_{\sigma_1})$, $\overset{\circ}{p}(0,t) = f(t, \overset{\circ}{q}(0,t))$ и оно единственно в шаре $\max_i |p_i - \overset{\circ}{p}_i(0,t)| \leq \sigma_2$. Предположим, что в $\bar{G}_T$ существуют $\overset{\circ}{p}_t, \overset{\circ}{q}_t \in C(\bar{G}_T)$. Переходя в (I.I),(2.I) к интегрированию по $\xi = \varkappa_i^-(\tau, x, t)$, $\xi = \varkappa_j^+(\tau, x, t)$, дифференцируя полученные уравнения по t и возвращаясь в интегральных членах к переменному τ, получим

$$\frac{\partial \overset{\circ}{q}_j(x,t)}{\partial t} = \left[\nu_j q'_{0,j}(\xi) + Q_j(\xi, 0, p_0(\xi), q_0(\xi))\right]_{\xi = x+\nu_j t} + \int_0^t \mathcal{O}_j\left[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}, \frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial t}, \frac{\partial \overset{\circ}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)} d\tau, \quad (x,t) \in \bar{G}_T, \tag{3.I}$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(x,t)}{\partial t} = \left[-\lambda_i p'_{0,i}(\xi) + P_i(\xi, 0, p_0(\xi), q_0(\xi))\right]_{\xi = x-\lambda_i t} + \int_0^t \mathcal{P}_i\left[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}, \frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial t}, \frac{\partial \overset{\circ}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau, \quad (x,t) \in \bar{D}_T[i_0], \tag{4.I}$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(x,t)}{\partial t} = \left\{\frac{\partial f_i(\zeta, \overset{\circ}{q}(0,\zeta))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(\zeta, \overset{\circ}{q}(0,\zeta))}{\partial q_j}\left[\nu_j q'_{0,j}(\nu_j \zeta) + Q_j(\nu_j\zeta, 0, p_0(\nu_j\zeta), q_0(\nu_j\zeta)) + \int_0^{\zeta} \mathcal{O}_j\left[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}, \frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial t}, \frac{\partial \overset{\circ}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa_j^+(\tau,0,\zeta),\tau)} d\tau\right]\right\}_{\zeta = \theta_i^-(x,t)} + \int_{\theta_i^-(x,t)}^{t} \mathcal{P}_i\left[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}, \frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial t}, \frac{\partial \overset{\circ}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau, \quad (x,t) \in \bar{G}_T[i_0]. \tag{5.I}$$

Полагая в (3.I)-(5.I) $\overset{\circ}{p}_t = u$, $\overset{\circ}{q}_t = v$, запишем (3.I)-(5.I) в виде

$$(u, v) = \Omega(u, v). \tag{6.I}$$

Заметим, что если $(u, v) \in C(\bar{G}_\theta)$, $0 < \theta \leq T$, то $(\bar{u}, \bar{v}) = \Omega(u,v) \in C(\bar{G}_\theta)$. Действительно, $\bar{v} \in C(\bar{G}_\theta)$, $\bar{u}_i \in C(\bar{G}_\theta[i_0])$, $\bar{u}_i \in C(\bar{D}_\theta[i_0])$, и $\bar{u}_i \in C(\bar{G}_\theta)$, если

$$\Delta_i = \frac{\partial f_i(0,q_0(0))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(0,q_0(0))}{\partial q_j} \left[\nu_j q'_{0,j}(0) + Q_j(0,0,p_0(0),q_0(0))\right] -$$
$$- \left[-\lambda_i p'_{0,i}(0) + P_i(0,0,p_0(0),q_0(0))\right] = 0. \tag{7.I}$$

Докажем (7.I) Пусть $q(t) = (q_1(t),\dots,q_m(t)) \in C_1[0,T]$, $\max_j |q_j(t) - \overset{\circ}{q}_j(0,t)| \le \sigma_1$ при $0 \le t \le T$, и

$$q(0) = q_0(0), \quad q'(0) = Nq'_0(0) + Q(0,0,p_0(0),q_0(0)).$$

Дифференцируя по t тождество $A(t, f(t,q(t)), q(t)) \equiv 0$, полагая затем $t = 0$ и учитывая (0.7), получим $A_p(0,p_0(0),q_0(0))\Delta = 0$. Отсюда в силу (0.8) $\Delta = 0$. Легко видеть, что уравнение (6.I) имеет в $\overline{G}_T$ единственное решение $(u,v) \in C(\overline{G}_T)$ (см., например, [6], теоремы I.I, I.2 и замечание к теореме I.2). Покажем теперь, что в $\overline{G}_T$ существуют и непрерывны $\overset{\circ}{p}_t$, $\overset{\circ}{q}_t$. Положим

$$\tilde{p}(x,t) = p_0(x) + \int_0^t u(x,\eta)\,d\eta, \quad \tilde{q}(x,t) = q_0(x) + \int_0^t v(x,\eta)\,d\eta, \quad (x,t) \in \overline{G}_T \tag{8.I}$$

$$S(x,t) = |\tilde{p}(x,t) - \overset{\circ}{p}(x,t)| + |\tilde{q}(x,t) - \overset{\circ}{q}(x,t)|, \quad S(\theta) = \max_{\overline{G}_\theta} S(x,t), \quad 0 \le \theta \le T$$

$$g_j(x,t) = \tilde{q}_j(x,t) - \left\{q_{0,j}(x+\nu_j t) + \int_0^t Q_j[\tilde{p},\tilde{q}]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau\right\}, \quad (x,t) \in \overline{G}_T \tag{9.I}$$

$$r_i^-(x,t) = \tilde{p}_i(x,t) - \left\{p_{0,i}(x-\lambda_i t) + \int_0^t P_i[\tilde{p},\tilde{q}]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau\right\}, \quad (x,t) \in \overline{D}_T[i_0] \tag{10.I}$$

$$\overset{*}{q}_j(t) = q_{0,j}(\nu_j t) + \int_0^t Q_j[\tilde{p},\tilde{q}]_{(\varkappa_j^+(\tau,0,t),\tau)}\,d\tau, \quad 0 \le t \le T, \tag{11.I}$$

$$r_i^+(x,t) = \tilde{p}_i(x,t) - \Big\{f_i(\theta_i^-(x,t), \overset{*}{q}(\theta_i^-(x,t))) +$$
$$+ \int_{\theta_i^-(x,t)}^t P_i[\tilde{p},\tilde{q}]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau\Big\}, \quad (x,t) \in \overline{G}_{T'}[i_0], \tag{12.I}$$

где $0 \le T' \le T$ выбирается ниже. Вектор-функция r_i^+ определена в $\overline{G}_{T'}[i_0]$, если $\max_j |\overset{*}{q}_j(t) - \overset{\circ}{q}_j(0,t)| \le \sigma_1$ при $0 \le t \le T'$.
В силу (2.I), (11.I) имеем при $0 \le t \le T'$

$$|\overset{*}{q}_j(t) - \overset{\circ}{q}_j(0,t)| \le \int_0^t \left|Q_j[\tilde{p},\tilde{q}] - Q_j[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]\right|_{(\varkappa_j^+(\tau,0,t),\tau)}\,d\tau \le \tag{13.I}$$

$$= \int_0^t \left[|Q_j[\tilde p, \tilde q]| + |Q_j[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}]| \right]_{(\varkappa_j^+(\tau,0,t),\tau)} d\tau \le C_1 T'.$$

Положим $T' = \min\left(T, \frac{\sigma_1}{2C_1}\right)$. Вычисляя $\frac{\partial g_j}{\partial t}$ из (9.I) и пользуясь соответствующим уравнением (3.I) для v_j , получим

$$\left| \frac{\partial g_j(x,t)}{\partial t} \right| \le C \int_0^t S(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)\, d\tau \le C S(t) \ , \ (x,t) \in \bar G_{T'} . \qquad (14.I)$$

Вычисляя $\frac{\partial r_i^-}{\partial t}$ из (10.I) и пользуясь соответствующими уравнениями (4.I) для u_i , будем иметь

$$\left| \frac{\partial r_i^-(x,t)}{\partial t} \right| \le C \int_0^t S(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)\, d\tau \le C S(t), \ (x,t) \in \bar D_{T'} [i_0] . \qquad (15.I)$$

Пользуясь (12.I), (11.I), вычислим $\frac{\partial r_i^+}{\partial t}$. Учитывая (2.I) и соответствующее уравнение (5.I) для u_i , получим

$$\left| \frac{\partial r_i^+(x,t)}{\partial t} \right| \le C \left[\int_{\theta_i^-(x,t)}^t S(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^m \int_0^{\theta_i^-(x,t)} S(\varkappa_j^+(\tau,0,\theta_i^-(x,t)),\tau)\, d\tau \right] \le \qquad (16.I)$$

$$\le C S(t) \ , \ (x,t) \in \bar G_{T'} [i_0] .$$

В силу (1.I), (2.I)

$$g_j(x,t) = \tilde q_j(x,t) - \overset{\circ}{q}_j(x,t) + \int_0^t \left[Q_j[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}] - Q_j[\tilde p, \tilde q] \right]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)} d\tau \qquad (17.I)$$

$$r_i^-(x,t) = \tilde p_i(x,t) - \overset{\circ}{p}_i(x,t) + \int_0^t \left[P_i[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}] - P_i[\tilde p, \tilde q] \right]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau \qquad (18.I)$$

$$r_i^+(x,t) = \tilde p_i(x,t) - \overset{\circ}{p}_i(x,t) + f_i(\theta_i^-(x,t), \overset{\circ}{q}(0,\theta_i^-(x,t))) -$$
$$- f_i(\theta_i^-(x,t), \tilde q(\theta_i^-(x,t))) + \int_{\theta_i^-(x,t)}^t \left[P_i[\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}] - P_i[\tilde p, \tilde q] \right]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau. \qquad (19.I)$$

Так как $g_j(x,0) = 0$, $r_i^-(x,0) = 0$, то из (14.I), (17.I) и (15.I), (18.I) вытекает

$$|\tilde q(x,t) - \overset{\circ}{q}(x,t)| \le C \int_0^t S(\eta)\, d\eta \ , \ (x,t) \in \bar G_{T'} \qquad (20.I)$$

$$|\tilde{p}_i(x,t)-\overset{\circ}{p}_i(x,t)| \leq C\int_0^t S(\eta)d\eta \quad , \quad (x,t)\in \bar{D}_{T'}[i_0]. \qquad (21.I)$$

Полагая в (I9.I) $t=\lambda_i^{-1}x$ и учитывая (2I.I), будем иметь

$$|z_i^+(x,\lambda_i^{-1}x)| \leq C\int_0^{\lambda_i^{-1}x} S(\eta)d\eta. \qquad (22.I)$$

Из (I6.I), (I9.I), (22.I) следует, что

$$|\tilde{p}_i(x,t)-\overset{\circ}{p}_i(x,t)| \leq C\int_0^t S(\eta)d\eta \, , \, (x,t)\in \bar{G}_{T'}[i_0]. \qquad (23.I)$$

Суммируя (20.I), (2I.I), (23.I), получим

$$S(x,t) \leq C\int_0^t S(\eta)d\eta \quad , \, (x,t)\in \bar{G}_{T'} \, .$$

Отсюда

$$S(\theta) \leq C\int_0^\theta S(\eta)d\eta \quad , \quad 0<\theta\leq T'.$$

По лемме Гронуолла [7] $S(\theta)=0$ на $(0,T']$. Поэтому $(\tilde{p},\tilde{q})=(\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q})$ в $\bar{G}_{T'}$. Следовательно, в $\bar{G}_{T'}$ существуют $\overset{\circ}{p}_t=u$, $\overset{\circ}{q}_t=v$. Существование и непрерывность в $\bar{G}_{T'}$, $\overset{\circ}{p}_x$, $\overset{\circ}{q}_x$ вытекает теперь из (I.I), (2.I). Сопоставляя выражения $\overset{\circ}{p}_t$, $\overset{\circ}{q}_t$ и $\overset{\circ}{p}_x$, $\overset{\circ}{q}_x$ убедимся, что $(\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q})$ удовлетворяет (0.I), (0.2) в $\bar{G}_{T'}$. Если $T'=T$, то лемма I.I доказана. Пусть $T'<T$ и $\tilde{T}=\min(2T',T)$. При $0<t\leq\tilde{T}$

$$|\overset{\circ}{q}_j(t)-\overset{\circ}{q}_j(0,t)| \leq \int_{T'}^t \left[|Q_j[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]|+|Q_j[\tilde{p},\tilde{q}]|\right]_{(x_j^+(\tau,0,t),\tau)} d\tau \leq C_1T' = \sigma_1 .$$

Поэтому вектор-функция z_i^+ определена в $\bar{G}_{\tilde{T}}[i_0]$. Заменяя выше всюду T' на $\tilde{T}$, установим утверждение леммы I.I в $\bar{G}_{\tilde{T}}$. Продолжая при необходимости описанный процесс, придем к утверждению леммы I.I. Лемма I.I доказана.

