Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 14

В.Н.Гольдберг

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ II

г.Горький,
1971 г.

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ II.

В.Н. Гольдберг

В настоящей статье+) исследуется задача (0,I)-(0,3), (0,9), (0,I0) (задача $\mu \neq 0$). Предполагается, что

I) выполнены условия А) - Ж), сформулированные в § 2,

II) имеет место утверждение А) теоремы I.2,

III) $\mu = \mu_\ell [a_\ell^{(1)} - \lambda_{i^*}^{-1} a_\ell^{(2)}] > 0$, где $1 \leq i^* \leq \ell$ таково, что $\rho^\ell = \rho^{\sigma_{i^*-1}+\varkappa}$ при некотором $1 \leq \varkappa^* \leq k_{i^*}$

Введем обозначения.

I. Положим $\rho(0,x,t) = \overset{1}{\rho}(x,t)$, $q(0,x,t) = \overset{1}{q}(x,t)$, $\alpha_i(0,x,t) = \overset{1}{\alpha}_i(x,t)$, $\beta_i(0,x,t) = \overset{1}{\beta}_i(x,t)$.

2. Пусть матрица $\mathfrak{A} = \|\alpha_{u,v}(x,t,\rho,q)\|$ определена в области ϑ, и $\rho = \rho(\mu,x,t)$, $q = q(\mu,x,t)$, $\mu \geq 0$. Положим

$$\mathfrak{A}[\mu,x,t] = \|\alpha_{u,v}(x,t,\rho(\mu,x,t),q(\mu,x,t))\|.$$

3. Пусть при $\mu = 0$ и при некотором $\mu > 0$ в точке $(x,t) \in \overline{G}_f$ определены матрицы $U_k[\mu,x,t]$, $k = 1,2$. Положим

$$\nabla U_k[x,t] = U_k[\mu,x,t] - U_k[0,x,t]\,;\; U_1 U_2[\mu,x,t] = U_1[\mu,x,t]\, U_2[\mu,x,t].$$

4. Пусть при $0 < \mu \leq \mu^* < \infty$ определена функция $0 \leq \tau(\mu) < T \leq \hat{T}$, и $\tau(\mu) \to \tau_0 < T$ при $\mu \to 0$. Через $\omega_\mu(\tau(\mu),T;t)$ обозначаются неотрицательные функции t, непрерывные на $[\tau(\mu),T]$ при любом $0 < \mu \leq \mu^*$ и такие, что

а) $\omega_\mu(\tau(\mu),T;t) < C(T) < \infty$ при $0 < \mu \leq \mu^*$, $\tau(\mu) \leq t \leq T$;

б) при любом $\tau_0 < \sigma < T$ $\max\limits_{\sigma \leq t \leq T} \omega_\mu(\tau(\mu),T;t) \to 0$ когда $\mu \to 0$.

5. $\omega(z_1,z_2,\dots,z_M)$ – неотрицательные функции, стремящиеся к нулю, когда $\sum\limits_{s=1}^{M} |z_s| \to 0$.

+) Статья является продолжением работы [I].

Ниже часто используется известная [2,3,4].

Лемма 0. Пусть $u(t)$, $v(t)$ кусочно-непрерывные функции при $t_0 \le t \le t_1 < \infty$, и

$$u(t) \le v(t) + M\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau \qquad \text{при } t_0 < t \le t_1,$$

где постоянная $0 < M < \infty$. Тогда

$$u(t) \le v(t) + M\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, e^{M(t-\tau)}\, d\tau \qquad \text{при } t_0 < t \le t_1 .$$

§ 4. Существование, единственность и непрерывность по μ при $\mu = 0$ решения задачи ($\mu \ne 0$) в G_{T*}.

1. Определение 1.4. Вектор-функция $(p,q) \in C(\bar G_T)$, $0 < T \le \mathring{T}$, $p_i \in C_1(\bar G_T[i_0])$, $p_i \in C_1(\bar D_T[i_0])$ $(i = 1,2,\dots,r)$, $q \in C_1(\bar G_T)$, удовлетворяющая (0.1)-(0.3), (0.9), (0.11) в $\bar G_T$ называется решением задачи ($\mu \ne 0$) в $\bar G_T$.

Пусть (p,q) есть решение задачи ($\mu \ne 0$) в $\bar G_T$, $0 < T \le \mathring{T}$. В силу (0.1), (0.2), (0.9), (0.11)

$$\mu \frac{\partial p^{\ell}(0,t)}{\partial t} + H(t, p(0,t), q(0,t)) + \mu\Big[\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial q_j(0,t)}{\partial t} + S(t, p(0,t), q(0,t))\Big] = 0, \tag{1.4}$$

где функция $S \in C_1(\vartheta)$. Из (1.4), (0.2), (0.3) имеем

$$p^{\ell}(0,t) = p_0^{\ell}(0) - \frac{1}{\mu}\int_0^t H(\tau, p(0,\tau), q(0,\tau))\,d\tau - \int_0^t S(\tau, p(0,\tau), q(0,\tau))\,d\tau - \sum_{j=1}^{m} c_j \Big[q_{0,j}(\vartheta_j t) - q_{0,j}(0) + \int_0^t Q_j[p,q]_{(x_j^+(\tau,0,t),\tau)}\, d\tau \Big] \tag{2.4}$$

Определение 2.4. Вектор-функция $(p,q) \in \overset{\circ}{C}(\bar G_T)$, $0 < T \le \mathring{T}$, удовлетворяющая (0.3) при $x \in [0,1]$, (0.9), (2.4) при $t \in [0,T]$ и (1.1), (2.1) в $\bar G_T$, называется н.о.р. задачи ($\mu \ne 0$) в $\bar G_T$.

Лемма 1.4. При любом $\mu \ne 0$ имеет место альтернатива: либо A) в $\bar G_{\mathring{T}}$ существует единственное н.о.р. задачи ($\mu \ne 0$), либо B) найдется такое $0 < \theta^* \le \mathring{T}$, что при любом $\varepsilon > 0$ в $\bar G_{\theta^* - \varepsilon}$ существует единственное н.о.р. $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ задачи ($\mu \ne 0$), и

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar G_{\theta^*-\varepsilon}} + \|q(\mu,\cdot)\|_{\bar G_{\theta^*-\varepsilon}} \to \infty \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{3.4}$$

Действительно, обозначим через $\varphi^{\ell}(t;p,q)$ правую часть уравнения (2.4), положим $\varphi^{s}(t;p,q)=g^{s}(t,\varphi^{\ell}(t;p,q),p,q)$ и рассмотрим систему

$$(p,q)=\Omega\,(p,q) \tag{4.4}$$

получающуюся из (I.I), (2.I) заменой в (I.I) члена $p_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))$ при $t>\lambda_i^{-1}x$ на $\varphi_i(\theta_i^-(x,t);p,q)$. Легко видеть, что $(p,q)\in C(\bar G_\theta)$, $0<\theta<\overset{\circ}{T}$, есть н.о.р. задачи ($\mu\neq 0$) в $\bar G_\theta$ тогда и только тогда, когда (p,q) удовлетворяет (4.4) в $\bar G_\theta$. В силу (0.6) $\Omega(p,q)\in C(\bar G_\theta)$ если $(p,q)\in C(\bar G_\theta)$. Применяя к (4.4) теорему существования и единственности решения уравнений типа Вольтерра (см., например, [5], теоремы I.I, I.2), получим утверждение леммы I.4.

Лемма 2.4. Пусть $(p(\mu,.),q(\mu,.))$ есть н.о.р. задачи ($\mu\neq 0$) в $\bar G_\theta$, $0<\theta\leq\overset{\circ}{T}$. Тогда $(p(\mu,.),q(\mu,.))$ есть решение задачи ($\mu\neq 0$) в $\bar G_\theta$.

Действительно, в силу (2.4), (0.9) $p(\mu,0,t)=\psi(t,q(\mu,0,t))$, где $\psi\in C_1(\vartheta)$. Пользуясь теперь замечанием к лемме 2.I, автоматически получим утверждение леммы 2.4.

Лемма 3.4. Пусть в $\bar G_T$, $0<T\leq\overset{\circ}{T}$, существует решение $(p(\mu,.),q(\mu,.))$ задачи ($\mu\neq 0$), и $\|p(\mu,.)\|_{\bar G_T}+\|q(\mu,.)\|_{\bar G_T}\leq M<\infty$. Тогда для любого $1\leq i\leq 7$ найдутся такие матрицы $\alpha_i(\mu,x,t)$, $\beta_i(\mu,x,t)\in C(\bar G_T)$ размера $k_i\times k_i$ и $k_i\times 1$ соответственно, что какова бы ни была точка $(x,t)\in\bar G_T$, $x\neq x_i^-(t,0,0)$

$$\frac{\partial p_i(\mu,x,t)}{\partial t}=\alpha_i(\mu,x,t)\,\frac{\partial p_i(\mu,\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))}{\partial t}+\beta_i(\mu,x,t) \tag{5.4}$$

$$\|\alpha_i(\mu,.)\|_{\bar G_T}<C(M),\quad 1\leq i\leq 7 \tag{6.4}$$

$$\|q_t(\mu,.)\|_{\bar G_t}+\sum_{i=1}^{7}\|\beta_i(\mu,.)\|_{\bar G_t}\leq C(M)\Big[1+\int_0^t|p_t^{\ell}(\mu,0,\eta)|\,d\eta\Big],\quad 0<t\leq T \tag{7.4}$$

Доказательство

Рассмотрим уравнение

$$\alpha_i(\mu,x,t)=E+\int_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\left(\frac{\partial P_i[\mu,.]}{\partial p_i}\,\alpha_i(\mu,.)\right)_{(x_i^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau,\quad 1\leq i\leq 7, \tag{8.4}$$

где E – единичная матрица размера $k_i \times k_i$. Очевидно, что в $\bar{G}_T$ существует единственное решение $\alpha_i(\mu,.) \in C(\bar{G}_T)$ уравнения (8.4). Пользуясь (5.4), определим в $\bar{G}_T(i_0) \cup \bar{D}_T(i_0)$ матрицу $\beta_i(\mu,x,t)$. Заметим, что $\beta_i(\mu,.)$ непрерывна в области ее определения, и

$$\beta_i(\mu,x,t) = \int_{\theta_i^-(x,t)}^{t} \left\{ \frac{\partial P_i[\mu,.]}{\partial p_i} \beta_i(\mu,.) + \frac{\partial P_i[\mu,.]}{\partial t} + \frac{\partial P_i[\mu,.]}{\partial q} \frac{\partial q(\mu,.)}{\partial t} \right\}_{(x_i^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau + \tag{9.4}$$

$$+ \int_{\theta_i^-(x,t)}^{t} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{z} \frac{\partial P_i[\mu,\xi,\tau]}{\partial p_s} \left[\alpha_s(\mu,\xi,\tau) \frac{\partial p_s(\mu,\xi_s^-(\xi,\tau),\theta_s^-(\xi,\tau))}{\partial t} + \beta_s(\mu,\xi,\tau) \right] \Bigg|_{\xi = x_i^-(\tau,x,t)} d\tau$$

(см. вывод равенства (9.2). Полагая в (9.4) $x - \lambda_i t \pm 0$, нетрудно показать, что $\beta_i(\mu,.)$ непрерывна на характеристике $x = \lambda_i t$. Замечая, что $\frac{\partial q_j(\mu,.)}{\partial t}$ удовлетворяет в $\bar{G}_T$ (3.I)($\beta, \mathring{q}, \mathring{p}_t, \mathring{q}_t$ следует заменить на $p(\mu,.), q(\mu,.), p_t(\mu,.), q_t(\mu,.)$), имеем

$$\left| \frac{\partial q_j(\mu,x,t)}{\partial t} \right| \leq C(M) \left\{ 1 + \int_0^t \left[|p_t(\mu,\xi,\tau)| + |q_t(\mu,\xi,\tau)| \right]_{\xi = x_j^+(\tau,x,t)} d\tau \right\}. \tag{10.4}$$