Замечание. Из доказательства леммы I.I следует, что если условие (0.7) не выполняется, то при любом $1\leq i\leq z$ $\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i}{\partial x}$ существуют и непрерывны в $\bar{G}_T[i_0]$ и в $\bar{D}_T[i_0]$, $\overset{\circ}{q}_t$, $\overset{\circ}{q}_x$

существуют и непрерывны в $\bar{G}_T$ и $(\mathring{p}, \mathring{q})$ удовлетворяет системе (0.1), (0.2) в $\bar{G}_T$ ($\frac{\partial \mathring{p}_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathring{p}_i}{\partial x}$ на характеристике $\xi = \varkappa_i^-(\tau, 0, 0)$ понимаются как односторонние).

Лемма 2.1. Пусть $P, Q, A \in C_1(\vartheta)$, $(\mathring{p}, \mathring{q})$ – н.о.р. задачи (0.1)–(0.4) в $\bar{G}_T$, $0 < T \leq \mathring{T}$, и $|A_p(t, \mathring{p}(0,t), \mathring{q}(0,t))| > 0$ на $[0, T]$. Тогда $(\mathring{p}, \mathring{q}) \in C_1(\bar{G}_T)$ и $(\mathring{p}, \mathring{q})$ – классическое решение задачи (0.1)–(0.4) в $\bar{G}_T$.

Доказательство

Для доказательства леммы 2.1, очевидно, достаточно установить существование и непрерывность в $\bar{G}_T$, $\mathring{p}_t$, $\mathring{q}_t$. Для достаточно малых $h > 0$ построим функции $\tilde{P}^h_{il}$, $\tilde{Q}^h_{sj}$, $\tilde{A}^h_{il} \in C_2(\vartheta)$ такие, что при $h \to 0$

$$\|\tilde{P}^h_{il} - P_{il}\|_{C_1(\vartheta_N)} \to 0, \quad \|\tilde{Q}^h_{sj} - Q_{sj}\|_{C_1(\vartheta_N)} \to 0, \quad \|\tilde{A}^h_{il} - A_{il}\|_{C_1(\vartheta_N)} \to 0, \tag{24.1}$$

где $\vartheta_N = \{(x,t,p,q) : (x,t) \in \bar{\Pi}_{\mathring{T}}, \quad |p|, |q| \leq N < \infty\}$. Положим

$$\mathring{P} = P, \quad \mathring{Q} = Q, \quad \mathring{A} = A,$$

$$P^h(x,t,p,q) = \tilde{P}^h(x,t,p,q) - [\tilde{P}^h(0,0,p_0(0),q_0(0)) - P(0,0,p_0(0),q_0(0))],$$

$$Q^h(x,t,p,q) = \tilde{Q}^h(x,t,p,q) - [\tilde{Q}^h(0,0,p_0(0),q_0(0)) - Q(0,0,p_0(0),q_0(0))],$$

$$A^h(t,p,q) = \tilde{A}^h(t,p,q) - [\tilde{A}^h(0,p_0(0),q_0(0)) - A(0,p_0(0),q_0(0))] -$$
$$-[\tilde{A}^h_t(0,p_0(0),q_0(0)) - A^h_t(0,p_0(0),q_0(0))]\,t - [\tilde{A}^h_p(0,p_0(0),q_0(0)) -$$
$$- A_p(0,p_0(0),q_0(0))](p - p_0(0)) - [\tilde{A}^h_q(0,p_0(0),q_0(0)) - A_q(0,p_0(0),q_0(0))](q - q_0(0))$$

Очевидно, что для любого $0 < N < \infty$ при $h \to 0$

$$\|P^h_{il} - \mathring{P}_{il}\|_{C_1(\vartheta_N)} \to 0, \quad \|Q^h_{sj} - \mathring{Q}_{sj}\|_{C_1(\vartheta_N)} \to 0, \quad \|A^h_{il} - \mathring{A}_{il}\|_{C_1(\vartheta_N)} \to 0. \tag{25.1}$$

Заменяя в (0.1), (0.2), (0.4) P, Q, A на P^h, Q^h, A^h, рассмотрим в $\bar{G}_T$ смешанные задачи $(0.1_h) - (0.4_h)$. Заметим, что соответствую щие условия согласования (0.6_h), (0.7_h) выполняются. При любом достаточно малом h в $\bar{G}_T$ существует единственное н.о.р. (p^h, q^h) задачи (0.1_h) – (0.4_h). Действительно, по условиям леммы 2.1 найдутся такие $0<\sigma_1, \sigma_2<1$, что для любой точки $(t,q)\in \mathfrak{M}_{\sigma_1}$ уравнение $\mathring{A}(t,p,q)=0$ имеет решение $p=\mathring{f}(t,q)\in C_1(\mathfrak{M}_{\sigma_1})$, $\mathring{p}(0,t)=\mathring{f}(t,\mathring{q}(0,t))$ и оно единственно в шаре $\max\limits_i|p_i-\mathring{p}_i(0,t)|\le\sigma_2$. В силу (25.1) можно указать такие $0<\mu_1\le\sigma_1$, $0<h_0$, $\mu_2<1$, что для любых $0<h\le h_0$, $(t,q)\in\mathfrak{M}_{\mu_1}$ уравнение $A^h(t,p,q)=0$ имеет решение $p=f^h(t,q)\in C_2(\mathfrak{M}_{\mu_1})$, оно единственно в шаре $\max\limits_i|p_i-\mathring{p}_i(0,t)|\le\mu_2$, и $\|f^h-f^0\|_{C_1(\mathfrak{M}_{\mu_1})}\to 0$ при $h\to 0$. Так как $A^h(0,p_0(0),q_0(0))=0$, то $p_0(0)=f^h(0,q_0(0))$ при $0<h\le h_0$. Для $(t,q)\in[0,T]\times R_m$, $0<h\le h_0$, положим $\tilde{f}^h(t,q)=f^h(t,\hat{q})$, где $\hat{q}_j=q_j$ если $|q_j-\mathring{q}_j(0,t)|\le\mu_1$, $\hat{q}_j=\mathring{q}_j(0,t)+\mu_1$ если $q_j>\mathring{q}_j(0,t)+\mu_1$, $\hat{q}_j=\mathring{q}_j(0,t)-\mu_1$ если $q_j<\mathring{q}_j(0,t)-\mu_1$ $(j=1,2,\dots,m)$. Вектор-функция $\tilde{f}^h\in C^1([0,T]\times R_m)$ и $|\tilde{f}^h(t,q)-\tilde{\mathring{f}}(t,q)|\to 0$ при $h\to 0$ равномерно относительно $(t,q)\in[0,T]\times R_m$. Легко видеть, что если $0<h_1\le h_0$ достаточно мало, то при любых $t\in[0,T]$, $\overset{1}{q},\overset{2}{q}\in R_m$, $0\le h\le h_1$

$$|\tilde{f}^h(t,\overset{2}{q})-\tilde{f}^h(t,\overset{1}{q})|\le C\,|\overset{2}{q}-\overset{1}{q}|,$$

где постоянная C не зависит от $h, t, \overset{2}{q}, \overset{1}{q}$. При $0\le h\le h_1$ рассмотрим в $\bar{G}_T$ систему

$$p_i(x,t)=\tilde{f}_i^h\Big(\theta_i^-(x,t),\, q_{0,j}(\nu_j\theta_i^-(x,t))+\int_0^{\theta_i^-(x,t)} Q_j^h[p,q]_{(\varkappa_j^+(\tau,0,\theta_i^-(x,t)),\tau)}\,d\tau\Big)+\int_{\theta_i^-(x,t)}^{t} P_i^h[p,q]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in\bar{G}_T[i_0] \tag{26.1$_h$}$$

$$p_i(x,t)=p_{0,i}(x-\lambda_i t)+\int_0^t P_i^h[p,q]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in\bar{D}_T[i_0] \tag{27.1$_h$}$$

$$q_j(x,t)=q_{0,j}(x+\nu_j t)+\int_0^t Q_j^h[p,q]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in\bar{G}_T. \tag{28.1$_h$}$$

Запишем систему (26.I$_h$) – (28.I$_h$) в виде

$$(p,q)=\Omega_h(p,q). \qquad (29.I_h)$$

Очевидно, что $(\mathring{p},\mathring{q})$ есть решение системы (29.I$_0$) в пространстве в[ек]тор-функций $(p,q)\in C(\bar{G}_T)$. Нетрудно показать, что при $0<h\le h_1$ $\Omega_h(p,q)\in C(\bar{G}_T)$, если $(p,q)\in C(\bar{G}_T)$, и что к уравнению (29.I$_h$) применима теорема о непрерывной зависимости от параметра [ре]шения уравнений типа Вольтерра (см., например, [6], теорему I.3). Сл[е]довательно, при любом достаточно малом h уравнение (29.I$_h$) имеет единственное решение $(p^h,q^h)\in C(\bar{G}_T)$, и

$$\|p^h-\mathring{p}\|_{\bar{G}_T}+\|q^h-\mathring{q}\|_{\bar{G}_T}\to 0 \quad \text{при } h\to 0 \qquad (30.I)$$

Очевидно, что при любом достаточно малом h (p^h,q^h) – н.о.р. задач[и] (0.I$_h$)–(0.4$_h$) в $\bar{G}_T$, и $|A_p^h(t,p^h(0,t),q^h(0,t))|>0$ на $[0,T]$. Следо[]вательно, по лемме I.I $(p^h,q^h)\in C_1(\bar{G}_T)$, и p_t^h, q_t^h удовлетв[о]ряют в $\bar{G}_T$ системе (3.I$_h$)–(5.I$_h$), получающейся из (3.I)–(5.I) зам[е]ной f,P,Q на f^h,P^h,Q^h. Пусть $(u,v)\in C(\bar{G}_T)$ – решение в $\bar{G}_T$ систе[мы] (6.I). В силу теоремы I.3 из работы [6]

$$\|p_t^h-u\|_{\bar{G}_T}\to 0,\quad \|q_t^h-v\|_{\bar{G}_T}\to 0 \quad \text{при } h\to 0 \qquad (31.I)$$

Из (30.I), (31.I) вытекает, что в $\bar{G}_T$ существуют $\mathring{p}_t=u$, $\mathring{q}_t=v$. Лемма 2.I доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 2.I и замечания к лемме I следует, что если условие (0.7) не выполняется, то при любом $i=i_0$ $\frac{\partial \mathring{p}_i}{\partial t},\frac{\partial \mathring{p}_i}{\partial x}$ существуют и непрерывны в $\bar{G}_T[i_0]$ и в $\bar{D}_T[i_0]$, $\mathring{q}_t$, $\mathring{q}_x$ существуют и непрерывны в $\bar{G}_T$, и $(\mathring{p},\mathring{q})$ удовлетворяет системе (0[.I])–(0.2) в $\bar{G}_T$ ($\frac{\partial \mathring{p}_i}{\partial t},\frac{\partial \mathring{p}_i}{\partial x}$ на характеристике $\xi=\varkappa_i^-(\tau,0,0)$ понимаются как односторонние).

Теорема I.I. Имеет место следующая альтернатива: либо A) в $\bar{G}_{\mathring{T}}$ существует единственное решение $(\mathring{p},\mathring{q})\in C_1(\bar{G}_{\mathring{T}})$ задачи (0.I)–(0.4), и $|A_p(t,\mathring{p}(0,t),\mathring{q}(0,t))|>0$ при $0\le t\le\mathring{T}$; либо B) найдется такое $0<T^*\le\mathring{T}$, что в G_{T^*} существует единственное решение $(\mathring{p},\mathring{q})\in C_1(G_{T^*})$

задачи (0.I)-(0.4),

$$|A_p(t,\mathring{p}(0,t),\ \mathring{q}(0,t))| > 0 \qquad \text{при } 0 < t < T^* \qquad (32.I)$$

и выполняется по крайней мере одно из следующих соотношений:

$$\|\mathring{p}\|_{G_{T^*}} + \|\mathring{q}\|_{G_{T^*}} = \infty \quad , \inf_{0<t<T^*} |A_p(t,\mathring{p}(0,t),\ \mathring{q}(0,t))| = 0. \qquad (33.I)$$

Доказательство

В силу леммы 2.I теорему I.I достаточно доказать для н.о.р. задачи (0.I)-(0.4). Пусть в $\bar{G}_T$, $0 < T \le \mathring{T}$ существует н.о.р. $(\mathring{p},\mathring{q})$ задачи (0.I)-(0.4), и $|A_p(t,\mathring{p}(0,t),\ \mathring{q}(0,t))| > 0$ на $[0,T]$. Покажем, что $(\mathring{p},\mathring{q})$ – единственное н.о.р. в $\bar{G}_T$. Предположим, что в $\bar{G}_T$ существует н.о.р. $(\bar{p},\bar{q})$ и

$$\|\bar{p}-\mathring{p}\|_{\bar{G}_T} + \|\bar{q}-\mathring{q}\|_{\bar{G}_T} \neq 0. \qquad (34.I)$$