Обозначим через $\sigma(t)$ левую часть (7.4). В силу (5.4), (6.4), (9.4), (10.4) для $(x,t) \in \bar{G}_T$

$$\left| \frac{\partial q_j(\mu,x,t)}{\partial t} \right| \leq C(M) \left\{ 1 + \int_0^t \sigma(\eta) d\eta + \int_0^t \sum_{i=1}^{z} \left| \frac{\partial p_i(\mu,\xi_i^-(\xi,\tau),\theta_i^-(\xi,\tau))}{\partial t} \right|_{\xi = x_j^+(\tau,x,t)} d\tau \right\} \tag{11.4}$$

$$|\beta_i(\mu,x,t)| \leq C(M) \left\{ \int_0^t \sigma(\eta) d\eta + \int_{\theta_i^-(x,t)}^{t} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{z} \left| \frac{\partial p_s(\mu,\xi_s^-(\xi,\tau),\theta_s^-(\xi,\tau))}{\partial t} \right|_{\xi = x_i^-(\tau,x,t)} d\tau \right\} \tag{12.4}$$

Из (11.4), (12.4) вытекает, что при $0 \leq t \leq T$

$$\sigma(t) \leq C(M) \left\{ 1 + \int_0^t \sigma(\eta) d\eta + \int_0^t \sum_{k=1}^{n_1} |p_t^k(\mu,0,\eta)| d\eta \right\}. \tag{13.4}$$

Отсюда, учитывая (0.9) получим

$$\sigma(t) \leq C(M) \left\{ 1 + \int_0^t \sigma(\eta) d\eta + \int_0^t |p_t^e(\mu,0,\eta)| d\eta \right\}. \tag{14.4}$$

Применяя к (14.4) лемму 0, придем к (7.4). Лемма 3.4 доказана.

Пусть $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ есть решение задачи $(\mu \neq 0)$ в $\bar{G}_T$, $0 < T \leq \overset{\circ}{T}$. Для $\mu \geq 0$ обозначим

$$H_t^{\mu}(t) = H_t(t, p^{\ell}(\mu,0,t), q(\mu,0,t)),\quad h^{\mu}(t) = H_{p^{\ell}}(t, p^{\ell}(\mu,0,t), q(\mu,0,t)),$$

$$H_q^{\mu}(t) = H_q(t, p^{\ell}(\mu,0,t), q(\mu,0,t)),\quad S^{\mu}(t) = S(t, p^{\ell}(\mu,0,t), q(\mu,0,t)),$$

$$F^{\mu}(t) = -\Big[\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t} + S^{\mu}(t)\Big].$$

Пусть $\varphi(t) \in C[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Положим

$$J_{t_1}^{t_2}[\varphi] = \frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_2} \varphi(\tau)\exp\Big\{-\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^{t} h^{\mu}(\eta)\,d\eta\Big\}\,d\tau, \quad \mu \neq 0.$$

Лемма 4.1. Пусть $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ есть решение задачи $(\mu \neq 0)$ в $\bar{G}_T$, $0 < T \leq \overset{\circ}{T}$. Тогда при любых $0 \leq t_1 \leq t \leq T$

$$p_t^{\ell}(\mu,0,t) = [p_t^{\ell}(\mu,0,t_1) - F^{\mu}(t_1)]\exp\Big\{-\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t} h^{\mu}(\eta)\,d\eta\Big\} + F^{\mu}(t) - \tag{15.4}$$
$$- J_{t_1}^{t}\big[F^{\mu}h^{\mu} + H_t^{\mu} + H_q^{\mu}(t)\, q_t(\mu,0,t)\big].$$

Действительно, пусть функции $F_s(t) \in C_1[t_1, T]$ $(s = 1, 2, \ldots)$, и $\|F_s - F^{\mu}\|_{C[t_1,T]} \to 0$ при $s \to \infty$. Если s достаточно велико, то на $[t_1, T]$ существует решение $z_s \in C_2$ задачи

$$\mu z' + H(t, z, q(\mu,0,t)) = \mu F_s(t), \quad z(t_1) = p^{\ell}(\mu,0,t_1) \tag{16.4}$$

и $\|z_s(t) - p^{\ell}(\mu,0,t)\|_{C_1[t_1,T]} \to 0$ при $s \to \infty$. Функция $u(t) = z_s'(t)$ удовлетворяет уравнению первого порядка, получающемуся из уравнения (16.4) дифференцированием по t, и начальному условию $u(t_1) = z_s'(t_1)$. Нетрудно показать, что $z_s'(t)$ можно представить в виде (15.4), где $p_t^{\ell}(\mu,0,t_1)$ и $F^{\mu}(t)$ следует заменить на $z_s'(t_1)$ и $F_s(t)$. Отсюда при $s \to \infty$ имеем (15.4).

Теорема 1.4. По любому $0 < T < T^*$ найдется такое $\mu_1(T) > 0$, что при $0 < \mu < \mu_1(T)$ в $\bar{G}_T$ существует единственное решение $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu \neq 0)$, и

$$\|\nabla p\|_{\bar{G}_T} + \|\nabla q\|_{\bar{G}_T} \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0 \tag{17.4}$$

Доказательство

Зафиксируем произвольное $0<T<T^*$. В силу леммы 2.4 теорему достаточно доказать для н.о.р. задачи ($\mu \neq 0$) в $\bar{G}_T$. Согласно (15.2) $h^0(t) \geq \gamma > 0$ на $[0,T]$. Выберем такие $0<\sigma_1, \sigma_2<1$, что для любой точки $(t,q) \in \mathfrak{M}_{\sigma_1} = \{(t,q): 0 \leq t \leq T,\ \max_j |q_j - \bar{q}_j(0,t)| \leq \sigma_1\}$ уравнение $H(t,p^\ell,q)=0$ имеет решение $p^\ell = f^\ell(t,q) \in C_1(\mathfrak{M}_{\sigma_1})$, $\bar{p}^\ell(0,t) = -f^\ell(t,\bar{q}(0,t))$, и оно единственно на сегменте $|p^\ell - \bar{p}^\ell(0,t)| \leq \sigma_2$. Зафиксируем произвольное $0<\varkappa<\sigma_1$ такое, что $H_{p^\ell}(t,p^\ell,q) \geq \frac{1}{2}\gamma$, если $(t,q) \in \mathfrak{M}$, $|p^\ell - \bar{p}^\ell(0,t)| \leq \varkappa$. Положим

$$C^* = \max_j \left\{ \max_{\mathfrak{M}_{\sigma_1}} \left| \frac{\partial f^\ell(t,q)}{\partial q_j} \right| \right\}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varkappa}{4(1+2mC^*)}.$$

Выберем любое $\mu>0$. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество таких $0<\tau \leq T$, что в $\bar{G}_\tau$ существует н.о.р. $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ задачи ($\mu \neq 0$),

$$\|\nabla p\|_{\bar{G}_\tau} \leq \varepsilon_0, \quad \|\nabla q\|_{\bar{G}_\tau} \leq \varepsilon_0. \tag{1}$$

Так как $\nabla p(x,0) = \nabla q(x,0) = 0$ и имеет место лемма 1.4, то $\mathcal{L}$ не пусто. Выберем произвольное $\theta_0 \in \mathcal{L}$. В силу (7.4), (18.4)

$$|F^\mu(t)| \leq C[1+|q_t(\mu,0,t)|] \leq C\left[1+\int_0^t |p_t^\ell(\mu,0,\eta)|\,d\eta\right], \quad 0 \leq t \leq \theta_0. \tag{1}$$

Из (15.4), учитывая лемму 2.4 и (1.4), (0.6), (7.4), (18.4), (19.4) получим

$$|p_t^\ell(\mu,0,t)| \leq C\left[1+\int_0^t |p_t^\ell(\mu,0,\eta)|\,d\eta\right] \text{ при } 0 \leq t \leq \theta_0.$$

Следовательно, $|p_t^\ell(\mu,0,t)| \leq C$ на $[0,\theta_0]$, и в силу (7.4) $|q_t(\mu,0,t)| \leq$
Следуя А.Н. Тихонову [6], рассмотрим функцию $z^2(t) = [p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))]^2$. Учитывая (1.4), при $0 \leq t \leq \theta_0$ имеем

$$\frac{dz^2(t)}{dt} = -\frac{2}{\mu}[p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))]\, H(t,p^\ell(\mu,0,t),q(\mu,0,t)) + a(\mu,t), \tag{2}$$

где $|a(\mu,t)| \leq C$ на $[0,\theta_0]$. Функция

$$H(t,p^\ell(\mu,0,t),q(\mu,0,t)) = H_{p^\ell}(t, f^\ell(t,q(\mu,0,t)) + \rho[p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))], q) \times [p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))], \quad 0<\rho<1.$$

Следовательно,
$$\frac{dz^2(t)}{dt} \le -\frac{\gamma}{\mu} z^2(t) + C. \qquad (21.4)$$
Так как $z^2(0)=0$, то в силу (21.4) $z^2(t) \le \mu C$ на $[0,\theta_0]$. Поэтому
$$|\nabla p^\ell(0,t)| \le \mu^{1/2} C + C|\nabla q(0,t)| \text{ при } 0 \le t \le \theta_0. \qquad (22.4)$$
Покажем, что при $0 < \theta \le \theta_0$
$$\|\nabla p\|_{\bar{G}_\theta} \le C \max_{0\le t\le\theta} |\nabla p(0,t)|, \quad \|\nabla q\|_{\bar{G}_\theta} \le C\int_0^\theta \max_{0\le\xi\le\eta} |\nabla p(0,\xi)|d\eta. \qquad (23.4)$$
Из (I.I), (2.I) в силу (I8.4) для $0<\theta\le\theta_0$ имеем
$$\|\nabla p\|_{\bar{G}_\theta} \le \max_{0\le t\le\theta} |\nabla p(0,t)| + C\int_0^\theta \rho(\eta)d\eta, \quad \|\nabla q\|_{\bar{G}_\theta} \le C\int_0^\theta \rho(\eta)d\eta, \qquad (24.4)$$
где $\rho(\eta)=\|\nabla p\|_{\bar{G}_\eta} + \|\nabla q\|_{\bar{G}_\eta}$. Складывая неравенства (24.4) и применяя лемму 0, оценим $\rho(\theta)$. Подставляя оценку $\rho(\theta)$ в (24.4), приходим к (23.4). В силу (0.9), (I8.4), (22.4), (23.4) при $0<\theta\le\theta_0$
$$\max_{0\le t\le\theta} |\nabla p(0,t)| \le C\mu^{1/2} + C\max_{0\le t\le\theta}|\nabla q(0,t)| \le C\mu^{1/2} + C\int_0^\theta \max_{0\le\xi\le\eta}|\nabla p(0,\xi)|d\eta.$$
Отсюда $\max_{0\le t\le\theta}|\nabla p(0,t)| \le C\mu^{1/2}$, и согласно (23.4)
$$\|\nabla p\|_{\bar{G}_\theta} \le \tilde{C}\mu^{1/2}, \quad \|\nabla q\|_{\bar{G}_\theta} \le \tilde{C}\mu^{1/2} \quad \text{при } 0<\theta\le\theta_0. \qquad (25.4)$$
Положим $\mu_1(T) = \frac{\varepsilon_0^2}{4\tilde{C}^2}$. Тогда если $0<\mu<\mu_1(T)$, то
$$\|\nabla p\|_{\bar{G}_{\theta_0}} < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \|\nabla q\|_{\bar{G}_{\theta_0}} < \frac{\varepsilon_0}{2}. \qquad (26.4)$$
Из леммы I.4 и (I8.4), (26.4) вытекает, что при любом $0<\mu<\mu_1(T)$ $T\in\mathcal{L}$, и, следовательно (25.4) имеет место при $\theta=T_0$. Теорема I.4 доказана.