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \mathring{f}(t,q)$ те же, что и в доказательстве леммы 2.I. Так как $\bar{q}(0,0) = q_0(0) = \mathring{q}(0,0)$, $\bar{p}(0,0) = p_0(0) = \mathring{p}(0,0)$, то найдется такое $0 < \tau \le T$, что $\bar{p}(0,t) = \mathring{f}(t,\bar{q}(0,t))$ при $t \in [0,\tau]$. Следовательно, $(\mathring{p},\mathring{q})$ и $(\bar{p},\bar{q})$ удовлетворяют в $\bar{G}_\tau$ системе ($26.I_0$) – ($28.I_0$). Так как решение системы ($26.I_0$) – ($28.I_0$) единственно в $\bar{G}_\tau$ (см., например, [6], теорему I.I) то $(\bar{p},\bar{q}) = (\mathring{p},\mathring{q})$ в $\bar{G}_\tau$. Пусть t_s – точная верхняя грань множества таких $\tau \le t \le T$, что $(\bar{p},\bar{q}) = (\mathring{p},\mathring{q})$ в $\bar{G}_t$. Тогда $(\bar{p},\bar{q}) = (\mathring{p},\mathring{q})$ в $\bar{G}_{t_s}$. Число $t_s = T$, ибо если $t_s < T$, то проводя рассуждения, аналогичные изложенным, получим противоречие с определением числа t_s . Итак, $(\bar{p},\bar{q}) = (\mathring{p},\mathring{q})$ в $\bar{G}_T$, что противоречит (34.I). Учитывая (0.8), выберем такие $0 < \Delta_1, \Delta_2 < 1$, что для любой точки $(t,q) \in \mathring{\mathfrak{M}}_{\Delta_1} = \{(t,q) : 0 \le t \le \Delta_1 ,\ \max_j |q_j - q_{0,j}(0)| \le \Delta_1\}$ система $A(t,p,q) = 0$ имеет решение $p = f(t,q) \in C_1(\mathring{\mathfrak{M}}_{\Delta_1})$, $p_0(0) = f(0,q_0(0))$, оно единственно в шаре $\max_i |p_i - p_{0,i}(0)| < \Delta_2$ и $|A_p(t,f(t,q),q)| > 0$. Для $(t,q) \in [0,\Delta_1] \times R_m$ положим $\hat{f}(t,q) = f(t,\hat{q})$, где $\hat{q}_j = q_j$, если $|q_j - q_{0,j}(0)| \le \Delta_1$, $\hat{q}_j = q_{0,j}(0) + \Delta_1$ если $\hat{q}_j > q_{0,j}(0) + \Delta_1$,

$\hat{q}_j - q_{o,j}(0) - \Delta_1$ если $\hat{q}_j < q_{o,j}(0) - \Delta_1$. Заменим в (26.I.)-(28.I.) $\bar{q}$ на $\hat{q}$. В силу леммы I.3 из работы [6] найдется такое $0 < t_0 < \Delta_1$, что в $\bar{G}_{t_0}$ существует решение $(\mathring{p}, \mathring{q}) \in C(\bar{G}_{t_0})$ полученной системы. Пусть t_0 таково, что $\max\limits_j |\mathring{q}_j(0,t) - q_{o,j}(0)| < \Delta_1$ при $0 \le t \le t_0$. Тогда $(\mathring{p}, \mathring{q})$ есть н.о.р. задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_{t_0}$, $|A_p(t, \mathring{p}(0,t), \mathring{q}(0,t))| > 0$ на $[0, t_0]$, и следовательно, $(\mathring{p}, \mathring{q})$ единственное н.о.р. в $\bar{G}_{t_0}$. Обозначим через $\mathcal{X}$ множество таких $0 < T \le \mathring{T}$, что в $\bar{G}_T$ существует н.о.р. $(\mathring{p}, \mathring{q})$ задачи (0.I)-(0.4), и $|A_p(t, \mathring{p}(0,t), \mathring{q}(0,t))| > 0$ на $[0, T]$. Легко видеть, что множество $\mathcal{X}$ открытое. Пусть $T^* = \sup\limits_{T \in \mathcal{X}} \{T\}$. Возможны следующие и только следующие случаи:

$$\text{I)}\quad M_0 = \|\mathring{p}\|_{G_{T^*}} + \|\mathring{q}\|_{G_{T^*}} < \infty, \inf_{0 \le t < T^*} |A_p(t, \mathring{p}(0,t), \mathring{q}(0,t))| > 0 \qquad (35.I)$$

П) по крайней мере одно из неравенств (35.I) обращается в равенство. Очевидно, что в случае П) справедливо утверждение в) теоремы I.I. Рассмотрим случай I). В силу леммы 2.I вектор-функция $(\mathring{p}, \mathring{q}) \in C_1(G_{T^*})$, удовлетворяет в G_{T^*} системе (0.I), (0.2) и $A(t, \mathring{p}(0,t), \mathring{q}(0,t)) = 0$ на $[0, T^*)$. Отсюда учитывая (35.I), получим

$$|\mathring{p}_t(0,t)| < C(M_0)\left[1 + |\mathring{q}_t(0,t)|\right] \quad \text{при} \quad 0 \le t < T^* \qquad (36.I)$$

Легко видеть, что $\mathring{p}_t$, $\mathring{q}_t$ удовлетворяют в G_{T^*} системе (3.I′)-(5.I′) получающейся из (3.I)-(5.I) после замены в (5.I) члена $\{\quad\}_{\xi = \theta_i^-(x,t)}$ на $\frac{\partial \mathring{p}_i(0, \theta_i^-(x,t))}{\partial t}$. Положим

$$S(T) = \|\mathring{p}_t\|_{\bar{G}_T} + \|\mathring{q}_t\|_{\bar{G}_T}, \quad 0 < T < T^*.$$

Из (3.I′)-(5.I′), учитывая (36.I) и первое неравенство (35.I), для любых $0 < T < T^*$ и $(x,t) \in \bar{G}_T$ получим

$$\left|\frac{\partial \mathring{q}_j(x,t)}{\partial t}\right| < C(M_0) + C(M_0)\int_0^T S(\eta)\,d\eta,$$

$$\left|\frac{\partial \mathring{p}_i(x,t)}{\partial t}\right| < C(M_0) + C(M_0)\max_{0 \le t \le T}\left|\frac{\partial \mathring{q}(0,t)}{\partial t}\right| + C(M_0)\int_0^T S(\eta)\,d\eta.$$

Отсюда

$$S(T) < C(M_0) + C(M_0)\int_0^T S(\eta)\,d\eta$$

Следовательно, по лемме Гронуолла [7]

$$\|\overset{\circ}{p}_t\|_{G_{T^*}} + \|\overset{\circ}{q}_t\|_{G_{T^*}} < C(M_0). \tag{37.I}$$

Из (0.I),(0.2),(37.I) и первого неравенства (35.I) вытекает

$$\|\overset{\circ}{p}_x\|_{G_{T^*}} + \|\overset{\circ}{q}_x\|_{G_{T^*}} < C(M_0). \tag{38.I}$$

В силу (37.I),(38.I) $(\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}) \in C(\bar{G}_{T^*})$. Очевидно, что $(\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q})$ есть н.о.р задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_{T^*}$ и $|A_p(t,\overset{\circ}{p}(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t))| > 0$ на $[0,T^*]$. Так как множество χ открытое, то $T^* = \dot{T}$. Итак, случай I) приводит к утверждению A) теоремы I.I. Теорема I.I доказана.

§ 2. Построение разрывного решения задачи (0.I)-(0.4)

I°. В настоящем параграфе предполагается, что

A) имеет место утверждение B) теоремы I.I, $0 < T^* < \dot{T}$,

$$M_0 = \|\overset{\circ}{p}\|_{G_{T^*}} + \|\overset{\circ}{q}\|_{G_{T^*}} < \infty \tag{I.2}$$

и, следовательно,

$$\inf_{0 \le t < T^*} |A_p(t,\overset{\circ}{p}(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t))| = 0 \tag{2.2}$$

B) $$\int_0^{T^*} \frac{dt}{\varkappa(t)} < \infty, \quad \varkappa(t) = |A_p(t,\overset{\circ}{p}(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t))|. \tag{3.2}$$

Лемма I.2. Вектор-функция $(\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}) \in C(\bar{G}_{T^*})$, $\overset{\circ}{q} \in C_1(\bar{G}_{T^*})$, $\overset{\circ}{p} \in C_1(\bar{G}'_{T^*})$, и

$$\sup_{\bar{G}'_{T^*}[i_0]} \left|\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(x,t)}{\partial t}\right| \varkappa(\theta_i^-(x,t)) < \infty, \quad \sup_{\bar{G}'_{T^*}[i_0]} \left|\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(x,t)}{\partial x}\right| \varkappa(\theta_i^-(x,t)) < \infty. \tag{4.2}$$

Доказательство

Рассмотрим $\overset{\circ}{p}_t$, $\overset{\circ}{q}_t$ в G_{T^*}. Легко видеть, что $(\overset{\circ}{p}_t, \overset{\circ}{q}_t)$ есть решение в G_{T^*} системы (3.I′)-(5.I′), получающейся из (3.I)-(5.I) заменой в (4.I),(5.I) членов $[\ ]_{\xi = x-\lambda_i t}$, $\{\ \}_{\tau=\theta_i^-(x,t)}$ на $\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i}{\partial t}(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))$. Покажем, что в G_{T^*}

$$\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(x,t)}{\partial t} = \overset{\circ}{\alpha}_i(x,t)\,\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))}{\partial t} + \overset{\circ}{\beta}_i(x,t), \quad i=1,2,\dots,z \tag{5.2}$$

где $\overset{\circ}{\alpha}_i$, $\overset{\circ}{\beta}_i$ матрицы размера $k_i \times k_i$, $k_i \times 1$, соответственно, непрерывные в $\bar{G}_{T^*}$. Действительно, в силу (4.I′), (5.I′) в G_{T^*}

$$\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))}{\partial t} + \int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t} \mathcal{P}_i\left[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q},\frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial t},\frac{\partial \overset{\circ}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau. \tag{6.2}$$

Подставим (5.2) в (6.2). Замечая, что

$$\frac{\partial P_i}{\partial p}\frac{\partial \overset{\circ}{p}}{\partial t} = \frac{\partial P_i}{\partial p_i}\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i}{\partial t} + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{z}\frac{\partial P_i}{\partial p_\ell}\frac{\partial \overset{\circ}{p}_\ell}{\partial t}$$

после несложных преобразований получим

$$\left[\overset{\circ}{\alpha}_i(x,t) - E - \int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\left(\frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial p_i}\overset{\circ}{\alpha}_i\right)_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau\right]\frac{\partial \overset{\circ}{p}_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))}{\partial t} + \overset{\circ}{\beta}_i(x,t) -$$

$$-\int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\left[\frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial t} + \frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial q}\frac{\partial \overset{\circ}{q}}{\partial t} + \frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial p_i}\overset{\circ}{\beta}_i + \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{z}\frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial p_\ell}\frac{\partial \overset{\circ}{p}_\ell}{\partial t}\right]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau = 0, \tag{7.2}$$

где E – единичная матрица размера $k_i \times k_i$. Определим теперь $\overset{\circ}{\alpha}_i$ как решение уравнения

$$\overset{\circ}{\alpha}_i(x,t) = E + \int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\left(\frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial p_i}\overset{\circ}{\alpha}_i\right)_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau. \tag{8.2}$$

Легко видеть, что при любом $0 < T < T^*$ уравнение (8.2) имеет единственное решение $\overset{\circ}{\alpha}_i \in C(\bar{G}_T)$ (см., например, [6], теоремы I.I, I.2 и замечание к теореме I.2). Итак, матрица $\overset{\circ}{\alpha}_i$ определена и непрерывна в G_{T^*}. Пользуясь (5.2), определим в G_{T^*} матрицу $\overset{\circ}{\beta}_i$. Очевидно, что $\overset{\circ}{\beta}_i \in C(G_{T^*})$. В силу (5.2), (7.2), (8.2) в G_{T^*}

$$\overset{\circ}{\beta}_i(x,t) = \int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\left[\frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial p_i}\overset{\circ}{\beta}_i + \frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial t} + \frac{\partial P_i[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial q}\frac{\partial \overset{\circ}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau +$$

$$+\int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\left\{\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{z}\frac{\partial P_i(\xi,\tau,\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q})}{\partial p_\ell}\left[\overset{\circ}{\alpha}_\ell(\xi,\tau)\frac{\partial \overset{\circ}{p}_\ell(\xi_\ell^-(\xi,\tau),\theta_\ell^-(\xi,\tau))}{\partial t} + \overset{\circ}{\beta}_\ell(\xi,\tau)\right]\right\}_{\xi=\varkappa_i^-(\tau,x,t)} d\tau. \tag{9.2}$$

Подставляя (5.2) в (3.I), получим:

$$\frac{\partial \mathring{q}_j(x,t)}{\partial t} = \left[\nu_j q'_{0,j}(\xi) + Q_j(\xi, 0, \rho_0(\xi), q_0(\xi))\right]_{\xi = x+\nu_j t} + \int_0^t \Big\{ \frac{\partial Q_j(\xi,\tau,\mathring{\rho},\mathring{q})}{\partial t} +$$

$$+\sum_{s=1}^{z} \frac{\partial Q_j(\xi,\tau,\mathring{\rho},\mathring{q})}{\partial \rho_s}\left[\mathring{\alpha}_s(\xi,\tau)\,\frac{\partial \mathring{\rho}_s(\xi_s^-(\xi,\tau),\theta_s^-(\xi,\tau))}{\partial t} + \mathring{\beta}_s(\xi,\tau)\right] + \frac{\partial Q_j(\xi,\tau,\mathring{\rho},\mathring{q})}{\partial q}\,\frac{\partial \mathring{q}(\xi,\tau)}{\partial t}\Big\}_{\xi = x_j^+(\tau,x,t)} d\tau \quad (10.2)$$

Для $0 \le T \le T^*$ положим $\gamma(T) = \|\mathring{q}_t\|_{\bar G_T}$, $\beta(T) = \sum_{i=1}^{z} \|\mathring{\beta}_i\|_{\bar G_T}$, $m(T) = \beta(T) + \gamma(T)$. Из (8.2), учитывая (1.2), получим

$$\|\mathring{\alpha}_i\|_{\bar G_T} \le C + C(M_0)\int_0^T \|\mathring{\alpha}_i\|_{\bar G_\eta}\, d\eta$$

Отсюда

$$\|\mathring{\alpha}_i\|_{\bar G_T} \le C(M_0) \qquad \text{при} \quad 0 \le T \le T^* \qquad (11.2)$$

В силу тождества $A(t, \mathring{\rho}(0,t), \mathring{q}(0,t)) = 0$, $0 \le t \le T^*$, и неравенств (40.1), (1.2) имеем

$$|\mathring{\rho}_t(0,t)| = C(M_0)\,\varkappa^{-1}(t)\left[1 + \gamma(t)\right] \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T^*. \qquad (12.2)$$

Из (9.2), (10.2), учитывая (1.2), (11.2), (12.2) имеем

$$|\beta(T)| \le C(M_0) + C(M_0)\int_0^T \{m(\tau) + \varkappa^{-1}(\tau)\left[1 + \gamma(\tau)\right]\} d\tau,$$

$$|\gamma(T)| \le C(M_0) + C(M_0)\int_0^T \{m(\tau) + \varkappa^{-1}(\tau)\left[1 + \gamma(\tau)\right]\} d\tau.$$

Следовательно, в силу (3.2)

$$m(T) \le C(M_0) + C(M_0)\int_0^T \varkappa^{-1}(\tau)\, m(\tau)\, d\tau.$$

Учитывая (3.2) и применяя лемму Гронуолла [7], получим

$$m(T) \le C(M_0) \qquad \text{при} \quad 0 \le T \le T^* \qquad (13.2)$$

Поэтому

$$|\mathring{\rho}_t(0,t)| \le C(M_0)\,\varkappa^{-1}(t) \qquad \text{при} \quad 0 \le t \le T^*. \qquad (14.2)$$

Следовательно, $\mathring{\rho}(0,t) \in C[0,T^*]$, и в силу (1.1), (2.1), (8.2), (1.2), (11.2) $(\mathring{\rho}, \mathring{q}) \in C(\bar G_{T^*})$, $\mathring{\alpha}_i \in C(\bar G_{T^*})$. Учитывая (13.2), (14.2), нетрудно показать, что каждый член в правой части уравнений (9.2), (10.2) непрерывен в $\bar G_{T^*}$. Значит β_i, $\frac{\partial \mathring{q}}{\partial t} \in C(\bar G_{T^*})$, а силу (0.2) и $\frac{\partial \mathring{q}_j}{\partial x} \in C(\bar G_{T^*})$. Пользуясь (5.2), (0.1) получим, что $\mathring{\rho} \in C_1(\bar G'_{T^*})$. Из (5.2), (11.2), (13.2), (14.2) вытекает первое неравенство (4.2);

второе неравенство (4.2) автоматически следует теперь из (0.I). Лемма I.2 доказана.

2^0. Положим $p^* = \overset{\circ}{p}(0,T^*)$, $q^* = \overset{\circ}{q}(0,T^*)$. Пусть

c) $P, Q, A \in C_2(\vartheta)$ и существует такое $1 \le \ell \le n$, что $A^i(t,p,q) = p^i - g^i(t, p^\ell, q)$ при $i \ne \ell$; положим $H(t,p^\ell,q) = A^\ell(t,p,q)\big|_{p^i = q^i(t,p^\ell,q)}$. Нетрудно показать, что

$$H_{p^\ell}(t,p^\ell,q) = |A_p(t,p,q)|. \tag{I5.2}$$

Так как $\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q} \in C(\bar{G}_{T^*})$, то учитывая (2.2) имеем

$$H(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q}) = 0, \quad H_{p^\ell}(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q}) = 0 \tag{I6.2}$$

д) $\dfrac{\partial^2 H(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q})}{\partial p^{\ell 2}} \ne 0$; без ограничения общности предположим, что

$$\frac{\partial^2 H(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q})}{\partial p^{\ell 2}} < 0 \tag{I7.2}$$

е) $$\Gamma_0 \equiv -\left[H_t(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q}) + H_q(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q})\overset{\circ}{q}_t(0,T^*)\right] \ne 0 \tag{I8.2}$$

ж) уравнение $H(T^*, p^\ell, q^*) = 0$ имеет решение $\beta^\ell < \bar{p}^\ell < \infty$ такое, что $H_{p^\ell}(T^*, \bar{p}^\ell, q^*) > 0$ и $H(T^*, p^\ell, q^*) \ne 0$ при $\overset{*}{p}^\ell < p^\ell < \bar{p}^\ell$; положим $\bar{p}^s = g^s(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q})$, $s \ne \ell$.

Лемма 2.2. Имеют место неравенства

$$\Gamma_0 > 0, \tag{I9.2}$$

$$\sup_{0 \le t < T^*} \left|\frac{\partial \overset{\circ}{p}^i(0,t)}{\partial t}\right| \left|T^* - t\right|^{1/2} < \infty, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{20.2}$$

Доказательство

Так как $H(t, \overset{\circ}{p}^\ell(0,t), \overset{\circ}{q}(0,t)) = 0$ на $[0,T^*]$, и имеет место (I6.2), то при $0 \le t \le T^*$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H(T^*, \overset{*}{p}^\ell, \overset{*}{q})}{\partial p^{\ell 2}} + \omega_1(t)\right](\overset{\circ}{p}^\ell(0,t) - \overset{*}{p}^\ell)^2 = \Gamma_0(t - T^*)[1 + \omega_2(t)], \tag{2I.2}$$

где $\omega_i(t) \to 0$ при $t \to T^*$. Отсюда в силу (I7.2) имеем (I9.2). При достаточно малом $\eta_0 > 0$ из (2I.2) для $T^* - \eta_0 \le t < T^*$ получим

$$C|t - T^*|^{1/2} \le |\overset{\circ}{p}^\ell(0,t) - \overset{*}{p}^\ell| \le C|t - T^*|^{1/2} \tag{22.2}$$

В силу (I5.2), (40.I) при $0 \le t < T^*$

$$\frac{d\overset{\circ}{p}^{\ell}(0,t)}{dt} = -\frac{H_t(t,\overset{\circ}{p}^{\ell}(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t)) + H_q(t,\overset{\circ}{p}^{\ell}(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t))\,\overset{\circ}{q}_t(0,t)}{H_{p\ell}(t,\overset{\circ}{p}^{\ell}(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t))} \tag{23.2}$$

Учитывая (I7.2), (22.2) нетрудно показать, что

$$|H_{p\ell}(t,\overset{\circ}{p}^{\ell}(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t))| \ge C\,|t-T^*|^{1/2} \quad \text{при } T^*-\eta_1 \le t \le T^*, \tag{24.2}$$

если $0 < \eta_1 \le \eta_0$ достаточно мало. Из (23.2),(24.2) вытекает (20.2) при $i=\ell$. Легко видеть, что (20.2) имеет место и для $i \ne \ell$.
Лемма 2.2 доказана.

Обозначим через $\mathcal{R}_T$, $T^* - T \le \overset{\circ}{T}$, множество определенных в $\bar{G}_T$ вектор-функций (p,q) таких, что $(p,q)=(\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q})$ в $\bar{G}_{T^*}$, $q \in C(\bar{G}_T)$, $p_i \in C(\bar{G}_T[i_{T^*}])$, $p_i \in C(\bar{D}_T[i_{T^*}])$, $i=1,2,\dots,r$.

В дальнейшем всегда предполагается, что если $(p,q) \in \mathcal{R}_T$, $T^* - T \le \overset{\circ}{T}$, то какова бы ни была точка $(x,t) \in \bar{G}_T$, лежащая на характеристике $\xi = \varkappa_i^-(\tau,0,T^*)$, $1 \le i \le r$, $p_i(x,t) = p_i(x,t+0)$.
Определение I.2. Вектор-функция $(\overset{1}{p},\overset{1}{q}) \in \mathcal{R}_T$, $T^* \le T \le \overset{\circ}{T}$, называется р.р. задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_T$, если $\overset{1}{p}(0,T^*+0) = \bar{p}$, $A(t,\overset{1}{p}(0,t),\overset{1}{q}(0,t))=0$, $|A_p(t,\overset{1}{p}(0,t),\overset{1}{q}(0,t))| > 0$ при $T^* \le t \le T$, и $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ удовлетворяет в $\bar{G}_T$ системе (I.I),(2.I).
Лемма 3.2. Пусть $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ р.р. задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_T$, $T^* - T \le \overset{\circ}{T}$.
Тогда

A) $\overset{1}{q} \in C_1(\bar{D}_T[1_{T^*}])$, $\overset{1}{q} \in C_1(\bar{G}_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*}])$, $i=1,2,\dots,r$

B) $\overset{1}{p}(0,t) \in C_1[T^*,T]$, $\overset{1}{p} \in C_1(\bar{D}_T(1_{T^*}))$, $\overset{1}{p} \in C_1(\bar{G}_T(k_{T^*},(k+1)_{T^*}))$, $k=1,2,\dots,r$

и для любой точки $(x,t) \in \bar{G}_T$, $t \ne \tau_k(x)$, $k=1,2,\dots,r$

$$\frac{\partial \overset{1}{p}_i(x,t)}{\partial t} = \overset{1}{\alpha}_i(x,t)\,\frac{\partial \overset{1}{p}_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))}{\partial t} + \overset{1}{\beta}_i(x,t), \quad i=1,2,\dots,r, \tag{25.2}$$

где матрицы $\overset{1}{\alpha}_i \in C(\bar{D}_T[i_{T^*}])$, $\overset{1}{\alpha}_i \in C(\bar{G}_T[i_{T^*}])$, $\overset{1}{\beta}_i \in C(\bar{D}_T[1_{T^*}])$,
$\overset{1}{\beta}_i \in C(\bar{G}_T[k_{T^*},(k+1)_{T^*}])$, $k=1,2,\dots,r$

C) $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ удовлетворяет системе (0.I),(0.2) в областях $\bar{D}_T(1_{T^*})$ и $\bar{G}_T(i_{T^*},(i+1)_{T^*})$, $i=1,2,\dots,r$

Доказательство

Пусть утверждения А),В) леммы 3.2 справедливы, и $(x,t)\in\overline{G}_T(i_{T*},(i+1)_T)$, $1\le i\le r$. Из (I.I), (2.I), учитывая (20.2),(25.2), равенство $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})=(\overset{2}{p},\overset{2}{q})$ в $\overline{G}_{T*}$, получим

$$\frac{\partial \overset{1}{q}_j(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial \overset{1}{q}_j(x+\vartheta_j t,0)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{i}\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\vartheta_j}\Delta Q_j\left[\xi^{+j,x,t}_{-k,0,T^*},\tau^{+j,x,t}_{-k,0,T^*},\overset{1}{p},\overset{1}{q}\right]+$$

$$+\int_0^t \mathcal{Q}_j\left[\overset{1}{p},\overset{1}{q},\frac{\partial \overset{1}{p}}{\partial t},\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa^+_j(\tau,x,t),\tau)}d\tau\ ,\quad j=1,2,\dots,m \tag{26.2}$$

$$\frac{\partial \overset{1}{p}_s(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial \overset{1}{p}_s(\xi^-_s(x,t),\theta^-_s(x,t))}{\partial t}+\sum_{\rho\in\omega(s,i)}\frac{\lambda_\rho}{|\lambda_s-\lambda_\rho|}\Delta P_s\left[\xi^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*},\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*},\overset{1}{p},\overset{1}{q}\right]$$

$$+\int_{\theta^-_s(x,t)}^{t}\mathcal{P}_s\left[\overset{1}{p},\overset{1}{q},\frac{\partial \overset{1}{p}}{\partial t},\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}d\tau\ ,\quad s=1,2,\dots,r\ , \tag{27.2}$$

где $\omega(s,i)$ – множество натуральных чисел, определяемое следующими условиями: при $s\le i\le r-1$ $\omega(s,i)=\{\rho: i+1\le\rho\le r\}$; при $s>i$ $\omega(s,i)=\{\rho: 1\le\rho\le i\}$; при $i=r$ $\omega(s,r)$ – пустое множество. Уравнения для $\overset{1}{p}_t$, $\overset{1}{q}_t$ в $\overline{D}_T(1_{T*})$ аналогичны (26.2),(27.2), но не содержат сумм $\sum\limits_{k=1}^{i}$, $\sum\limits_{\rho\in\omega(s,i)}$. Для любого фиксированного $1\le s\le r$ в $\overline{G}_T[S_{T*}]$ определим матрицу $\overset{1}{\alpha}_s$ размера $K_s\times K_s$ как решение уравнения

$$\overset{1}{\alpha}_s(x,t)=E+\int_{\theta^-_s(x,t)}^{t}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_s}\overset{1}{\alpha}_s\right)_{(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}d\tau\ , \tag{28.2}$$

где E –единичная матрица размера $K_s\times K_s$.