Пусть $0<\tilde{\mu}_1(T)\le\mu_1(T)$ таково, что при $0<\mu\le\tilde{\mu}_1(T)$
$$\|\nabla p\|_{\bar{G}_T} + \|\nabla q\|_{\bar{G}_T} < 1. \qquad (27.4)$$
Лемма 5.4. Пусть в $\bar{G}_T$, $0<T\le\overset{\circ}{T}$, $T\ne T^*$ при $0<\mu\le\overset{\circ}{\mu}<\infty$ существует решение $(p(\mu,.), q(\mu,.))$ задачи $(\mu\ne 0)$, и
$$\max_{\theta(\mu)\le t\le T}[|\nabla p(0,t)| + |\nabla q(0,t)|] \to 0 \quad \text{при } \mu\to 0, \qquad (28.4)$$

где $\theta(\mu)=0$ на $(0,\overset{\circ}{\mu}]$ если $T<T^*$ и $T^*\le\theta(\mu)<T$ на $(0,\overset{\circ}{\mu}]$, $\theta(\mu)\to T^*$ при $\mu\to 0$ если $T>T^*$. Тогда найдется такое число $0<\mu(T)\le\overset{\circ}{\mu}$, что при $0<\mu\le\mu(T)$, $\theta(\mu)\le t\le T$

$$|\nabla p_t^{\ell}(0,t)|<|p_t^{\ell}(\mu,0,\theta(\mu))-F^{\mu}(\theta(\mu))|e^{-\frac{\gamma}{\mu}(t-\theta(\mu))}+ \tag{29.4}$$

$$+\omega_{\mu}(\theta(\mu),T;t)+C(T)\max_{\theta(\mu)\le\tau\le t}|\nabla q_t(0,\tau)|,$$

где $\gamma=\frac{1}{2}\min\limits_{0\le t\le T}\overset{\circ}{h}(t)$ если $0<T<T^*$ и $\gamma=\frac{1}{2}\min\limits_{T^*\le t\le T}\overset{\circ}{h}(t)$ если $T>T^*$.

Доказательство

Легко видеть, что при $0<\mu\le\overset{\circ}{\mu}$, $\theta(\mu)\le t\le T$

$$\overset{1\ell}{p}_t(0,t)=-\left[\overset{\circ}{h}(t)\right]^{-1}\left[\overset{\circ}{H}_t(t)+\overset{\circ}{H}_q(t)\overset{1}{q}_t(0,t)\right]. \tag{30.4}$$

Из (15.4), (30.4) при $\theta(\mu)\le t\le T$ имеем

$$|\nabla p_t^{\ell}(0,t)|<|p_t^{\ell}(\mu,0,\theta(\mu))-F^{\mu}(\theta(\mu))|\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_{\theta(\mu)}^{t}h^{\mu}(\eta)d\eta\right\}+$$

$$+C\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t}-J_{\theta(\mu)}^{t}\left[\frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t}h^{\mu}\right]\right|+\left|S^{\mu}(t)-J_{\theta(\mu)}^{t}[S^{\mu}h^{\mu}]\right| \tag{31.4}$$

$$\left|\frac{\overset{\circ}{H}_t(t)}{\overset{\circ}{h}(t)}-J_{\theta(\mu)}^{t}\left[H_t^{\mu}\right]\right|+\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\overset{\circ}{H}_{q_j}(t)}{\overset{\circ}{h}(t)}\cdot\frac{\partial\overset{1}{q}_j(0,t)}{\partial t}-J_{\theta(\mu)}^{t}\left[H_{q_j}^{\mu}\frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t}\right]\right|.$$

Согласно (28.4) при $\theta(\mu)\le t\le T$

$$|\nabla H_t(t)|,\ |\nabla h(t)|,\ |\nabla H_{q_j}(t)|,\ |\nabla S(t)|<\omega(\mu). \tag{32.4}$$

Оценим теперь второй член в правой части (31.4). Имеем

$$\rho_j(t)=\left|\frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t}-J_{\theta(\mu)}^{t}\left[\frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t}h^{\mu}\right]\right|\le\left|\nabla\frac{\partial q_j(0,t)}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial\overset{1}{q}_j(0,t)}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-J_{\theta(\mu)}^{t}\left[\frac{\partial\overset{1}{q}_j(0,t)}{\partial t}h^{\mu}\right]\right|+\left|J_{\theta(\mu)}^{t}\left[\left|\nabla\frac{\partial q_j(0,t)}{\partial t}\right|h^{\mu}\right]\right|.$$

Учитывая (32.4), выберем такое $0<\mu(T)\le\overset{\circ}{\mu}$, что при $0<\mu\le\mu(T)$ $h^{\mu}(t)\ge\bar{\gamma}$ на $[\theta(\mu),T]$. Тогда при $0<\mu\le\mu(T)$, $\theta(\mu)\le t\le T$

$$\left| J^t_{\theta(\mu)}\left[\left|\nabla \frac{\partial q_i(0,t)}{\partial t}\right| h^\mu\right]\right| < C(T) \max_{\theta(\mu)\le t\le T}\left|\nabla \frac{\partial q_j(0,t)}{\partial t}\right| \quad (33.4)$$

$$\left|\frac{\partial \dot q_j(0,t)}{\partial t} - J^t_{\theta(\mu)}\left[\frac{\partial \dot q_j(0,t)}{\partial t}\cdot h^\mu\right]\right| < C(T). \quad (34.4)$$

При $\theta(\mu)\le t\le T$ функция $J^t_{\theta(\mu)}\left[\frac{\partial \dot q_j(0,t)}{\partial t} h^\mu\right]$ есть решение задачи

$$\mu w' + h^\mu(t) w = \frac{\partial \dot q_j(0,t)}{\partial t} h^\mu(t), \quad w(\theta(\mu)) = 0.$$

Поэтому при любом $0<\sigma\le T$ если $T\le T^*$ и $\theta^*\le\sigma\le T$ если $T^*\le T$ имеем (см. [9], лемму 3.3)

$$\max_{\sigma\le t\le T}\left|\frac{\partial \dot q_j(0,t)}{\partial t} - J^t_{\theta(\mu)}\left[\frac{\partial \dot q_j(0,t)}{\partial t} h^\mu\right]\right| \to 0 \quad \text{при } \mu\to 0 \quad (35.4)$$

В силу (33.4) - (35.4) при $0<\mu\le\mu(T)$, $\theta(\mu)\le t\le T$

$$\sum_{j=1}^m \rho_j(t) < \omega_\mu(\theta(\mu),T;t) + C(T)\max_{\theta(\mu)\le\tau\le t}|\nabla q_t(0,\tau)|.$$

Оценивая аналогично остальные члены в (31.4) и учитывая (32.4), получим (29.4). Лемма 5.4 доказана.

Лемма 6.4. Каковы бы ни были $0<\sigma<T<T^*$

I) $\sum_{i=1}^{l}\|\nabla\alpha_i\|_{\bar G_T}\to 0$, $\|\nabla q_t\|_{\bar G_T} + \sum_{j=1}^m\|\nabla\beta_j\|_{\bar G_T}\to 0$ при $\mu\to 0$ (36.4)

$$\max_{\sigma\le t\le T}|\nabla p_t(0,t)|\to 0 \quad \text{при} \quad \mu\to 0 \quad (37.4)$$

II) найдется такое число $0<\mu_2(T)\le\tilde\mu_1(T)$, что при $0<\mu\le\mu_2(T)$

$$\max_{0\le t\le T}|p_t(\mu,0,t)| < C(T). \quad (38.4)$$

Доказательство.

Легко видеть, что из (8.2), (8.4), (17.4) вытекает первое соотношение (36.4). Воспользуемся леммой 5.4, полагая $\mathring{\mu} = \tilde\mu_1(T)$.

В силу (I.4), (0.3), (0.6) $p^l_t(\mu,0,0) = F^\mu(0)$. Поэтому, согласно (29.4) при $0<\mu\le\mu(T)$, $0\le t\le T$

$$|\nabla p^l_t(0,t)| < \omega_\mu(0,T;t) + C(T)\max_{0\le\tau\le t}|\nabla q_t(0,\tau)|. \quad (39.4)$$

Из (39.4), (27.4), (0.9), (I7.4) вытекает

$$|\nabla p_t(0,t)| < \omega_\mu(0,T;t) + C(T)\max_{0\le\tau\le t}|\nabla q_t(0,\tau)|. \qquad (4$$

Для $0<\mu\le\mu(T)$, $0<t\le T$ положим $S(\mu,t)=\sum_{i=1}^{2}\|\nabla p_i\|_{\bar{G}_T}+\|\nabla q_t\|_{\bar{G}_T}$.
Из (9.2), (9.4) и соответствующих уравнений для $\frac{\partial q_i(\mu,\cdot)}{\partial t}$, $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ вида (3.I), где $p_t(\mu,\cdot)$, $\dot p_t$ записаны в виде (5.4), (5.2), тывая (6.4), (17.4), (27.4) для $0<\mu<\min(\mu(T),\tilde\mu_1(T))$ получим

$$S(\mu,t)\le\omega(\mu)+C\int_0^t|\nabla p_t(0,\eta)|d\eta+C\int_0^t S(\mu,\eta)d\eta. \qquad (4$$

Исключая из (4I.4) $|\nabla p_t(0,t)|$ с помощью (40.4) и пользуясь леммо Гронуолла [7], установим, что $S(\mu,T)\le\omega(\mu)C(T)$. Следовательно, $|\nabla p_t(0,t)|<\omega_\mu(0,T;t)+C(T)\omega(\mu)$. Теперь (37.4) и утверждение II) оч видны. Лемма 6.4 доказана.

Теорема 2.4. Каковы бы ни были $0<\sigma<T<T^*$ при $\mu\to0$

$$\|\nabla q\|_{C_1(\bar{G}_T)}=\|\nabla q\|_{\bar{G}_T}+\|\nabla q_x\|_{\bar{G}_T}+\|\nabla q_t\|_{\bar{G}}\to0 \qquad (4$$

$$\|\nabla p_i\|_{C_1(\bar{D}_T[i_0])}\to0,\quad \|\nabla p_i\|_{C_1(\bar{G}_T[i_\sigma])}\to0,\ 1\le i\le 2. \qquad (4$$

Действительно, из (36.4), (37.4) вытекает равномерная сходим в соответствующих областях производных $\frac{\partial}{\partial t}$. Поэтому в силу (0.I (0.2) и теоремы I.4 то же имеет место и для производных $\frac{\partial}{\partial x}$.

§ 5. Построение решения задачи ($\mu\ne0$) в окрестности прямой $t=T$

I. Зафиксируем произвольное $0<\Delta<\infty$. Для любого $0<\delta<(T^*)^{1/3}=\delta_1$ положим $T_0=T^*-\delta^3$. В силу леммы I.2 и теоремы 2.4 найдутся чис $0<\overset{\circ}{\delta}(\Delta)<\delta_1$ и определенная при $\delta\in(0,\overset{\circ}{\delta}(\Delta))$ функция $0<\overset{\circ}{\mu}(\delta,\Delta)<\mu_2($ такие, что $|q_t(\mu,0,T_0)-\overset{4}{q}_t(0,T^*)|<\Delta$ если $0<\delta<\overset{\circ}{\delta}(\Delta)$, $0<\mu<\overset{\circ}{\mu}($
Для $0<\delta<\overset{\circ}{\delta}(\Delta)$, $0<\mu<\overset{\circ}{\mu}(\delta,\Delta)$, $T_0<T\le\overset{\circ}{T}$ обозначим через $\mathfrak{A}^\mu_\Delta(T_0,$ совокупность вектор-функций $v(t)=\{v_1(t),\dots,v_m(t)\}\in C[T_0,T]$, та что $v(T_0)=q_t(\mu,0,T_0)$ и $|v(t)-\overset{4}{q}_t(0,T^*)|\le\Delta$ при $T_0\le t\le T$. Пус $v(t)\in\mathfrak{A}^\mu_\Delta(T_0,T)$. Обозначим через $(p^\ell(\mu,t;v),q(\mu,t;v))$ решение зада

$$\mu\frac{dp}{dt}+H(t,p,q)=-\mu\left[\sum_{j=1}^{m}c_j v_j(t)+S(t,p,q)\right] \qquad (1.5)$$

$$\frac{dq_j}{dt}=v_j(t) \quad , \quad j=1,2,\dots,m \qquad (2.5)$$

$$p\big|_{t=T_0}=p^{\ell}(\mu,0,T_0), \quad q_j\big|_{t=T_0}=q_j(\mu,0,T_0). \qquad (3.5)$$

Лемма I.5. Существуют числа $0<\Delta^*<1$, $0<\delta_1^*<\delta(\Delta^*)$ и определенная на $(0,\delta_1^*)$ функция $0<\mu_1^*(\delta)<\mathring{\mu}(\delta,\Delta^*)$ такие, что каковы бы ни были $0<\delta<\delta_1^*$, $0<\mu<\mu_1^*(\delta)$, $v(t)\in \mathfrak{M}^{\mu}_{\Delta^*}(T_0,T^*+\delta)$ имеют место следующие утверждения:

I) решение $(p^{\ell}(\mu,t;v), q(\mu,t;v))$ задачи (I.5)-(3.5) существует при $T_0\le t\le T_1(\mu,v)$, где

$$T_0<T_1(\mu,v)<T_0+C_1^*(\mu^{1/2}+\delta^{5/2})<T^*+\frac{\delta}{4} \qquad (4.5)$$

$$H_{p^\ell}(t,p^{\ell}(\mu,t;v),q(\mu,t;v))>-\delta \qquad \text{при } T_0\le t<T_1(\mu,v) \qquad (5.5)$$

$$H_{p^\ell}(t,p^{\ell}(\mu,t;v),q(\mu,t;v))=-\delta \qquad \text{при } t=T_1(\mu,v) \qquad (6.5)$$

$$|p^{\ell}(\mu,t;v)-\mathring{p}^{\ell}|<C_2^*\delta \qquad \text{при } T_0\le t\le T_1(\mu,v). \qquad (7.5)$$

II) можно указать на зависящее от $v(t)$ число $t_H(\delta,\mu)$

$$T_0<t_H(\delta,\mu)<T_0+C_3^*\mu^{1/2}\delta^{3/4}<T_1(\mu,v) \qquad (8.5)$$

такое, что

$$\frac{dp^{\ell}(\mu,t;v)}{dt}>C_4^*\delta^{-3/2} \qquad \text{при } t_H(\delta,\mu)\le t\le T_1(\mu,v). \qquad (9.5)$$

В (4.5), (7.5)-(9.5) и далее в тексте C_i^* – положительные постоянные не зависящие от Δ,δ,μ,v

Доказательство

Для произвольных чисел $0\le t\le \mathring{T}$, $-\infty<p^{\ell}<\infty$ и векторов $q=(q_j)$, $v=(v_j)$, $j=1,2,\dots,m$, положим

$$h(t,p^{\ell},q)\equiv H_{p^\ell}(t,p^{\ell},q), \quad \Gamma(t,p^{\ell},q,v)\equiv-\left[H_t(t,p^{\ell},q)+H_q(t,p^{\ell},q)v\right]$$

Согласно (22.2) и лемме I.2 при $0<\delta<\delta_2=\min\{\eta_0^{1/3},\delta_1\}$ (η_0 указано в доказательстве леммы 2.2)

$$C\delta^{3/2}<|\overset{1}{p}{}^{\ell}(0,T_0)-\overset{*}{p}{}^{\ell}|<C\delta^{3/2},\quad |\overset{1}{q}(0,T_0)-\overset{*}{q}|<C\delta^{3}. \tag{I0.5}$$

Из (23.2), учитывая (I5.2), (I6.2), (I9.2), имеем

$$\frac{\partial \overset{1}{p}{}^{\ell}(0,t)}{\partial t}\to\infty \quad \text{при} \quad t\to T^{*}. \tag{II.5}$$

Следовательно, $\overset{1}{p}{}^{\ell}(0,T_0)<\overset{*}{p}{}^{\ell}$ при $0<\delta<\delta_3$ +). Поэтому в силу (I0.5), (I6.2), (I7.2) при $0<\delta<\delta_4$

$$C\delta^{3/2}<h(T_0,\overset{1}{p}{}^{\ell}(0,T_0),\overset{1}{q}(0,T_0))<C\delta^{3/2} \tag{I2.5}$$

Из (I0.5), (I2.5), (I7.4) при $0<\mu<\mu_1(\delta)$ получим

$$C\delta^{3/2}<h(T_0,p^{\ell}(\mu,0,T_0),q(\mu,0,T_0))<C\delta^{3/2},\quad |q(\mu,0,T_0)-q^{*}|<C\delta^{3} \tag{I3.5}$$

В силу (I6.2), (I7.2) найдется такое $0<\Delta_0<1$, что на множестве $Ш_{\Delta_0}=\{(t,q):|t-T^{*}|\leq\Delta_0,|q-q^{*}|\leq\Delta_0\}$ уравнение $h(t,p^{\ell},q)=0$ имеет единственное решение $p^{\ell}=w(t,q)\in C_1(Ш_{\Delta_0})$, $\overset{*}{p}{}^{\ell}=w(T^{*},\overset{*}{q})$, и

$$-2\left|\frac{\partial^2 H(T^{*},\overset{*}{p}{}^{\ell},\overset{*}{q})}{\partial p^{\ell 2}}\right|<h_{p^{\ell}}(t,p^{\ell},q)<-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 H(T^{*},\overset{*}{p}{}^{\ell},\overset{*}{q})}{\partial p^{\ell 2}}\right|, \tag{I4.5}$$

если $(t,q)\in Ш_{\Delta_0}$, $|p^{\ell}-w(t,q)|\leq\Delta_0$. В силу (I7.4) по любому $0<\Delta<\Delta_0$ найдется такое $0<\delta_5(\Delta)<\min\{\delta_4,\overset{o}{\delta}(\Delta)\}$, что при $0<\delta<\delta_5(\Delta)$, $0<\mu<\mu_2(\delta,\Delta)<\min\{\mu_1(\delta),\overset{o}{\mu}(\delta,\Delta)\}$, $(T_0,q(\mu,0,T_0))\in Ш_{\Delta/2}$, имеем $|p^{\ell}(\mu,0,T_0)-w(T_0,q(\mu,0,T_0))|<\frac{\Delta}{2}$. При $0<\Delta<\Delta_0$, $0<\delta<\delta_5(\Delta)$, $0<\mu<\mu_2(\delta,\Delta)$ $v(t)\in\mathfrak{N}^{\mu}_{\Delta}(T_0,T^{*}+\delta)$ обозначим через $\mathcal{T}^{1}_{\mu}(v)$ множество $\tau\in[T_0,T^{*}+\delta]$ таких, что $(p^{\ell}(\mu,t;v),q(\mu,t;v))$ существует на $[T_0,\tau]$, и при $T_0\leq\eta\leq\tau$

$$h(\eta,p^{\ell}(\mu,\eta;v),q(\mu,\eta;v))\geq 0, \tag{I5.5}$$

$$|\eta-T^{*}|<\Delta,\ |q(\mu,\eta;v)-q^{*}|<\Delta,\ |p^{\ell}(\mu,\eta;v)-w(\eta,q(\mu,\eta;v))|<\Delta. \tag{I6.5}$$

Положим

$$p_{\mu}(t)=p^{\ell}(\mu,t;v),\ q_{\mu}(t)=q(\mu,t;v),\ h_{\mu}(t)=h(t,p_{\mu}(t),q_{\mu}(t)),$$

+) Следовало бы сказать, что найдется такое $0<\delta_3<\delta_2$, что при любом $0<\delta<\delta_3$ $\overset{1}{p}{}^{\ell}(0,T_0)<\overset{*}{p}{}^{\ell}$. Однако мы позволим себе и в дальнейшем прибегать к аналогичным сокращениям.

$$S_\mu(t)=S(t,p_\mu(t),q_\mu(t)),\quad K_\mu(t)=\sum_{j=1}^{m} C_j v_j(t)+S_\mu(t),\quad \Gamma_\mu(t)=\Gamma(t,p_\mu(t),q_\mu(t),v(t)).$$

Отметим, что если при некотором $T_0 \le \eta \le T^* + \delta$ имеет место (I6.5), то

$$|h_\mu(\eta)| \le \overset{0}{C}\Delta,\quad |K_\mu(\eta)| \le \overset{1}{C} \tag{I7.5}$$

($\overset{0}{C}$, $\overset{1}{C}$ – постоянные, не зависящие от Δ , δ , μ , v), и если $0<\Delta<\Delta_1 \le \Delta_0$ (Δ_1 не зависит от μ , δ , v , t), то

$$\frac{1}{2}\Gamma_0 < \Gamma_\mu(\eta)+h_\mu(\eta)K_\mu(\eta) < 2\Gamma_0 . \tag{I8.5}$$

Согласно (II.5), (37.4) при $0<\delta<\delta_6(\Delta)$, $0<\mu<\mu_3(\delta,\Delta)$

$$0<\frac{1}{2}\overset{1}{p}{}^{\ell}_t(0,T_0) < p^{\ell}_t(\mu,0,T_0)+K_\mu(T_0) < 2\overset{1}{p}{}^{\ell}_t(0,T_0) . \tag{I9.5}$$

Легко видеть (см. доказательство леммы 4.4), что при $t\in \overset{1}{\mathcal{O}}_\mu(v)$

$$\frac{dp_\mu(t)}{dt} = \left[p^\ell_t(\mu,0,T_0)+K_\mu(T_0)\right]\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_{T_0}^{t} h_\mu(\eta)\,d\eta\right\} - K_\mu(t) + \tag{20.5}$$
$$+\frac{1}{\mu}\int_{T_0}^{t}\left[\Gamma_\mu(\tau)+h_\mu(\tau)K_\mu(\tau)\right]\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^{t} h_\mu(\eta)\,d\eta\right\}d\tau .$$

Отсюда при $t\in \overset{1}{\mathcal{O}}_\mu(v)$,

$$\left|\frac{dp_\mu(t)}{dt}\right| < \left[2\overset{1}{p}{}^{\ell}_t(0,T_0)+\overset{1}{C}\right] + 2\Gamma_0\cdot\mu^{-1}(t-T_0) . \tag{2I.5}$$

Учитывая (I4.5), (2I.5), для $t\in \overset{1}{\mathcal{O}}_\mu(v)$ получим

$$\frac{dh_\mu(t)}{dt} = h_t(t,p_\mu(t),q_\mu(t)) + h_{p^\ell}(t,p_\mu(t),q_\mu(t))\frac{dp_\mu(t)}{dt} + \tag{22.5}$$
$$+h_q(t,p_\mu(t),q_\mu(t))v(t) \ge -B^2\mu^{-1}(t-T_0) - \left[A_1^2+A_2^2\overset{1}{p}{}^{\ell}_t(0,T_0)\right],$$

где A_1 , A_2 , B – постоянные, не зависящие от Δ , δ , μ , t . Из (22.5), (I3.5) вытекает, что при $t\in \overset{1}{\mathcal{O}}_\mu(v)$

$$h_\mu(t) \ge C\delta^{3/2} - \frac{1}{2}B^2\mu^{-1}(t-T_0)^2 - \left[A_1^2+A_2^2\overset{1}{p}{}^{\ell}_t(0,T_0)\right](t-T_0) \equiv \omega_1(t-T_0).$$

В силу (I9.2), (23.2), (I2.5) при $0<\delta<\delta_7(\Delta)$

$$C\delta^{-3/2} < \overset{1}{p}{}^{\ell}_t(0,T_0) < C\delta^{-3/2} \tag{23.5}$$