Легко видеть, что матрица $\overset{1}{\alpha}_s\in C(\overline{G}_T[S_{T*}])$, удовлетворяющая (28.2) в $\overline{G}_T[S_{T*}]$, существует и единственна. Аналогично определим матрицу $\overset{1}{\alpha}_s$ в $\overline{D}_T[S_{T*}]$. Для $(x,t)\in\overline{G}_T$, $t\ne\tau_i(x)$, $i=1,2,\dots,r$ положим

$$\overset{1}{\beta}_s(x,t)=\frac{\partial \overset{1}{p}_s(x,t)}{\partial t}-\overset{1}{\alpha}_s(x,t)\,\frac{\partial \overset{1}{p}_s(\xi^-_s(x,t),\theta^-_s(x,t))}{\partial t}\ . \tag{29.2}$$

В силу (27.2)-(29.2) при любых $1\le i\le r$, $(x,t)\in\overline{G}_T(i_{T*},(i+1)_{T*})$

$$\overset{1}{\rho}_s(x,t)=\sum_{p\in\omega(s,i)}\frac{\lambda_p}{|\lambda_s-\lambda_p|}\,\Delta P_s\left[\xi^{-s,x,t}_{-p,0,T^*},\tau^{-s,x,t}_{-p,0,T^*},\overset{1}{p},\overset{1}{q}\right]+\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t}\left\{\frac{\partial P_s(\xi,\tau,\overset{1}{p},\overset{1}{q})}{\partial t}+\right.$$

$$+\frac{\partial P_s(\xi,\tau,\overset{1}{p},\overset{1}{q})}{\partial p_s}\overset{1}{\rho}_s(\xi,\tau)+\frac{\partial P_s(\xi,\tau,\overset{1}{p},\overset{1}{q})}{\partial q}\,\frac{\partial\overset{1}{q}(\xi,\tau)}{\partial t}+\qquad(30.2)$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{z}\frac{\partial P_s(\xi,\tau,\overset{1}{p},\overset{1}{q})}{\partial p_k}\left[\overset{1}{\alpha}_k(\xi,\tau)\frac{\partial\overset{1}{p}_k(\xi_k^-(\xi,\tau),\theta_k^-(\xi,\tau))}{\partial t}+\overset{1}{\rho}_k(\xi,\tau)\right]\right\}\Bigg|_{\xi=x_s^-(\tau,x,t)}d\tau .$$

В $\bar{D}_T(1_{T^*})$ $\overset{1}{\rho}_s$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (30.2), но не содержащему сумму $\sum_{p\in\omega(s,i)}$. В силу определения р.р. и (I5.2) найдутся такие $0<\delta_1,\delta_2<1$, что для любой точки $(t,q)\in\mathfrak{M}^1_{\delta_1}=\{(t,q):T^*\le t\le T,\ \max|q_j-\overset{1}{q}_j(0,t)|\le\delta_1\}$ уравнение $H(t,p^\ell,q)=0$ имеет решение $p^\ell=f^\ell(t,q)\in C_2(\mathfrak{M}^1_{\delta_1})$, $\overset{1}{p}{}^\ell(0,t)=f(t,\overset{1}{q}(0,t))$, и оно единственно на сегменте $|p^\ell-\overset{1}{p}{}^\ell(0,t)|\le\delta_2$. Для $(t,q)\in\mathfrak{M}^1_{\delta_1}$ положим $f^s(t,q)=g^s(t,f^\ell(t,q),q)$, $s\neq\ell$. Тогда $\overset{1}{p}(0,t)=f(t,\overset{1}{q}(0,t))$ на $[T^*,T^1]$. Следовательно,

$$\overset{1}{p}_t(0,t)=f_t(t,\overset{1}{q}(0,t))+f_q(t,\overset{1}{q}(0,t))\,\overset{1}{q}_t(0,t)\equiv F(t,\overset{1}{q}(0,t),\overset{1}{q}_t(0,t)).\qquad(31.2)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial\overset{1}{p}_k(\xi_k^-(x,t),\theta_k^-(x,t))}{\partial t}=\frac{\partial\overset{0}{p}_k(\xi_k^-(x,t),\theta_k^-(x,t))}{\partial t},\ \text{если } (x,t)\in\bar{D}_T(k_{T^*})$$

$$\frac{\partial\overset{0}{p}_k(\xi_k^-(x,t),\theta_k^-(x,t))}{\partial t}=F_k(\eta,\overset{1}{q}(0,\eta),\overset{1}{q}_t(0,\eta))\Big|_{\eta=\theta_k^-(x,t)},\ \text{если } (x,t)\in\bar{G}_{T_{1i}}[k_{T^*}]\qquad(32.2)$$

Пользуясь (29.2),(32.2), исключим из (26.2),(30.2) $\frac{\partial\overset{1}{p}{}^i}{\partial t}$ $(i=1,2,\dots,n)$. Тогда в каждой из областей $\bar{G}_T(i_{T^*},(i+1)_{T^*})$, $i=1,2,\dots,z$ и $\bar{D}_T(1_{T^*})$ вектор-функция $(\overset{1}{\rho},\overset{1}{q}_t)$ удовлетворяет системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Полагая $\overset{1}{q}_t=v$; запишем систему в виде

$$(\rho,v)=\Omega(\rho,v).\qquad(33.2)$$

Пусть $\mathfrak{N}_\theta$, $T^*<\theta\le T$, пространство вектор-функций (ρ,v), определенных и непрерывных в каждой области $\bar{G}_\theta[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]$, $i=1,2,\dots,z$, и в $\bar{D}_\theta[1_{T^*}]$. Для $0<\theta\le T^*$ обозначим через $\mathfrak{N}_\theta$ пространство вектор-функций (β, v), определенных и непрерывных в $\bar{D}_\theta[1_{T^*}]$.

Положим

$$\|(\beta,v)\|_\theta = \|\beta\|_{\bar{D}_\theta[1^*_T]} + \|v\|_{\bar{D}_\theta[1_{T^*}]} + \sum_{i=1}^{z} \|\beta\|_{\bar{G}_\theta[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]} + \|V\|_{\bar{G}_\theta[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]},$$

$$T^* < \theta \le T$$

$$\|(\beta,v)\|_\theta = \|\beta\|_{\bar{D}_\theta[1_{T^*}]} + \|v\|_{\bar{D}_\theta[1_{T^*}]}, \quad 0 < \theta \le T^*.$$

Принимая во внимание (20.2) и непрерывность матриц $\overset{1}{\alpha}_i$ и вектор-функций $\overset{1}{p}, \overset{1}{q}$ в соответствующих областях, нетрудно показать, что в $\mathfrak{N}_T$ существует единственное решение $(\overset{1}{\beta}, \overset{1}{v})$ уравнения (33.2) (см. [6], теоремы I.I, I.2 и замечание к теореме I.2). Зафиксируем произвольное $0 < \Delta \le T - T^*$ такое, что для любых $T^* \le t_1, t_2 \le T$, $|t_2 - t_1| \le \Delta$

$$|\overset{1}{q}(0,t_2) - \overset{1}{q}(0,t_1)| + \max_{T^* \le t \le T} |\overset{1}{v}(0,t)|\,\Delta < \frac{\delta_1}{4}. \qquad (34.2)$$

Введем следующие обозначения.

I) Для $(x,t) \in \bigcup_{i=1}^{z} \bar{G}_T(i_{T^*},(i+1)_{T^*}) \cup \bar{D}_T(1_{T^*})$ положим

$$\overset{1}{u}_s(x,t) = \overset{1}{\alpha}_s(x,t)\,\overset{1}{u}_s(\xi_s^-(x,t), \theta_s^-(x,t)) + \overset{1}{\beta}_s(x,t), \quad s = 1,2,\dots,z,$$

где $\overset{1}{u}_s(0,t) = F_s(t, \overset{1}{q}(0,t), \overset{1}{v}(0,t))$ при $T^* \le t \le T$; $\overset{1}{u}_s(0,t) = \dfrac{\partial \overset{0}{p}_s(0,t)}{\partial t}$ при $0 \le t < T^*$, $\overset{1}{u}_s(x,0) = \dfrac{\partial \overset{0}{p}_s(x,0)}{\partial t}$ при $0 \le x \le 1$.

2) Положим

$$\tilde{q}_j(x,t) = \overset{1}{q}_j(x,0) + \int_0^t \overset{1}{v}_j(x,\eta)\,d\eta, \quad (x,t) \in \bar{D}_T[1_{T^*}],$$

$$\tilde{q}_j(x,t) = \overset{1}{q}_j(x,\tau_i(x)) + \int_{\tau_i(x)}^t \overset{1}{v}_j(x,\eta)\,d\eta, \quad (x,t) \in \bar{G}_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*}], \quad i = 1,2,\dots,z$$

$$\tilde{p}_s(x,t) = \overset{1}{p}_s(x,0) + \int_0^t \overset{1}{u}_s(x,\eta)\,d\eta, \quad (x,t) \in \bar{D}_T(1_{T^*})$$

$$\tilde{p}_s(x,t) = \overset{1}{p}_s(x,\tau_i(x)+0) + \int_{\tau_i(x)}^t \overset{1}{u}_s(x,\eta)\,d\eta, \quad (x,t) \in \bar{G}_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*}], \quad i = 1,2,\dots,z.$$

3) Для $(x,t) \in \bigcup_{i=1}^{z} \bar{G}_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*}) \cup \bar{D}_T(1_{T^*})$ положим

$$q_j(x,t) = \tilde{q}_j(x,t) - \Big[\overset{1}{q}_j(x+\nu_j t, 0) + \int_0^t Q_j[\tilde{p},\tilde{q}]_{(x+\nu_j(t-\tau),\,\tau)}\,d\tau\Big]. \qquad (35.2)$$

4) Для $(x,t)\in \bar{D}_T[1_{T^*}]$ положим

$$r_s(x,t)=\tilde{p}_s(x,t)-\Big[\overset{1}{p}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))+\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t} P_s[\tilde{p},\tilde{q}]_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau\Big]. \quad (36.2)$$

Для $1=i,\ s=r$, $(x,t)\in \bar{G}_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*})$, $\bar{T}=T^*+\Delta$, положим

$$r_s^i(x,t)=\tilde{p}_s(x,t)-\Big[\overset{1}{p}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))+\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t} P_s[\tilde{p},\tilde{q}]_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau\Big],\ \text{если}\ s>i$$

(37.2)

$$r_s^i(x,t)=\tilde{p}_s(x,t)-\Big[f_s(\theta_s^-(x,t),\tilde{q}(0,\theta_s^-(x,t)))+\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t} P_s[\tilde{p},\tilde{q}]_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau\Big],\ \text{если}\ s\le i.$$

Отметим, что в силу (34.2) вектор-функция $f(t,\tilde{q}(0,t))$ определена при $T^*\le t\le \bar{T}$. Докажем, что в $\bar{D}_T[1_{T^*}]$

$$(\tilde{p},\tilde{q})=(\overset{1}{p},\overset{1}{q}). \quad (38.2)$$

В силу уравнений, определяющих в $\bar{D}_T[1_{T^*}]$ матрицы $\overset{1}{\alpha}_s$ и вектор-функцию $(\overset{1}{\beta},\overset{1}{v})$, для $(x,t)\in \bar{D}_T[1_{T^*}]$ имеем

$$\overset{1}{v}_j(x,t)=\frac{\partial \overset{1}{q}_j(x+\lambda_j t,0)}{\partial t}+\int\limits_0^t Q_j[\overset{1}{p},\overset{1}{q},\overset{1}{u},\overset{1}{v}]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)}d\tau,\ j=1,2,\dots,m \quad (39.2)$$

$$\overset{1}{u}_s(x,t)=\frac{\partial \overset{1}{p}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))}{\partial t}+\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \mathcal{P}_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q},\overset{1}{u},\overset{1}{v}]_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau,\ s=1,2,\dots,r. \quad (40.2)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Пусть

$$S(\theta)=\|\tilde{p}-\overset{1}{p}\|_{\bar{D}_\theta[1_{T^*-\varepsilon}]}+\|\tilde{q}-\overset{1}{q}\|_{\bar{D}_\theta[1_{T^*-\varepsilon}]},\quad 0<\theta\le T.$$