Поэтому при $0<\mu<\mu_4(\delta,\Delta)$ уравнение $m_1(\xi)=0$ имеет корень

$$C\mu^{1/2}\delta^{3/4}<\xi(\delta,\mu)<C\mu^{1/2}\delta^{3/4} \qquad (24.5)$$

и $t_H(\delta,\mu)\equiv T_0+\xi(\delta,\mu)<T^*+\frac{\delta}{16}$. Из (22.5), учитывая (I4.5), (I6.5), (I
(23.5), (24.5), при $t\in \mathcal{O}'_\mu(v)$, $t<t_H(\delta,\mu)$ имеем

$$\left|\frac{dh_\mu(t)}{dt}\right|\le C+C\left(\delta^{-3/2}+\mu^{-1/2}\delta^{3/4}\right) \qquad (25.5)$$

и, следовательно, в силу (I3.5) $h_\mu(t)<C\delta^{3/2}$, если $0<\mu<\mu_5(\delta,\Delta)$.
Нетрудно показать, что при любых $0<\Delta<\Delta_1$, достаточно малых $0<\delta<\delta_8(\Delta)$, $0<\mu<\mu_6(\delta,\Delta)$ и $v(t)\in \mathfrak{A}^\mu_\Delta(T_0,T^*+\delta)$ $t_H(\delta,\mu)\in \mathcal{O}^1_\mu(v)$ $h_\mu(t)>0$ при $t\in[T_0,t_H(\delta,\mu)]$. Обозначим через $\mathcal{O}^2_\mu(v)$ множество $\tau\in[t_H(\delta,\mu),T^*+\delta]$ таких, что $(p_\mu(t),q_\mu(t))$ существует на $[t_H(\delta,\mu),\tau]$ при $t_H(\delta,\mu)\le\eta\le\tau$ $h_\mu(\eta)>0$ и имеют место (I6.5). Из (20.5), учит
(I7.5)-(I9.5), (24.5), для $t\in \mathcal{O}^2_\mu(v)$ получим

$$\frac{dp_\mu(t)}{dt}>\frac{\Gamma_0}{2\mu}\int_{T_0}^{t}\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_\tau^t h_\mu(\eta)\,d\eta\right\}d\tau-\overset{1}{C}>\frac{\Gamma_0}{2\overset{2}{C}\Delta}\left[1-e^{-\frac{\overset{2}{C}\Delta}{\mu}\xi(\delta,\mu)}\right] \qquad (26.5)$$

$$-\overset{1}{C}>\frac{\Gamma_0}{4\overset{2}{C}\Delta}-\overset{1}{C}>\frac{\Gamma_0}{8\overset{2}{C}\Delta},$$

при $0<\Delta<\Delta_2$, $0<\mu<\mu_7(\delta,\Delta)$. В силу (I4.5), (22.5), (26.5) и $t\in \mathcal{O}^2_\mu(v)$ $\frac{dh_\mu(t)}{dt}<C-C\Delta^{-1}<0$ если $0<\Delta<\Delta_3$, и, следовател $h_\mu(t)<h_\mu(t_H(\delta,\mu))\le C\delta^{3/2}$. Из (I7.5)-(20.5) для $t\in \mathcal{O}^2_\mu(v)$ учитывая, что $0<h_\mu(\tau)\le C\delta^{3/2}$ при $T_0\le\tau\le t$, получим

$$\frac{dp_\mu(t)}{dt}>\frac{\Gamma_0}{2\mu}\int_{T_0}^{t}e^{-C\delta^{3/2}\mu^{-1}(t-\tau)}d\tau-\overset{1}{C}>C\delta^{-3/2}\left[1-e^{-C\delta^{3/2}\mu^{-1}\xi(\delta,\mu)}\right]- \qquad (27.5)$$

$$-\overset{1}{C}>C\delta^{-3/2}-\overset{1}{C}>C\delta^{-3/2},$$

если $0<\delta<\delta_9(\Delta)$, $0<\mu<\mu_8(\delta,\Delta)$. Поэтому при $t\in \mathcal{O}^2_\mu(v)$

$\frac{dh_\mu(t)}{dt} < C - C\delta^{-3/2} < -C\delta^{-3/2}$, если $0<\delta<\delta_{10}(\Delta)$, и, следовательно, $h_\mu(t)< h_\mu(t_н(\delta,\mu)) - C\delta^{-3/2}(t-t_н(\delta,\mu)) = C\delta^{1/2} - C\delta^{-3/2}(t-t_н(\delta,\mu)) = m_2(t-t_н(\delta,\mu))$.

Пусть $\eta(\delta,\mu)$ корень уравнения $m_2(\eta)=0$. Отметим, что $\eta(\delta,\mu)=C\delta^3$. Поэтому $t_8(\delta,\mu)=t_н(\delta,\mu)+\eta(\delta,\mu)<T^*+\delta/8$ если $0<\delta<\delta_{11}(\Delta)$. Нетрудно показать, что каковы бы ни были $0<\Delta<\Delta_3$ $0<\delta<\delta_{11}(\Delta)$, $0<\mu<\mu_9(\delta,\Delta)$, $v(t)\in\mathfrak{A}^\mu_\Delta(T_0,T^*+\delta)$ найдется такое число $t_н(\delta,\mu)<t^*(\delta,\mu,v)<t_8(\delta,\mu)$, что $(p_\mu(t),q_\mu(t))$ существует на $[t_н(\delta,\mu),t^*(\delta,\mu,v)]$, при $t_н(\delta,\mu)\le t\le t^*(\delta,\mu,v)$ имеют место неравенства (I6.5), и $h_\mu(t^*(\delta,\mu,v))=0$. Отметим, что в силу (27.5)

$$\frac{dp_\mu(t^*(\delta,\mu,v))}{dt} \ge C\delta^{-3/2} \quad , \quad \frac{dh_\mu(t^*(\delta,\mu,v))}{dt} \le -C\delta^{-3/2} . \tag{28.5}$$

Для $0<\Delta<\Delta_3$, $0<\delta<\delta_{11}(\Delta)$, $0<\mu<\mu_9(\delta,\Delta)$, $v(t)\in\mathfrak{A}^\mu_\Delta(T_0,T^*+\delta)$ обозначим через $\mathfrak{I}^3_\mu(v)$ множество $\tau\in[t^*(\delta,\mu,v),T^*+\delta]$ таких, что $(p_\mu(t),q_\mu(t))$ существует на $[t^*(\delta,\mu,v),\tau]$, и при $t^*(\delta,\mu,v)\le\eta\le\tau$ имеют место (I6.5), и $-\delta<h_\mu(t)\le 0$. Легко видеть, что при $t\in\mathfrak{I}^3_\mu(v)$

$$\frac{dp_\mu(t)}{dt} = \left[\frac{dp_\mu(t^*(\delta,\mu,v))}{dt} + K_\mu(t^*(\delta,\mu,v))\right]\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_{t^*(\delta,\mu,v)}^{t} h_\mu(\eta)\,d\eta\right\} - \\ -K_\mu(t) + \frac{1}{\mu}\int_{t^*(\delta,\mu,v)}^{t}\left[\Gamma_\mu(\tau)+h_\mu(\tau)K_\mu(\tau)\right]\exp\left\{-\frac{1}{\mu}\int_\tau^t h_\mu(\eta)\,d\eta\right\}d\tau. \tag{29.5}$$

В силу (29.5), (28.5), (I8.5), (I7.5) $\frac{dp_\mu(t)}{dt} \ge C\delta^{-3/2} - 2\overset{1}{C} \ge C\delta^{-3/2}$.
Следовательно, $\frac{dh_\mu(t)}{dt} < -C\delta^{-3/2}$ если $0<\delta<\delta_{12}(\Delta)$. Поэтому при $t\in\mathfrak{I}^3_\mu(v)$

$$h_\mu(t) < -C\delta^{-3/2}(t-t^*(\delta,\mu,v)) = m_3(t).$$

Пусть $\bar t(\delta,\mu,v)$ – корень уравнения $m_3(t)=-\delta$. Тогда $\bar t(\delta,\mu,v)= =t^*(\delta,\mu,v)+C\delta^{5/2}<T^*+\frac{\delta}{4}$ при $0<\delta<\delta_{13}(\Delta)$, $0<\mu<\mu_{10}(\delta,\Delta)$.
Рассматривая теперь $(p_\mu(t),q_\mu(t))$ при $t>t^*(\delta,\mu,v)$, нетрудно

установить утверждение I) леммы и соотношения (5.5), (6.5). Отметим, что утверждение II) установлено при доказательстве леммы. Докажем неравенство (7.5). Из доказательства леммы I.5 следует, что при $T_0 \le t \le T_1(\mu,\nu)$, $(t, q_\mu(t)) \in W_{\Delta_0}$ $|p_\mu(t) - w(t, q_\mu(t))| < \Delta_0$, и если δ достаточно мало, то $|h_\mu(t)| < C\delta$. Поэтому, учитывая (I4.5), при $T_0 \le t \le T_1(\mu,\nu)$ получим $|p_\mu(t) - w(t, q_\mu(t))| < C\delta$. Следовательно, $|p_\mu(t) - \overset{*}{p}{}^{\ell}| \le |p_\mu(t) - w(t, q_\mu(t))| + |w(t, q_\mu(t)) - w(T^*, \overset{*}{q})| < C\delta$, если δ, μ достаточно малые. Лемма I.5 доказана.

2^0. Очевидна следующая

Лемма 2.5. Пусть $f(x,t,p,q) \in C(\vartheta)$. Тогда найдется положительная функция $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m}) \in C_1(R^+_{n+m})$, $R^+_{n+m} = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m})$, $0 \le \xi_i < \infty$, $i = 1,2,\dots,n+m\}$ неубывающая по каждому переменному, такая, что для любой точки $(x,t,p,q) \in \vartheta$

$$|f(x,t,p,q)| < \Phi(|\overset{1}{p}|, \dots, |\overset{n}{p}|, |q_1|, |q_2|, \dots, |q_m|).$$

Мы положим

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m}) = \int_0^{\xi_1+1} \dots \int_0^{\xi_{n+m}+1} g(\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \dots, \overset{n+m}{\eta})\, d\overset{1}{\eta} \dots d\overset{n+m}{\eta},$$

$$g(\overset{1}{\eta}, \overset{2}{\eta}, \dots, \overset{n+m}{\eta}) = \max_{\substack{|\overset{i}{p}| \le \overset{i}{\eta} \\ |q_j| \le \overset{n+j}{\eta}}} \{\max_{\Pi_f} |f(x,t,p,q)|\} + 1.$$

Пусть δ_1^*, фигурирующее в лемме I.5, столь мало, что

$$C_2^* \delta_1^* < 1, \quad \overset{*}{p}{}^{\ell} + C_2^* \delta_1^* < \bar{p}^{\ell} - \delta_1^*. \tag{30}$$

Зафиксируем произвольное $0 < M_0 < \infty$ такое, что $|p^\ell| < M_0$, если $\overset{*}{p}{}^{\ell} - 1 < p^\ell < \bar{p}^\ell + 1$.

Лемма 3.5. Пусть $0 < T' \le \overset{0}{T}$, $0 < T_0' < \min(T^*, T')$, $0 < \mu < \mu_2(T_0')$ таковы, что в $\bar{G}_{T'}$, существует решение $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu \ne 0)$ и

$$|p^\ell(\mu, 0, t)| < M_0 \quad \text{при} \quad T_0' \le t \le T' \tag{31}$$

Тогда найдутся такие не зависящие от μ, T_0', T постоянные $0<\Delta T_0^{\#}<\infty$, $\|\overset{\circ}{p}\|_{\bar{G}_{T^*}}+\|\overset{\circ}{q}\|_{\bar{G}_{T^*}}+1<\rho^{\#}<\infty$, что

$$\|p(\mu,.)\|_{\bar{G}_T}+\|q(\mu,.)\|_{\bar{G}_T}<\rho^{\#} \quad \text{при } T_0'<T\leq \min(T',T_0'+\Delta T_0^{\#}). \tag{32.5}$$

Доказательство.

Зафиксируем произвольное $T_0'<T\leq T'$. Для $T_0'\leq\theta\leq T$ положим $S(\theta)=\|p(\mu,.)\|_{\bar{G}_\theta}+\|q(\mu,.)\|_{\bar{G}_\theta}$. Ниже через $\Phi_i(\zeta)$, $0\leq\zeta<\infty$, ($i=1,2,\dots$) обозначаются положительные неубывающие функции класса $C_1[0,\infty)$.

В силу (0.9), (31.5) и леммы 2.5 $|p(\mu,0,t)|\leq\Phi_1(|q(\mu,0,t)|)$ при $T_0'\leq t\leq T'$.

Пользуясь теперь (27.4) и леммой 2.5, из (I.I), (2.I) для $(x,t)\in\bar{G}_\theta$, $T_0'\leq\theta\leq T$, получим

$$|p(\mu,x,t)|\leq\Phi_2(\|q(\mu,.)\|_{\bar{G}_t})+\int_{T_0'}^{t}\Phi_3(S(\eta))\,d\eta, \tag{33.5}$$

$$|q(\mu,x,t)|\leq C+\int_{T_0'}^{t}\Phi_4(S(\eta))\,d\eta. \tag{34.5}$$

Из (33.5), (34.5) имеем

$$S(\theta)\leq\Phi_5\Big(\int_{T_0'}^{\theta}\Phi_6(S(\eta))\,d\eta\Big)+\int_{T_0'}^{\theta}\Phi_6(S(\eta))\,d\eta.$$

Отсюда полагая $u(\theta)=\int_{T_0'}^{\theta}\Phi_6(S(\eta))\,d\eta$, получим $S(\theta)\leq\Phi_7(u(\theta))$. Следовательно, $u'(\theta)=\Phi_6(S(\theta))\leq\Phi_6(\Phi_7(u(\theta)))\equiv\Phi_8(u(\theta))$. Пусть $0<\Delta T_0^{\#}<\infty$ таково, что на $[0,\Delta T_0^{\#}]$ существует решение $u=\overset{\circ}{u}(\theta)$ задачи $u'(\theta)=\Phi_8(u(\theta))$, $u(0)=0$. Тогда для любого $T_0'\leq\theta\leq\min(T',T_0'+\Delta T_0^{\#})$ $u(\theta)\leq\overset{\circ}{u}(\theta-T_0')$, и, следовательно, $S(\theta)\leq\Phi_7(\max_{0\leq\tau\leq\Delta T_0^{\#}}\overset{\circ}{u}(\tau))\equiv\rho_0$. Положим $\rho^{\#}=\rho_0+1+\|\overset{\circ}{p}\|_{\bar{G}_{T^*}}+\|\overset{\circ}{q}\|_{\bar{G}_{T^*}}$.

Лемма 3.5 доказана.

Лемма 4.5. Найдутся такие $0<\delta_2^{\#}<\delta_1^{\#}$ и определенная на $(0,\delta_2^{\#})$ функция $0<\mu_2^{\#}(\delta)<\mu_1^{\#}(\delta)$, что если $0<\delta<\delta_2^{\#}$, $0<\mu<\mu_2^{\#}(\delta)$, то

I) решение $(p(\mu,.),q(\mu,.))$ задачи $(\mu\neq0)$ существует в $\bar{G}_{T_1(\mu)}$, где

$$T_0 < T_1(\mu) < T_0 + C_1^{*}(\mu^{1/2} + \delta^{5/2}), \quad T_0 = T^{*} - \delta^{3}, \tag{35}$$

П) $q_t(\mu,0,t) \in \mathfrak{A}^{\mu}_{\Delta^{*}}(T_0, T_1(\mu))$, $T_1(\mu) = T_1(\mu, q_t(\mu,0,t))$, и

$$\|p(\mu,.)\|_{\bar{G}_{T_1(\mu)}} + \|q(\mu,.)\|_{\bar{G}_{T_1(\mu)}} < \rho^{*}. \tag{36}$$

Доказательство

По определению функций $\overset{\circ}{\delta}(\Delta)$, $\overset{\circ}{\mu}(\delta,\Delta)$ при любых $0 < \delta < \delta_1^{*}$, $0 < \mu < \mu_1^{*}(\delta)$ в $\bar{G}_{T_0}$, $T_0 = T^{*} - \delta^{3}$, существует решение $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu \neq 0)$, и

$$|q_t(\mu,0,T_0) - \overset{1}{q}_t(0,T^{*})| < \Delta^{*}, \quad \|p(\mu,.)\|_{\bar{G}_{T_0}} + \|q(\mu,.)\|_{\bar{G}_{T_0}} < \rho^{*}.$$

Предположим, что решение $(p(\mu,.), q(\mu,.))$ задачи $(\mu \neq 0)$ существует в $\bar{G}_T$, $T_0 < T < T^{*} + \delta$, и

$$|q_t(\mu,0,\tau) - \overset{1}{q}_t(0,T^{*})| \leq \Delta^{*} \quad \text{при} \quad T_0 \leq \tau \leq T \tag{37}$$

$$\|p(\mu,.)\|_{\bar{G}_T} + \|q(\mu,.)\|_{\bar{G}_T} \leq \rho^{*}. \tag{38}$$

Для $T_0 < t_0 \leq T$ положим $v_{t_0}(t) = q_t(\mu,0,t)$ при $T_0 \leq t \leq t_0$, $v_{t_0}(t) = q_t(\mu,0,t_0)$ при $t_0 \leq t \leq T^{*} + \delta$. Очевидно, что $v_T(t) \in \mathfrak{A}^{\mu}_{\Delta^{*}}(T_0, T^{*}+\delta)$. Пусть $T_1(\mu, v_T)$ – число, указанное в лемме I.5. Зафиксируем произвольное $T_0 < \tau_0 \leq \min\{T, T_1(\mu, v_T)\}$. Тогда $p(\mu,t; v_T) = p^{\ell}(\mu,0,t)$, $q(\mu,t; v_T) \equiv q(\mu,0,t)$ при $T_0 \leq t \leq \tau_0$. Из леммы 3.4 и (38.5) вытекает, что при любом $0 < \tau \leq \tau_0$ имеет место (6.4), (7.4), где постоянные C зависят только от ρ^{*}, и если $T_0 < \tau \leq \tau_0$, то в силу леммы 6.4

$$\int_0^{\tau} |p_t^{\ell}(\mu,0,\eta)|\,d\eta \leq 1 + \int_0^{T^{*}} |\overset{1}{p}{}^{\ell}_t(0,\eta)|\,d\eta + \int_{T_0}^{\tau} |p_t^{\ell}(\mu,0,\eta)|\,d\eta, \tag{39}$$

если $0 < \mu < \bar{\mu}_1(\delta) \leq \mu_1^{*}(\delta)$. Для $T_0 < \tau \leq t_H(\delta,\mu)$, учитывая (21.5), (23.5), (24.5), имеем

$$\int_{T_0}^{\tau} |p_t^{l}(\mu,0,\eta)|\, d\eta \le C\delta^{3/2} \qquad \text{при } 0<\mu<\bar{\mu}_2(\delta)\le\bar{\mu}_1(\delta). \tag{40.5}$$

Для $t_н(\delta,\mu)<\tau=\tau_0$ в силу (40.5), (7.5), (9.5)

$$\int_{T_0}^{\tau} |p_t^{l}(\mu,0,\eta)|\, d\eta \le C\delta^{3/2} + [p^{l}(\mu,0,\tau)-p^{l}(\mu,0,t_н(\delta,\mu))] \le C\delta \quad , \tag{41.5}$$

если $0<\delta<\bar{\delta}_1=\delta_1^{*}$, $0<\mu<\bar{\mu}_2(\delta)$. Учитывая (39.5), (41.5), из (6.4), (7.4) получим при $0<\delta<\bar{\delta}_1$, $0<\mu<\bar{\mu}_2(\delta)$

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\|\alpha_i(\mu,.)\|_{\bar{G}_{\tau_0}}+\|\beta_i(\mu,.)\|_{\bar{G}_{\tau_0}}\right]+\|q_t(\mu,.)\|_{\bar{G}_{\tau_0}}\le C . \tag{42.5}$$

В силу (3.1) при $T_0\le t\le\tau_0$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t}-\frac{\partial \overset{1}{q}_j(0,T^{*})}{\partial t}\right| &\le \left|\frac{\partial q_j(\mu,\varkappa_j^{+}(T_0,0,t),T_0)}{\partial t}-\frac{\partial \overset{1}{q}_j(\varkappa_j^{+}(T_0,0,T^{*}),T_0)}{\partial t}\right|+ \\ &+\int_{T_0}^{T^{*}}\left|\mathcal{N}_j\left(\overset{1}{p},\overset{1}{q},\frac{\partial \overset{1}{p}}{\partial t},\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}\right)\right|_{(\varkappa_j^{+}(\tau,0,T^{*}),\tau)} d\tau + \\ &+\int_{T_0}^{t}\left|\mathcal{N}_j\left(p(\mu,.),q(\mu,.),\frac{\partial p(\mu,.)}{\partial t},\frac{\partial q(\mu,.)}{\partial t}\right)\right|_{(\varkappa_j^{+}(\tau,0,t),\tau)} d\tau . \end{aligned} \tag{43.5}$$

Подставляя (5.2), (5.4) в правую часть (43.5) и пользуясь леммой I.2 и (20.2), (37.4), (42.4), (38.5), (4I,5), (42.5), выберем $0<\delta_2^{*}<\bar{\delta}_1$ и определенную на $(0,\delta_2^{*})$ функцию $0<\mu_2^{*}(\delta)<\bar{\mu}_2(\delta)$ такие, что правая часть (43.5) будет меньше $\frac{\Delta^{*}}{4m}$ при $0<\delta<\delta_2^{*}$, $0<\mu<\mu_2^{*}(\delta)$, и, следовательно,

$$|q_t(\mu,0,t)-\overset{1}{q}_t(0,T^{*})|<\frac{\Delta^{*}}{4} \qquad \text{при } T_0\le t\le\tau_0 . \tag{44.5}$$

Число δ_2^{*} предполагается столь малым, что $(\delta_2^{*})^3+\delta_2^{*}<\Delta T_0^{*}$. Зафиксируем теперь произвольные $0<\delta<\delta_2^{*}$, $0<\mu<\mu_2^{*}(\delta)$. Согласно лемме 1.4 либо A) в $\bar{G}_{T^*+\delta}$ существует единственное решение $(p(\mu,\cdot),q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu\neq 0)$; либо B) найдется такое $T_0<\tau(\mu)\le T^*+\delta$, что при любом $T_0<\tau<\tau(\mu)$ в $\bar{G}_\tau$ существует единственное решение $(p(\mu,\cdot),q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu\neq 0)$, и

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_\tau}+\|q(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_\tau}\to\infty \qquad \text{при } \tau\to\tau(\mu) . \qquad (45$$

Положим $\theta(\mu)=T^*+\delta$ если имеет место утверждение A) , и $\theta(\mu)=\tau(\mu)$, если имеет место утверждение B) . Обозначим через

$$t_\delta=\sup\{t: T_0\le t<\theta(\mu),\ \max_{T_0\le\eta\le t}|q_t(\mu,0,\eta)-\mathring{q}_t(0,T^*)|<\Delta^*\} .$$

1. Пусть имеет место любое из утверждений A) , B) и $t_\delta<\theta(\mu)$. Вектор-функция $v_{t_\delta}(t)\in\mathfrak{A}^{\mu}_{\Delta^*}(T_0,T^*+\delta)$. Число $T_1(\mu,v_{t_\delta})<t_\delta$. Действительно, если $T_1(\mu,v_{t_\delta})\ge t_\delta$, то (38.5) имеет место при $T=t_\delta$ в силу (7.5) и леммы 3.5. Полагая в (44.5) $\tau_0=t_\delta$, получим против
речие с определением числа t_δ . Обозначим $T_1(\mu)=T_1(\mu,v_{t_\delta})$. Пользуясь леммами 1.5, 3.5, получим все утверждения леммы 4.5.