Для $(x,t)\in\bar{D}_\theta[1_{T^*-\varepsilon}]$, $0<\theta\le T$, дифференцируя (35.2) по t и учитывая (39.2), получим

$$\left|\frac{\partial g_j(x,t)}{\partial t}\right| \le C\,S(\theta) \qquad (4I.2)$$

В силу (35.2), (2.I) для $(x,t)\in\bar{D}_\theta[1_{T^*-\varepsilon}]$, $0<\theta\le T$

$$g_j(x,t) = \tilde{q}_j(x,t) - \overset{1}{q}_j(x,t) + \int_0^t \left[Q_j[\overset{1}{p},\overset{1}{q}] - Q_j[\tilde{p},\tilde{q}]\right]_{(x_j^+(\tau,x,t),\tau)} d\tau . \qquad (42.2)$$

Так как $g_j(x,0)\equiv 0$, то в силу (4I.2), (42.2)

$$\|\tilde{q}-\overset{1}{q}\|_{\bar{D}_\theta[1_{T^*-\varepsilon}]} \le C\int_0^\theta S(\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad 0<\theta\le T. \qquad (43.2)$$

Для $(x,t)\in\bar{D}_T(1_{T^*})$ дифференцируя (36.2) по t и учитывая, что $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ удовлетворяет (0.I) в G_{T^*} , получим

$$\frac{\partial z_s(x,t)}{\partial t} = \overset{1}{u}_s(x,t) - \left\{\frac{\partial \overset{1}{p}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))}{\partial t} + \int_{\theta_s^-(x,t)}^t \gamma_s[\tilde{p},\tilde{q},\overset{1}{u},\overset{1}{v}]_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau\right\} . \qquad (44.2)$$

Из (44.2), (40.2) для $(x,t)\in\bar{D}_\theta[1_{T^*-\varepsilon}]$, $0<\theta\le T$, будем иметь

$$\left|\frac{\partial z_s(x,t)}{\partial t}\right| \le C(\varepsilon)\,S(\theta). \qquad (45.2)$$

В силу (36.2), (I.I) в $\bar{D}_T[1_{T^*}]$

$$z_s(x,t) = \tilde{p}_s(x,t) - \overset{1}{p}_s(x,t) + \int_{\theta_s^-(x,t)}^t \left[P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}] - P_s[\tilde{p},\tilde{q}]\right]_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau . \qquad (46.2)$$

Так как $z_s(x,0)\equiv 0$, то из (45.2), (46.2) получим

$$\|\tilde{p}_s - \overset{1}{p}_s\|_{\bar{D}_\theta[1_{T^*-\varepsilon}]} \le C(\varepsilon)\int_0^\theta S(\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad 0 < \theta \le T. \tag{47.2}$$

Суммируя (43.2), (47.2) и пользуясь леммой Гронуолла, установим (38.2) в $\bar{D}_T[1_{T^*-\varepsilon}]$ при любом $\varepsilon > 0$. Так как $\tilde{p}, \tilde{q}, \overset{1}{p}, \overset{1}{q} \in C(\bar{D}_T[1_{T^*}])$ то (38.2) имеет место и в $\bar{D}_T[1_{T^*}]$. Из (38.2) вытекает существование в $\bar{D}_T(1_{T^*})$ $\overset{1}{p}_t = \overset{1}{u}$, $\overset{1}{q}_t = \overset{1}{v}$. Зафиксируем теперь произвольное $1 \le i \le 7$ и докажем, что (38.2) имеет место в $\bar{G}_T[i_{T^*}, (i+1)_{T^*}]$. Пользуясь уравнениями, определяющими матрицы $\overset{1}{\alpha}_s$ и вектор-функции $(\overset{1}{p}, \overset{1}{q})$, нетрудно показать, что вектор-функция $(\overset{1}{u}, \overset{1}{v})$ удовлетворяет уравнениям

$$\overset{1}{u}_s(x,t) = \overset{1}{u}_s(\xi_s^-(x,t), \theta_s^-(x,t)) + \sum_{\rho\in\omega(s,i)} \frac{\lambda_\rho}{|\lambda_s - \lambda_\rho|}\,\Delta P_s\left[\xi^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*}, \tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*}, \overset{1}{p}, \overset{1}{q}\right] +$$

$$+ \int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \mathcal{P}_s[\overset{1}{p}, \overset{1}{q}, \overset{1}{u}, \overset{1}{v}]_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in \bar{G}_T(i_{T^*}, (i+1)_{T^*}) \tag{48.2}$$

$$\overset{1}{v}_j(x,t) = \frac{\partial \overset{1}{q}_j(x+\nu_j t, 0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{i} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \nu_j}\,\Delta Q_j\left[\xi^{+j,x,t}_{-k,0,T^*}, \tau^{+j,x,t}_{-k,0,T^*}, \overset{1}{p}, \overset{1}{q}\right] +$$

$$+ \int_0^t \mathcal{Q}_j[\overset{1}{p}, \overset{1}{q}, \overset{1}{u}, \overset{1}{v}]_{(x_j^+(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in \bar{G}_T[i_{T^*}, (i+1)_{T^*}]. \tag{49.2}$$

Для $T^* < \theta \le \bar{T}$ положим

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{7} \|\tilde{p} - \overset{1}{p}\|_{\bar{G}_\theta[i_{T^*}, (i+1)_{T^*}]} + \|\tilde{q} - \overset{1}{q}\|_{\bar{G}_\theta[i_{T^*}, (i+1)_{T^*}]}.$$

Для $(x,t) \in \bar{G}_\theta(i_{T^*}, (i+1)_{T^*})$, $T^* < \theta \le \bar{T}$, дифференцируя (35.2) по t и пользуясь (49.2), получим

$$\left|\frac{\partial g_i(x,t)}{\partial t}\right| \le C S(\theta) \qquad (50.2)$$

Из (35.2), (2.I) для $(x,t)\in \bar{G}_{\bar{T}}[i_{T*},(i+1)_{T*}]$ имеем

$$g_j(x,t)=\tilde{q}_j(x,t)-\overset{1}{q}_j(x,t)+\int_0^t [Q_j[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]-Q_j[\tilde{p},\tilde{q}]]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau. \qquad (51.2)$$

Отсюда учитывая (38.2), получим

$$|g_j(x,\tau_i(x))| \le C\int_{T^*}^{\tau_i(x)} S(\eta)\,d\eta. \qquad (52.2)$$

Из (50.2)-(52.2) вытекает, что при $T^* < \theta \le \bar{T}$

$$\sum_{i=1}^{z}\|\tilde{q}-\overset{1}{q}\|_{\bar{G}_\theta[i_{T*},(i+1)_{T*}]} \le C\int_{T^*}^{\theta} S(\eta)\,d\eta = C\left(\int_{T^*}^{\theta} S^2(\eta)\,d\eta\right)^{1/2}. \qquad (53.2)$$

Выберем произвольные $1\le i,\ s\le z$. Пусть $s>i$. Из (37.2) учитывая, что $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ удовлетворяет (0.I) в G_{T*}, для $(x,t)\in\bar{G}_{\bar{T}}(i_{T*},(i+1)_{T*})$ получим

$$\frac{\partial \tau_s^i(x,t)}{\partial t} = \overset{1}{u}_s(x,t)-\left\{\frac{\partial \overset{1}{p}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))}{\partial t}+\sum_{\rho\in\omega(s,i)}\frac{\lambda_\rho}{|\lambda_s-\lambda_\rho|}\times\right.$$

$$\left.\times\,\Delta P_s\left[\xi^{-s,x,t}_{-\rho,0,T*},\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T*},\tilde{p},\tilde{q}\right]+\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \mathcal{P}_s[\tilde{p},\tilde{q},\overset{1}{u},\overset{1}{v}]_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}\,d\tau\right\} \qquad (54.2)$$

В силу (38.2), (48.2), (54.2) для $(x,t)\in\bar{G}_\theta(i_{T*},(i+1)_{T*})$ $T^*<\theta\le T$, имеем

$$\left|\frac{\partial \tau_s^i(x,t)}{\partial t}\right| \le C S(t)+C S(t)\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t}\sum_{k=1}^{z}|\overset{1}{u}_k(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau|\,d\tau. \qquad (55.2)$$

Оценим

$$J_k(x,t)=\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t}|\overset{1}{u}_k(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau|\,d\tau \quad , \quad k=1,2,\dots,z.$$

Пользуясь определением вектор-функции $\overset{1}{u}(x,t)$ и непрерывностью матриц $\overset{1}{\alpha}_k$, $\overset{1}{\beta}_k$ в соответствующих областях, для $(x,t)\in\bar{G}_{\bar{T}}(i_{T*},(i+1)_{T*})$ получим

$$J_k(x,t)=C\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t}|\overset{1}{u}_k(\xi_k^-(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau),\theta_k^-(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau))|\,d\tau+C \qquad (56.2)$$

В силу (20.2) для $(x,t)\in \bar G_T(i_{T^*},(i+1)_{T^*})$ $J_k(x,t) < C$ при $k\neq s$, $J_k(x,t)\le C|\overset{1}{u}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))|+C$ при $k=s$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial z_s^i(x,t)}{\partial t}\right| \le CS(t)+C\left|\overset{1}{u}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))\right|S(t). \tag{57.2}$$

Отсюда для $(x,t)\in \bar G_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]$ имеем

$$\int_{\tau_i(x)}^{t}\left|\frac{\partial z_s^i(x,\eta)}{\partial t}\right|d\eta \le C\int_{T^*}^{t}S(\eta)d\eta+C\int_{\tau_i(x)}^{t}S(\eta)\left|\overset{1}{u}_s(\xi_s^-(x,\eta),\theta_s^-(x,\eta))\right|d\eta. \tag{58.2}$$

Пусть для определенности $\tau_i(x)=\lambda_s^{-1}x<t$. В силу (20.2)

$$\int_{\tau_i(x)}^{t}S(\eta)\left|\overset{1}{u}_s(\xi_s^-(x,\eta),\theta_s^-(x,\eta))\right|d\eta \le C\int_{\tau_i(x)}^{\lambda_s^{-1}x}S(\eta)d\eta+C\int_{\lambda_s^{-1}x}^{t}S(\eta)\left[T^*-\theta_s^-(x,\eta)\right]^{-1/2}d\eta \le$$

$$\le C\left(\int_{T^*}^{t}S^3(\eta)d\eta\right)^{1/3}+C\left(\int_{\lambda_s^{-1}x}^{t}S^3(\eta)d\eta\right)^{1/3}\le C\left(\int_{T^*}^{t}S^3(\eta)d\eta\right)^{1/3}.$$

Следовательно,

$$\int_{\tau_i(x)}^{t}\left|\frac{\partial z_s^i(x,\eta)}{\partial t}\right|d\eta \le C\left(\int_{T^*}^{t}S^3(\eta)d\eta\right)^{1/3} \tag{59.2}$$

Проводя аналогичные оценки для тех случаев, когда величины $\tau_i(x),\lambda_s^{-1}x,t$ удовлетворяют остальным логически возможным неравенствам, убедимся, что (59.2) имеет место всюду в $\bar G_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]$.