2. Пусть имеет место утверждение A) , и $t_\delta=\theta(\mu)$. Полагая $T_1(\mu)=T_1(\mu,q_t(\mu,0,t))$, из лемм 1.5, 3.5 получим все утверждения леммы 4.5.

3. Пусть имеет место утверждение B) , и $t_\delta=\theta(\mu)$. Допустим, что $\tau(\mu)=T^*+\delta$. Так как $v_{T^*+\frac{1}{4}\delta}(t)\in\mathfrak{A}^{\mu}_{\Delta^*}(T_0,T^*+\delta)$, то полагая $T_1(\mu)=T_1(\mu,v_{T^*+\frac{1}{4}\delta})$ и учитывая (4.5), из лемм 1.5, 3.5 получим все утверждения леммы 4.5. Рассмотрим теперь случай $\tau(\mu)<T^*+\delta$. Пусть $T_0<\tau^*<\tau(\mu)$ таково, что

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_\tau}+\|q(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_\tau}>2\rho^* \qquad \text{при } \tau^*<\tau<\tau(\mu) . \qquad (46$$

Зафиксируем произвольное $\tau^*<\xi<\tau(\mu)$. Так как $\xi<t_\delta$, то $v_\xi(t)\in\mathfrak{A}^{\mu}_{\Delta^*}(T_0,T^*+\delta)$. Число $T_1(\mu,v_\xi)<\xi$ ибо если $T_1(\mu,v_\xi)\ge\xi$, т для любого $\tau^*<\tau<\xi$ в силу лемм 1.5, 3.5

$\|p(\mu,.)\|_{\bar{G}_\tau} + \|q(\mu,.)\|_{\bar{G}_\tau} < \rho^*$, что противоречит (46.5). Полагая $T_1(\mu) = T_1(\mu, v_k)$ и, пользуясь леммами I.5, 3.5, получим все утверждения леммы 4.5. Лемма 4.5 доказана.

Замечание. В силу леммы 4.5 (37.5), (38.5) имеют место при $T = T_1(\mu)$ каковы бы ни были $0 < \delta < \delta_2^*$, $0 < \mu < \mu_2^*(\delta)$. Поэтому полагая в (39.5), (40.5) $\tau = T_1(\mu)$ и учитывая (7.5), получим

$$\int_0^{T_1(\mu)} |p_t^\ell(\mu,0,\eta)|\, d\eta \le 1 + \int_0^{T^*} |\bar{p}_t^\ell(0,\eta)|\, d\eta + C(\delta_2^*)^{3/2} + 2M_0 \equiv C_5^* \qquad (47.5)$$

Следовательно, в силу (7.4), (36.5)

$$\|q_t(\mu,.)\|_{\bar{G}_{T_1(\mu)}} + \sum_{i=1}^{2} \|\alpha_i(\mu,.)\|_{\bar{G}_{T_1(\mu)}} + \|\beta_i(\mu,.)\|_{\bar{G}_{T_1(\mu)}} < C_6^* . \qquad (48.5)$$

Кроме того, из утверждения П) леммы 1.5 и (7.5) имеем

$$|p^\ell(\mu,0,t) - \bar{p}^{*\ell}| < C_2^* \delta \quad \text{при } T_0 \le t \le T_1(\mu) \qquad (49.5)$$

2^0 . Перейдем к построению решения $(p(\mu,.), q(\mu,.))$ задачи $(\mu \neq 0)$ при $t > T_1(\mu)$. Для $0 < \delta < \delta_2^*$, $0 < \mu < \mu_2^*(\delta)$ обозначим через $\mathcal{V}_\mu(\delta)$ совокупность вектор-функций $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_m(t)) \in C[T_1(\mu), T^* + \delta]$, таких что $v(T_1(\mu)) = q_t(\mu, 0, T_1(\mu))$, и $|v(t)| < C_6^*$ при $T_1(\mu) \le t \le T^* + \delta$.
Пусть $0 < \delta < \delta_2^*$, $0 < \mu < \mu_2^*(\delta)$, $v(t) \in \mathcal{V}_\mu(\delta)$. Обозначим через $(\bar{p}(\mu,t;v), \bar{q}(\mu,t;v))$ решение системы (I.5), (2.5), удовлетворяющее начальным условиям $\bar{p}|_{t=T_1(\mu)} = p^\ell(\mu,0,T_1(\mu))$, $\bar{q}|_{t=T_1(\mu)} = q(\mu,0,T_1(\mu))$.

Лемма 5.5. Найдутся такие число $0 < \delta_3^* < \delta_2^*$ и функция $0 < \mu_3^*(\delta) < \mu_2^*(\delta)$ определенная на $(0, \delta_3^*)$, что каковы бы ни были $0 < \delta < \delta_3^*$, $0 < \mu < \mu_3^*(\delta)$, $v(t) \in \mathcal{V}_\mu(\delta)$ решение $(\bar{p}^\ell(\mu,t;v), \bar{q}(\mu,t;v))$ существует при $T_1(\mu) \le t \le T_2(\mu, v)$, где

$$T_1(\mu) < T_2(\mu,v) < T_1(\mu) + C_7^* \delta^2 < T^* + \frac{\delta}{2} \qquad (50.5)$$

$$\frac{d\bar{p}^\ell(\mu,t;v)}{dt} > 0 \text{ при } T_1(\mu) \le t \le T_2(\mu,v)\,;\ \bar{p}^\ell(\mu, T_2(\mu,v), v) = \bar{p}^\ell - \delta \qquad (51.5)$$

Доказательство

При любых $0<\delta<\delta_2^*$, $0<\mu<\mu_2^*(\delta)$ в силу утверждения П) леммы 4.5 и (7.5), (9.5), (30.5) $p_t^\ell(\mu,0,T_1(\mu))>0$, $|p^\ell(\mu,0,T_1(\mu))-\bar{p}^\ell|<C\delta$, $p^\ell(\mu,0,T_1(\mu))<\bar{p}^\ell-\delta$. Пусть $v(t)\in\mathfrak{X}_\mu(\delta)$. Обозначим через $\mathfrak{O}_\mu^4(v)$ множество $\tau\in[T_1(\mu),T_1(\mu)+\delta^{5/2}]$ таких, что $(\bar{p}^\ell(\mu,t;v),\bar{q}(\mu,t;v))$ существует на $[T_1(\mu),\tau]$, и при $T_1(\mu)\le\eta\le\tau$ $\frac{d\bar{p}^\ell(\mu,\eta;v)}{dt}>0$, $\bar{p}^\ell(\mu,\eta;v)<\bar{p}^\ell-\delta$. Легко видеть, что при $\tau\in\mathfrak{O}_\mu^4(v)$ $|\bar{q}(\mu,\tau;v)-q^\circ|<C\delta^{5/2}$, если μ достаточно малое, и, следовательно,

$$|H(\tau,\bar{p}^\ell(\mu,\tau;v),\bar{q}(\mu,\tau;v))-H(T^*,\bar{p}^\ell(\mu,\tau;v),q^\circ)|<C\delta^{5/2} \tag{52}$$

$$|h(T_1(\mu),p^\ell(\mu,0,T_1(\mu)),q(\mu,0,T_1(\mu)))-h(T^*,p^\ell(\mu,0,T_1(\mu)),q^\circ)|<C\delta^{5/2}. \tag{53}$$

Из (I.5) при достаточно малом μ для $t\in\mathfrak{O}_\mu^4(v)$ имеем

$$\mu\frac{d\bar{p}^\ell(\mu,t;v)}{dt}>\beta(\bar{p}^\ell(\mu,t;v))-C\delta^{5/2}, \tag{54}$$

где $\beta(p)=-H(T^*,p,q^\circ)$. Рассмотрим $\beta(p)$ при $p^\ell(\mu,0,T_1(\mu))\le p\le\bar{p}^\ell-\delta$. Учитывая (I6.2), (I7.2), при достаточно малом δ имеем $\beta(p^\ell(\mu,0,T_1(\mu)))>C[p^\ell(\mu,0,T_1(\mu))-\bar{p}^\ell]^2$. Из (53.5) в силу утверждения П) леммы 4.5 и (I6.5) вытекает, что

$$C\delta<-h(T^*,p^\ell(\mu,0,T_1(\mu)),q^\circ)<C\delta, \tag{5}$$

если δ достаточно мало, и, следовательно, в силу (I6.2), (17.2) $p^\ell(\mu,0,T_1(\mu))-\bar{p}^\ell>C\delta$. Таким образом, $\beta(p^\ell(\mu,0,T_1(\mu)))>C\delta^2$, и $\beta'(p^\ell(\mu,0,T_1(\mu)))>0$. Из предположения Ж) § 2 вытекает, что при достаточно малом δ $\beta(\bar{p}^\ell-\delta)>C\delta$, $\beta'(\bar{p}^\ell-\delta)<0$. Нетрудно показать, что если δ достаточно мало, то $\beta(p)>C\delta^2$ при $p^\ell(\mu,0,T_1(\mu))\le p\le\bar{p}^\ell-\delta$. В силу (54.5) при достаточно малом δ $\frac{d\bar{p}^\ell(\mu,t;v)}{dt}>C\delta^2\mu^{-1}$, и, следовательно, $\bar{p}^\ell(\mu,t;v)>\bar{p}^\ell+C\delta^2\mu^{-1}(t-T_1(\mu))$. Уравнение $n(t)=\bar{p}^\ell-\delta$ имеет единственный рень $\theta(\delta,\mu)$, и $\theta(\delta,\mu)-T_1(\mu)<C\mu\delta^{-2}$. Теперь утверждение леммы 5.5 очевидно. Лемма 5.5 доказана.

Лемма 6.5. Каковы бы ни были $0<\delta<\delta_3^*$, $0<\mu<\mu_3^*(\delta)$ решение $(p(\mu,\cdot),q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu\neq 0)$ существует и единственно в $\bar{G}_{T_2(\mu)}$, где

$$T_1(\mu)<T_2(\mu)<T_1(\mu)+C_8^*\delta^2<T^*+\frac{\delta}{2} \tag{56.5}$$

$$p_t^l(\mu,0,t)=0 \quad \text{при} \quad T_1(\mu)\leq t\leq T_2(\mu), \quad p^l(\mu,0,T_2(\mu))=\bar{p}^l-\delta \tag{57.5}$$

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_{T_2(\mu)}}+\|q(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_{T_2(\mu)}}<\rho^*, \quad \|q_t(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_{T_2(\mu)}}<C_9^* \tag{58.5}$$

Доказательство леммы 6.5 аналогично доказательству леммы 4.5.