В силу (I.I), (37.2), (38.2) в $\bar G_T[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]$

$$z_s^i(x,t)=\tilde p_s(x,t)-\overset{1}{p}_s(x,t)+\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t}\left[P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]-P_s[\tilde p,\tilde q]\right]_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau \tag{60.2}$$

$$|z_s^i(x,\tau_i(x))|\le C\left(\int_{T^*}^{t}S^3(\eta)d\eta\right)^{1/3}. \tag{61.2}$$

Из (59.2)-(61.2) вытекает, что при $T^*<\theta\le T$

$$\|\tilde p_s-\overset{1}{p}_s\|_{\bar G_\theta[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]}\le C\left(\int_{T^*}^{\theta}S^3(\eta)d\eta\right)^{1/3},\quad s>i. \tag{62.2}$$

Предположим теперь, что $s\le i$. В силу (37.2) для $(x,t)\in\bar G_T(i_{T^*},(i+1)_{T^*})$ имеем

$$\frac{\partial z_s^i(x,t)}{\partial t}=\overset{1}{u}_s(x,t)-\left\{\left[\frac{\partial f_s(\theta_s^-(x,t),\tilde q(0,\theta_s^-(x,t)))}{\partial t}+\frac{\partial f_s(\theta_s^-(x,t),\tilde q(0,\theta_s^-(x,t)))}{\partial q}\overset{1}{v}(0,\theta_s^-(x,t))\right]+\right.$$

$$\left. - \sum_{\rho\in\omega(s,i)} \frac{\lambda_\rho}{|\lambda_s-\lambda_\rho|} \Delta P_s\left[\xi^{-s,x,t}_{\rho,0,T^*}, \tau^{-s,x,t}_{\rho,0,T^*}, \tilde p, \tilde q\right] + \int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \mathcal{P}_s[\tilde p, \tilde q, \overset{1}{u}, \overset{1}{v}]_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau \right\}. \tag{63.2}$$

Из (48.2), (63.2) для $(x,t)\in \bar G_T(i_{T^*}, (i+1)_{T^*})$ получим

$$\left|\frac{\partial z_s^i(x,t)}{\partial t}\right| \leq C \max_{T^*\leq\tau\leq t} \left|\overset{1}{q}(0,\tau)-\tilde q(0,\tau)\right| + CS(t) + CS(t)\sum_{k=1}^{2}\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left|\overset{1}{u}_k(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)\right| d\tau \leq$$

$$\leq C\cdot S(t) + C\cdot S(t)\sum_{k=1}^{2}\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left|\overset{1}{u}_k(\xi_k^-(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau), \theta_k^-(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau))\right| d\tau. \tag{64.2}$$

Так как $\max_{T^*\leq t\leq T} |\overset{1}{u}_s(0,t)| \leq C$ и имеет место (20.2), то

$$\left|\frac{\partial z_s^i(x,t)}{\partial t}\right| \leq C\cdot S(t) \quad \text{для} \quad (x,t)\in \bar G_T(i_{T^*}, (i+1)_{T^*}). \tag{65.2}$$

В силу (37.2). (I.I) и равенства $\overset{1}{p}(0,t) = f(t, \overset{1}{q}(0,t))$ на $[T^*, T]$ для $s\geq i$, $(x,t)\in \bar G_T[i_{T^*}, (i+1)_{T^*}]$ имеем

$$z_s^i(x,t) = [\tilde p_s(x,t)-\overset{1}{p}_s(x,t)] + [f_s(\theta_s^-(x,t), \overset{1}{q}(0,\theta_s^-(x,t))) - f_s(\theta_s^-(x,t), \tilde q(0,\theta_s^-(x,t)))] +$$

$$+\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left[P_s[\overset{1}{p}, \overset{1}{q}] - P_s[\tilde p, \tilde q]\right]_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau. \tag{66.2}$$

Отсюда, учитывая (53.2), получим

$$|z_s^i(x,\tau_i(x))| \leq C\left(\int_{T^*}^{\tau_i(x)} S^3(\eta)\,d\eta\right)^{1/3}. \tag{67.2}$$

Из (65.2)-(67.2), (53.2) вытекает, что при $T^* < \theta \leq \bar T$

$$\|\tilde p_s - \overset{1}{p}_s\|_{\bar G_\theta[i_{T^*}, (i+1)_{T^*}]} \leq C\left(\int_{T^*}^{\theta} S^3(\eta)\,d\eta\right)^{1/3}, \quad s\geq i. \tag{68.2}$$

Суммируя (53.2), (62.2), (68.2) и применяя лемму Гронуолла, получим $S(\theta)=0$ на $(T^*, \bar T)$. В силу равенства $(\tilde p, \tilde q) = (\overset{1}{p}, \overset{1}{q})$ в

$\bar{G}_{T}(i_{T^*},(i+1)_{T^*})$, $i=1,2,\dots,r$ существуют

$$\overset{1}{p}_t=\overset{1}{u}\,,\ \overset{1}{q}_t=\overset{1}{v}\qquad (69.2)$$

Легко видеть, что $\overset{1}{u}\in C(\bar{G}_{T}[r_{T^*},(r+1)_{T^*}])$. Поэтому $\overset{1}{p}_t\in C(\bar{G}_{T}[r_{T^*},(r+1)_{T^*}])$ и $\overset{1}{u}(0,t)=\overset{1}{p}_t(0,t)$ на $[T^*,\bar{T}]$. Из определения $\overset{1}{u}(x,t)$ и (69.2) имеем (25.2). Из (25.2), (20.2) вытекает непрерывность $\overset{1}{p}_t$ в указанных в утверждении B) леммы 3.2 областях при $T=\bar{T}$, и неравенство

$$\sup_{\bar{G}_{\bar{T}}[s_0,s_{T^*})}\left|\frac{\partial\overset{1}{p}_s(x,t)}{\partial t}\right|\left|T^*-\theta_s^-(x,t)\right|^{1/2}<\infty\,,\quad s=1,2,\dots,r\qquad (70.2)$$

Из (I.I), (2.I), (70.2) следует существование и непрерывность $\overset{1}{p}_x,\overset{1}{q}_x$ в указанных в утверждениях A),B) леммы 3.2 областях при $T=\bar{T}$. Сопоставляя выражения $\overset{1}{p}_t,\overset{1}{q}_t$ и $\overset{1}{p}_x,\overset{1}{q}_x$, получим утверждение C) леммы 3.2 при $T=\bar{T}$. Если $T=\bar{T}$, то лемма 3.2 доказана. Пусть $\bar{T}-T$, $T^*+2\Delta\leq T$. В силу (34.2), (69.2) вектор-функция $f(t,\bar{q}(0,t))$ определена на $[T^*,T^*+2\Delta]$. Заменяя выше всюду $T^*+\Delta$ на $T^*+2\Delta$, установим утверждения леммы 3.2 для $T=T^*+2\Delta$. Продолжая при необходимости описанный процесс, придем к утверждению леммы 3.2. Лемма 3.2 доказана.

Теорема I.2. Имеет место следующая альтернатива: либо A) в $\bar{G}_{T}$ существует единственное р.р. $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ задачи (0.I)-(0.4); либо B) найдется такое $T^*<\theta^*\leq\bar{T}$, что при любом $\varepsilon>0$ в $\bar{G}_{\theta^*-\varepsilon}$ существует единственное р.р. $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ задачи (0.I)-(0.4), и имеет место по крайней мере одно из следующих соотношений:

$$\|\overset{1}{q}\|_{\bar{G}_{\theta^*-\varepsilon}}+\sum_{i=1}^{r}\|\overset{1}{p}_i\|_{\bar{G}_{\theta^*-\varepsilon}[i_{T^*}]}+\|\overset{1}{p}_i\|_{\bar{D}_{\theta^*-\varepsilon}[i_{T^*}]}\to\infty \text{ при } \varepsilon\to 0\qquad (71.2)$$

$$\inf_{T^*\leq t<\theta^*}\left|A_p(t,\overset{1}{p}(0,t),\overset{1}{q}(0,t))\right|=0\,.\qquad (72.2)$$

Доказательство

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в доказательстве теоремы I.I, можно установить следующие утверждения:

1) при любом $T^* < T \le \overset{\circ}{T}$ р.р.задачи (0.I)-(0.4) единственно в $\bar{G}_T$;

2. найдется такое $T^* < T' \le \overset{\circ}{T}$, что в $\bar{G}_{T'}$ существует р.р. $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ задачи (0.I)-(0.4).

Обозначим через $\mathcal{L}'$ множество таких $T^* < T \le \overset{\circ}{T}$, что в $\bar{G}_T$ существует р.р. $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ задачи (0.I)-(0.4). Нетрудно показать, что множество $\mathcal{L}'$ открытое. Пусть $\theta^* = \sup\limits_{T\in\mathcal{L}'}\{T\}$. Возможны следующие и только следующие случаи:

I) $$M_1 = \|\overset{1}{q}\|_{G_{\theta^*}} + \sum_{i=1}^{z} \|\overset{1}{p}_i\|_{G_{\theta^*}[i_{T^*}]} + \|\overset{1}{p}_i\|_{D_{\theta^*}[i_{T^*}]} < \infty \qquad (73.2)$$

$$\inf_{T^*\le t<\theta^*} |A_p(t,\overset{1}{p}(0,t),\overset{1}{q}(0,t))| > 0 \qquad (74.2)$$

II) по крайней мере одно из неравенств (73.2), (74.2) обращается в равенство.

Очевидно, что в случае II) справедливо утверждение B) теоремы I.2. Покажем, что случай I) приводит к утверждению A). Так как $A(t,\overset{1}{p}(0,t),\overset{1}{q}(0,t))\neq 0$ на $[T^*,\theta^*)$, то в силу леммы 3.2 и (73.2), (74.2)

$$|\overset{1}{p}_t(0,t)| \le C(M_1)+C(M_1)|\overset{1}{q}_t(0,t)| \quad \text{при } T^*\le t<\theta^* . \qquad (75.2)$$

Из (28.2), (73.2) имеем при $0<\theta<\theta^*$

$$\|\overset{1}{\alpha}_s\|_{\bar{D}_\theta[s_{T^*}]} \le C + C(M_1)\int_0^\theta \|\overset{1}{\alpha}_s\|_{\bar{D}_\eta[s_{T^*}]}\,d\eta \ , \quad s=1,2,\dots,z \ .$$

Следовательно, $\|\overset{1}{\alpha}_s\|_{D_{\theta^*}[s_{T^*}]} \le C(M_1)$. Аналогично устанавливается, что $\|\overset{1}{\alpha}_s\|_{G_{\theta^*}[s_{T^*}]} \le C(M_1)$. Из доказательства леммы 3.2 следует, что при любом $0<\theta<\theta^*$ $(\overset{1}{\beta},\overset{1}{q}_t)\in C(\mathfrak{N}_\theta)$, и $(\overset{1}{\beta},\overset{1}{q}_t)$ есть решение уравнения (33.2) в $\mathfrak{N}_\theta$. Принимая во внимание (20.2),(73.2), (75.2), из (33.2) получим

$$\|(\overset{1}{\beta},\overset{1}{q}_t)\|_\theta \le C(M_1)+C(M_1)\int_0^\theta \|(\overset{1}{\beta},\overset{1}{q}_t)\|_\eta\,d\eta \ , \quad 0<\theta<\theta^*$$

Следовательно,

$$\sup_{0\le\theta\le\theta^*}\|(\overset{1}{p},\overset{1}{q}_t)\|_\theta \le C(M_1). \tag{76.2}$$

Из (75.2), (76.2) вытекает, что $\overset{1}{p}(0,t),\overset{1}{q}(0,t)\in C[T^*;\theta^*]$. Отсюда в силу (I.I), (2.I), (73.2), (74.2) следует, что $(\overset{1}{p},\overset{1}{q})$ есть р.р.задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_{\theta^*}$. Так как множество $\mathcal{X}'$ открытое, то неравенство $\theta^*<\overset{0}{T}$ противоречит определению числа θ^*. Следовательно, $\theta^*=\overset{*}{T}$.

Теорема I.2 доказана.

§ 3. Непродолжаемость н.о.р.задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_T$ при $T\to T^*$

В настоящем параграфе предполагается, что

I) выполняются условия А)-Д) § 2 и $q_0(x)\in C_2[0,1]$;

П) по любому $1\le j\le m$ найдется такое натуральное число $1\le i_j\le r$, что если $1\le s\le r$, $s\ne i_j$, то $\frac{\partial Q_j}{\partial p_s}\equiv 0$ в области $\mathcal{D}$.

Ш) $\nu_k\ne\nu_p$ при $1\le k,\ p\le m,\ k\ne p$.

Лемма I.3. Пусть $(\hat{p},\hat{q})\in C(\bar{G}_T)$, $0<T\le\overset{*}{T}$, есть н.о.р. задачи (0.I)-(0.4) в $\bar{G}_T$. Тогда $\hat{q}\in C_1(\bar{G}_T)$.

Доказательство

Для $0<h\le\frac{T}{4}$, $0\le t\le T$ положим

$$p_i^h(t)=\overset{0}{p}_i(0,0)+\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}p_i(\xi)d\xi-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}p_i(\xi)d\xi,$$

где $p_i(\xi)=\hat{p}_i(0,\xi)$ при $\xi\in[0,T]$, $p_i(\xi)=\hat{p}_i(0,T)$ при $\xi\in[T,\frac{5}{4}T]$, $p_i(\xi)=\hat{p}_i(0,-\xi)+2\xi\frac{\partial\overset{0}{p}_i(0,0)}{\partial t}$ при $\xi\in[-\frac{T}{4},0]$. Легко видеть, что $p_i^h(0)=\hat{p}_i(0,0)$, $\frac{dp_i^h(0)}{dt}=\frac{\partial\overset{0}{p}_i(0,0)}{\partial t}$, и

$$\max_{0\le t\le T}|p_i^h(t)-\hat{p}_i(0,t)|\to 0 \quad\text{при}\quad h\to 0. \tag{I.3}$$

Рассмотрим в $\bar{G}_T$ систему $(I.I_h)$, $(2.I_h)$, получающуюся из (I.I), (2.I) заменой в (I.I) $p_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))$ на $p_i^h(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))$, полагая $p_i^h(0,t)=p_i^h(t)$, $p_i^h(x,0)=p_{0i}(x)$. В силу (I.3) при любом достаточно малом h в $\bar{G}_T$ существует единственное решение $(p^h,q^h)\in C(\bar{G}_T)$ системы $(I.I_h)$, $(2.I_h)$, и

$$\|p^h-\hat p\|_{\bar G_T}+\|q^h-\hat q\|_{\bar G_T}\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0 \tag{2.3}$$

(см. [6], теорему I.3). Заметим, что (p^h, q^h) будет н.о.р. задачи (0.I)–(0.4) в $\bar G_T$, если положить $A_i(t,p,q)\equiv p_i(0,t)-p_i^h(t)$. Следовательно, по лемме I.I вектор-функция $(p^h, q^h)\in C_1(\bar G_T)$ удовлетворяет системе (0.I)–(0.2) в $\bar G_T$, и

$$\frac{\partial q_j^h(x,t)}{\partial t}=\left[\nu_j q'_{0,j}(\xi)+Q_j(\xi,0,p_0(\xi),q_0(\xi))\right]_{\xi=x+\nu_j t}+$$
$$+\int_0^t \mathcal{O}_j\left[p^h,q^h,\frac{\partial p^h}{\partial t},\frac{\partial q^h}{\partial t}\right]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)}d\tau \quad , j=1,2,\dots,m. \tag{3.3}$$

Принимая во внимание (0.I), имеем

$$\frac{dQ_j(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau,p^h(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau),q^h(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau))}{d\tau}=$$
$$=\left[(1+\lambda_{i_j}^{-1}\nu_j)\frac{\partial Q_j[p^h,q^h]}{\partial p_{i_j}}\frac{\partial p^h_{i_j}}{\partial t}+\frac{\partial Q[p^h,q^h]}{\partial q}\frac{\partial q^h}{\partial t}+S_j[p^h,q^h]\right]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)}, \tag{4.3}$$

где функция $S_j\in C_1(\vartheta)$. Исключая из (3.3) с помощью (4.3) член $\frac{\partial Q_j[p^h,q^h]}{\partial p_{i_j}}\frac{\partial p_{i_j}}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial q_j^h(x,t)}{\partial t}=\left[\nu_j q'_{0,j}(\xi)+\frac{\nu_j}{\lambda_i+\nu_j}Q_j(\xi,0,p_0(\xi),q_0(\xi))\right]_{\xi=x+\nu_j t}+\frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_{i_j}+\nu_j}Q_j[p^h,q^h]_{(x,t)}+$$
$$+\int_0^t\left[R_j[p^h,q^h]+c_j\frac{\partial Q_j[p^h,q^h]}{\partial q}\frac{\partial q^h}{\partial t}\right]_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)}d\tau, \quad (x,t)\in\bar G_T, \tag{5.3}$$

где $c_j=\nu_j[\nu_j+\lambda_{i_j}]^{-1}$, $R_j\in C_1(\vartheta)$. Заменяя в (5.3) p^h, q^h, q^h_t на $\hat p, \hat q, v$, получим систему уравнений

$$v=\Omega(v) \tag{6.3}$$

тип Вольтерра. Нетрудно показать (см. [6]), что в $\bar G_T$ существует единственное решение $\hat v\in C(\bar G_T)$ уравнения (6.3), и в силу (2.3)

$$\|\hat v-q^h_t\|_{\bar G_T}\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{7.3}$$

Из (2.3),(7.3) вытекает, что в $\bar G_T$ существует $\hat q_t = \hat v$. Для $(x,t)\in \bar G_T$ положим $\hat w(x,t) = N^{-1}\hat v(x,t) - N^{-1}Q(x,t,\hat p(x,t),\hat q(x,t))$.

Легко видеть, что

$$\|\hat w - q_x^h\|_{\bar G_T} \to 0 \qquad \text{при} \quad h\to 0 . \tag{8.3}$$

Из (2.3),(8.3) следует, что в $\bar G_T$ существует $\hat q_x = \hat w$. Лемма I.3 доказана.

Лемма 2.3. Введенная в условии E) § 2 величина $\Gamma_0 \neq 0$.

Доказательство

Из доказательства леммы I.3 следует, что в G_{T*} $\mathring q_t$ удовлетворяет уравнениям (5.3_0), получающимся из (5.3) заменой p^h, q^h, q_t^h на $\mathring p$, $\mathring q$, $\mathring q_t$. В силу леммы I.2 и неравенств (3.2),(4.2) $\int_0^t R_j[\mathring p,\mathring q]_{(x_j^+(\tau,x,t),\tau)}d\tau \in C_1(\bar G_{T*})$. Для $(\xi,\eta)\in \bar\Pi_{T*}$ положим

$$f_j(\xi,\eta) = c_j\int_0^\eta \frac{\partial Q_j(\sigma,\tau,\mathring p(\sigma,\tau),\mathring q(\sigma,\tau))}{\partial q}\,\frac{\partial \mathring q(\sigma,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\sigma=-\nu_j\tau+\xi} d\tau .$$

Отметим, что в $\bar\Pi_{T*}$ существует $\dfrac{\partial f_j(\xi,\eta)}{\partial\eta}\in C(\bar\Pi_{T*})$. В силу (5.$3_0$) для $(x,t)\in \bar G_{T*}$

$$\frac{\partial \mathring q_s(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda_{i_s}}{\lambda_{i_s}+\nu_s}Q_s[\mathring p,\mathring q]_{(x,t)} + f_s(x+\nu_s t,t) + e_s(x,t),\quad s=1,2,\dots,m \tag{9.3}$$

где $e_s\in C_1(\bar G_{T*})$. Исключая с помощью (9.3) из правой части (5.3_0) $\dfrac{\partial \mathring q_s}{\partial t}$ при $s\neq j$, получим

$$\frac{\partial \mathring q_j(x,t)}{\partial t} = z_j(x,t) + \frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_{i_j}+\nu_j}Q_j[\mathring p,\mathring q]_{(x,t)} + c_j\int_0^t \frac{\partial Q[\mathring p,\mathring q]}{\partial q_j}\,\frac{\partial \mathring q_j}{\partial t}_{(x_j^+(\tau,x,t),\tau)}d\tau +$$
$$+ c_j\int_0^t \sum_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^m \frac{\partial Q_j(\xi,\tau,\mathring p(\xi,\tau),\mathring q(\xi,\tau))}{\partial q_p} f_p(\xi+\nu_p\tau,\tau)\Big|_{\xi=x_j^+(\tau,x,t)}d\tau,\quad j=1,2,\dots,m, \tag{10.3}$$

где $z_j\in C_1(\bar G_{T*})$. Рассмотрим функцию

$$J_{jp}(x,t) = \int_0^t \frac{\partial Q_j(\xi,\tau,\mathring p(\xi,\tau),\mathring q(\xi,\tau))}{\partial q_p} f_p(\xi+\nu_p\tau,\tau)\Big|_{\xi=x_j^+(\tau,x,t)}d\tau .$$

Переходя к интегрированию по $\eta = x_j^+(\tau,x,t)+\nu_p\tau$, нетрудно показать, что при $p\neq j$ $J_{jp}\in C_1(\bar G_{T*})$. Таким образом, в $\bar G_{T*}$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{q}_j(x,t)}{\partial t} = U_j[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]_{(x,t)} + C_j \int_0^t \frac{\partial Q_j[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial q_j} \left.\frac{\partial \overset{\circ}{q}_j}{\partial t}\right|_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)} d\tau, \qquad (11.3)$$

где функция $U_j \in C_1(\vartheta)$. Из (11.3) вытекает, что

$$\frac{\partial \overset{\circ}{q}_j(x,t)}{\partial t} = U_j[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]_{(x,t)} + C_j \int_0^t \exp\left\{C_j \int_\tau^t \left.\frac{\partial Q_j(\xi,\sigma,\overset{\circ}{p}(\xi,\sigma),\overset{\circ}{q}(\xi,\sigma))}{\partial q_j}\right|_{\xi=\varkappa_j^+(\sigma,x,t)} d\sigma\right\} \times$$

$$\times U_j[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}] \left.\frac{\partial Q_j[\overset{\circ}{p},\overset{\circ}{q}]}{\partial q_j}\right|_{(\varkappa_j^+(\tau,x,t),\tau)} d\tau. \qquad (12.3)$$

Легко видеть, что второе слагаемое в правой части (12.3) есть непрерывно дифференцируемая функция в $\overline{G}_T$. Учитывая, что $\overset{\circ}{p}^k(0,t) = g^k(t,\overset{\circ}{p}^\ell(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t))$ при $k \neq \ell$, из (12.3) получим

$$\frac{\partial \overset{\circ}{q}_j(0,t)}{\partial t} = \tilde{U}_j(t,\overset{\circ}{p}^\ell(0,t),\overset{\circ}{q}(0,t)), \quad j=1,2,\dots,m, \qquad (13.3)$$

где $\tilde{U}_j \in C_1(\vartheta)$. Для $0 \le t \le T^*$, $-\infty < p^\ell < +\infty$ положим

$$F_1(t,p^\ell) = H_t(t,p^\ell,\overset{\circ}{q}(0,t)) + H_q(t,p^\ell,\overset{\circ}{q}(0,t))\,\tilde{U}(t,p^\ell,\overset{\circ}{q}(0,t)),$$

$$F_2(t,p^\ell) = H_{p^\ell}(t,p^\ell,\overset{\circ}{q}(0,t)).$$

Заметим, что $F_i \in C_1([0,T]\times(-\infty,\infty))$, $i=1,2$, и

$$\frac{d\overset{\circ}{p}^\ell(0,t)}{dt} = -F_1(t,\overset{\circ}{p}^\ell(0,t))[F_2(t,\overset{\circ}{p}^\ell(0,t))]^{-1} \text{ при } 0 \le t < T^* \qquad (14.3)$$

Пусть $s = \int_0^t \frac{d\eta}{\varphi(\eta)}$, $s^* = \int_0^{T^*} \frac{d\eta}{\varphi(\eta)}$ (согласно (3.2) $s^* < \infty$), $t = t(s)$ — функция, обратная к $s = s(t)$, $v(s) = \overset{\circ}{p}^\ell(0,t(s))$, $v^* = v(s^*)$. Легко видеть, что $t(s), v(s) \in C_1[0,s^*]$, и $(t(s), v(s))$ — решение на $[0,s^*]$ задачи

$$\frac{d\tau}{ds} = F_2(\tau,w), \quad \frac{dw}{ds} = -F_1(\tau,w), \quad \tau(s^*) = T^*, \quad w(s^*) = v^*. \qquad (15.3)$$

В силу (15.2), (40.1)

$$F_2(t(s),v(s)) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le s \le s^* \qquad (16.3)$$

Допустим теперь, что $\Gamma_0 = 0$. Тогда, очевидно, $F_i(T^*, v^*) = 0$ ($i = 1,2$), и в силу единственности решения задачи (I5.3) $t(s) \equiv T^*$, $v(s) = v^*$ на $[0, s^*]$, что противоречит (I6.3). Следовательно, $\Gamma_0 \neq 0$.

Лемма 2.3 доказана.

Теорема I.3. Каково бы ни было $\Delta > 0$ в $\bar{G}_{T^*+\Delta}$ не существует ни одного н.о.р. задачи (0.I)-(0.4).

Доказательство

Пусть при некотором $\Delta > 0$ в $\bar{G}_{T^*+\Delta}$ существует н.о.р. $(\tilde{p}, \tilde{q})$ задачи (0.I)-(0.4). Так как $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (\mathring{p}, \mathring{q})$ в $\bar{G}_{T^*}$ (см. доказательство теоремы I.I) и $\tilde{q} \in C_1(\bar{G}_{T^*+\Delta})$ по лемме I.3, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для $T^* - \varepsilon \le t \le T^* + \varepsilon$ должно выполняться неравенство (2I.2), которое не может иметь место одновременно для $t < T^*$ и для $t > T^*$.

Теорема I.3 доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Р.Курант
Уравнения с частными производными, 1964, Мир.

2. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко
Системы квазилинейных уравнений, 1968, Наука.

3. В.Э. Аболиня , А.Д.Мышкис
Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости
Матем.сб., т.50 (92): 4, 1960, 423-442.

4. А.Д.Мышкис
О максимальной области разрешимости смешанной задачи для почти линейной гиперболической системы с двумя независимыми переменными,
Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, 1963, Новосибирск

5. В.Н.Гольдберг
Разрывные решения нелинейных смешанных задач для почти линейных гиперболических систем на плоскости,
ДАН СССР, 195, № 3, 1970, 532-535

6. В.Н.Гольдберг, Ю.И.Неймарк
Корректность постановки нелинейной смешанной задачи для волнового уравнения на плоскости,
Матем.сб., т.67 (109): I, 1965, 16-54

7. Э.Беккенбах, Р.Беллман
Неравенства, 1965, Мир

8. В.Н.Гольдберг
Возникновение разрывов при продолжении решений нелинейных смешанных задач для гиперболических уравнений на плоскости
ДАН СССР, 182, № 6, 1968, 1257-1260.

9. В.Н.Гольдберг
Разрывные решения нелинейных смешанных задач для гиперболических уравнений на плоскости I,П
Математический сборник (в печати)

10. В.Н.Гольдберг
Разрывные решения нелинейных смешанных задач для почти линейн... гиперболических систем на плоскости П.
Матем.сборник (в печати)