Теорема I.5. Найдутся такие число $0<\delta_4^*<\delta_3^*$ и определенная на $(0,\delta_4^*)$ функция $0<\mu_4^*(\delta)<\mu_3^*(\delta)$, что каковы бы ни были $0<\delta<\delta_4^*$, $0<\mu<\mu_4^*(\delta)$ решение $(p(\mu,\cdot),q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu\neq 0)$ существует и единственно в $\bar{G}_{T(\mu)}$, где

$$\max\{T^*,\ T_2(\mu)\}=T(\mu)<T^*+\frac{3}{4}\delta \tag{59.5}$$

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_{T(\mu)}}+\|q(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_{T(\mu)}}<C_{10}^*, \quad \|q_t(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_{T(\mu)}}<C_{11}^*, \tag{60.5}$$

$$\max_{T_2(\mu)\leq t\leq T(\mu)}|p^l(\mu,0,t)-\bar{p}^l|\to 0 \quad \text{при} \quad \mu\to 0. \tag{61.5}$$

Доказательство

В силу предположения Ж) § 2 найдется такое $\sigma_0>0$, что для любых $(t,q)\in\overline{\mathfrak{M}}^0_{\sigma_0}=\{(t,q):|t-T^*|\leq\sigma_0,\ |q-q^*|\leq\sigma_0\}$ уравнение $H(t,p^l,q)=0$ имеет единственное решение $p^l=f^l(t,q)\in C_2(\overline{\mathfrak{M}}^0_{\sigma_0})$, $\bar{p}^l=f^l(T^*,q^*)$, и $h(t,p^l,q)\geq\gamma>0$ при $(t,q)\in\overline{\mathfrak{M}}^0_{\sigma_0}$, $|\bar{p}^l-f^l(t,q)|\leq\sigma_0$. Положим

$$N^l=\max_{(t,q)\in\overline{\mathfrak{M}}^0_{\sigma_0}}|f^l(t,q)|+\sigma_0, \quad N^s=\max_{(t,q)\in\overline{\mathfrak{M}}^0_{\sigma_0},\ |p^l|\leq N^l}|g^s(t,p^l,q)|, \quad s\neq l$$

Зафиксируем произвольное $0 < \delta < \delta_3^*$, $0 < \mu < \mu_3^*(\delta)$. Предположим, что решение $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu \neq 0)$ существует в $\bar{G}_T$, $T_2(\mu) < T < T^* + \delta$, и при $T_2(\mu) \le t \le T$

$$(t, q(\mu,0,t)) \in \overline{\mathfrak{M}}^0_{\sigma_0}, \quad |p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t, q(\mu,0,t))| \le \sigma_0 , \tag{62.5}$$

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_t} + \|q(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_t} \le \gamma_0 = 2(n+m)\rho^* + 4\sum_{s=1}^{n} N^s . \tag{63.5}$$

В силу (13.5), (35.5), (56.5)-(58.5)

$$|T_2(\mu) - T^*| \le \frac{\delta}{2} + \delta^1, \quad |q(\mu,0,T_2(\mu)) - q^*| \le C\delta \tag{64.5}$$

$$|p^\ell(\mu,0,T_2(\mu)) - f^\ell(T_2(\mu), q(\mu,0,T_2(\mu)))| \le C\delta . \tag{65.5}$$

Следовательно, соотношения (62.5) имеют место при $t = T_2(\mu)$, если $0 < \delta < \bar{\delta}_1 \le \delta_3^*$. Из (58.5) вытекает (63.5) при $t = T_2(\mu)$. Отметим, что согласно (1.4), (58.5)

$$\mu\, |p^\ell_t(\mu,0,T_2(\mu))| \le C . \tag{66.5}$$

Замечая, что в силу (47.5), (57.5),

$$\int_0^{T_2(\mu)} |p^\ell_t(\mu,0,\eta)|\, d\eta \le C \tag{67.5}$$

из (7.4), (63.5) при $T_2(\mu) \le t \le T$ будем иметь

$$\|q_t(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_t} \le C\left[1 + \int_{T_2(\mu)}^{t} |p^\ell_t(\mu,0,\eta)|\, d\eta\right] . \tag{68.5}$$

Полагая в (15.4) $t_1 = T_2(\mu)$, в силу (62.5), (63.5), (66.5) при $T_2(\mu) \le t \le T$ получим

$$|p^\ell_t(\mu,0,t)| \le C\mu^{-1} e^{-\gamma\mu^{-1}(t - T_2(\mu))} + C\left[1 + \|q_t(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_T}\right] . \tag{69.5}$$

Из (68.5), (69.5) вытекает, что при $T_2(\mu) \le t \le T$

$$|p^\ell_t(\mu,0,t)| \le C_\mu^{-1} e^{-\gamma\mu^{-1}(t - T_2(\mu))} + C\left[1 + \int_{T_2(\mu)}^{t} |p^\ell_t(\mu,0,\eta)|\, d\eta\right] \tag{70.5}$$

Применяя к (70.5) лемму 0., получим

$$|p_t^\ell(\mu,0,t)| \le C\mu^{-1} e^{-\gamma\mu^{-1}(t-T_2(\mu))} + C \quad \text{при} \quad T_2(\mu)\le t\le T \tag{71.5}$$

Подставляя (71.5) в (68.5) будем иметь

$$\|q_t(\mu,.)\|_{\bar G_t} \le C \quad \text{при} \quad T_2(\mu)\le t\le T. \tag{72.5}$$

Следуя А.Н.Тихонову [6], рассмотрим функцию $\tau^2(t) = [p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))]^2$. Нетрудно показать (см. доказательство теоремы I.4, вывод неравенства (21.4)), что $\tau^2(t)\le \tau^2(T_2(\mu))+\mu C$ при $T_2(\mu)\le t\le T$, и, следовательно, в силу (65.5)

$$|p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))| \le C''_{12}[\delta^{1/2}+\mu^{1/2}]. \tag{73.5}$$

Учитывая (62.5), (63.5), из (I.I), (2.I) для $T_2(\mu)\le t\le T$ получим

$$\|p(\mu,.)\|_{\bar G_t} + \|q(\mu,.)\|_{\bar G_t} \le (n+m)\rho^* + \sum_{s=1}^{n} N^s + C''_{13}(t-T_2(\mu)) \tag{74.5}$$

В силу (72.5), (64.5) при $T_2(\mu)\le t\le T$

$$|q(\mu,0,t)-q^*| \le C^*_{14}\delta + C^*_{15}[t-T_2(\mu)], \quad |t-T^*| \le t-T_2(\mu)+\frac{\delta}{2}+\delta^3. \tag{75.5}$$

Зафиксируем теперь произвольное $\Delta T>0$ такое, что $T_2(\mu)+\Delta T<\overset{0}{T}$ при $0<\delta<\bar\delta_1$, $0<\mu<\mu_3^*(\delta)$, и

$$\Delta T < \min\left\{\frac{\sigma_0}{10},\ \frac{\sigma_0}{10C^*_{15}},\ \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{s=1}^{n} N^s}{C''_{13}}\right\}$$

Пусть $0<\delta_4^*<\bar\delta_1$ и функция $0<\mu_4^*(\delta)<\mu_3^*(\delta)$ таковы, что при любых $0<\delta<\delta_4^*$, $0<\mu<\mu_4^*(\delta)$

$$\delta_4^*+2(\delta_4^*)^3<\Delta T,\quad C^*_{12}(\delta^{1/2}+\mu^{1/2})<\frac{\sigma_0}{10},\quad \frac{\delta}{2}+\delta^3<\frac{\sigma_0}{10},\quad C^*_{14}\delta<\frac{\sigma_0}{10}$$

Пусть $0<\delta<\delta_4^*$, $0<\mu<\mu_4^*(\delta)$. Положим $T=T_2(\mu)+\Delta T$. Тогда из (73.5)-(75.5) при $T_2(\mu)\le t\le T$ имеем

$$(t,q(\mu,0,t))\in \overset{0}{\mathfrak{M}}_{\frac{\sigma_0}{2}},\quad |p^\ell(\mu,0,t)-f^\ell(t,q(\mu,0,t))|<\frac{\sigma_0}{2}, \tag{76.5}$$

$$\|p(\mu,.)\|_{\bar G_t}+\|q(\mu,.)\|_{\bar G_t} < \frac{\gamma_0}{2}. \tag{77.5}$$

Пользуясь леммой I.4 и сопоставляя (62.5), (63.5) с (76.5), (77.5), нетрудно показать, что решение $(p(\mu,.),\ q(\mu,.))$ задачи $(\mu\neq 0)$ существует в G_T, и при $T_2(\mu)\le t\le T$ имеет место (62.5), (63.5), (72.5). Положим $T(\mu)=T^*+|T_2(\mu)-T^*|$. Нетрудно показать, что $T_2(\mu)\le T(\mu)\le$ $\le T_2(\mu)+\Delta T=T$ Из (72.5), (73.5) при $T_2(\mu)\le t\le T(\mu)$ имеем

$$|p^{\ell}(\mu,o,t)-p^{\ell}|\le C^*_{16}(\delta^{1/2}+\mu^{1/2})+C^*_{17}(t-T_2(\mu))\le C^*_{18}(\delta^{1/2}+\mu^{1/2}).$$

Следовательно, (61.5) имеет место. Теорема I.5 доказана.

§ 6. Теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от μ при $\mu=0$ решения задачи $(\mu\neq 0)$ в $\bar G_{\dot T}$.

В настоящем параграфе предполагается выполненным

Условие(*): при любых $1\le i\le r$, $\overset{*}{p}{}^{\ell}\le p^{\ell}\le \bar p^{\ell}$ на $[T^*,\dot T]$ существует решение $p_i(t,p^{\ell})=(p_{i1}(t,p^{\ell}),p_{i2}(t,p^{\ell}),\dots,p_{ik_i}(t,p^{\ell}))$ задачи+)

$$\frac{dp_{i\varkappa}}{dt}=P_{i\varkappa}(\varkappa_i^-(t,o,T^*),t,p_i,\overset{1}{p}_{j\neq i}(\varkappa_i^-(t,o,T^*),t),\overset{1}{q}(\varkappa_i^-(t,o,T^*),t)) \quad (I.6)$$

$$p_{i\varkappa}\big|_{t=T^*}=g_{i\varkappa}(T^*,p^{\ell},q^*),\quad \varkappa=1,2,\dots,k_i, \quad (2.6)$$

где $g^{\ell}(T^*,p^{\ell},q^*)=p^{\ell}$. Легко видеть, что при $p^{\ell}=\overset{*}{p}{}^{\ell}$, $p^{\ell}=\bar p^{\ell}$ задача (I.6), (2.6) имеет решение на $[T^*,\dot T]$, и $p_i(t,\overset{*}{p}{}^{\ell})=$ $=\overset{1}{p}_i(\varkappa_i^-(t,o,T^*),t-0)$, $p_i(t,\bar p^{\ell})=\overset{1}{p}_i(\varkappa_i^-(t,o,T^*),t+0)$. Зафиксируем произвольное $0<\hat\rho<\frac{1}{4}$ такое, что при любых $1\le i\le r$, $\overset{*}{p}{}^{\ell}-\hat\rho\le$ $\le p^{\ell}\le\bar p^{\ell}+\hat\rho$ решение $p_i(t,p^{\ell})$ задачи (I.6), (2.6) существует на $[T^*,\dot T]$. Положим

$$m_i=\max_{\substack{T^*\le t\le \dot T\\ \overset{*}{p}{}^{\ell}-\hat\rho\le p^{\ell}\le \bar p^{\ell}+\hat\rho}}|p_i(t,p^{\ell})|,\quad \hat M=\sum_{i=1}^{r}m_i .$$

Теорема I.6. Найдется такое $0<\mu_0<\infty$, что при любом $0<\mu<\mu_0$ в $\bar G_{\dot T}$ существует единственное решение $(p(\mu,\cdot),q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu\neq 0)$, и

+) Рассматривая систему (I.6) при произвольном фиксированном $1\le i\le r$, вопреки принятому в 2^0 § 2 соглашению положим $p_j(o,T^*)=\overset{*}{p}_j$, если $j>i$ и $p_j(o,T^*)=\bar p_j$, если $j<i$. Тогда в области $T^*\le t\le \dot T$, $-\infty<p_{i\varkappa}<\infty$, $\varkappa=1,2,\dots,k_i$, правые части системы (I.6) будут функциями непрерывными по совокупности переменных t, $p_{i\varkappa}$, удовлетворяющими условию Липшица по переменным $p_{i\varkappa}$.

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar G_{\bar T}} + \|q(\mu,\cdot)\|_{\bar G_{\bar T}} \le C^*_{11} \qquad \text{при } 0<\mu<\mu_* \tag{3.6}$$

$$\|\nabla q\|_{\bar G_{\bar T}} \to 0 \qquad \text{при } \mu \to 0 \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \|\nabla p_i\|_{\bar D_{\bar T}[i_{T^*-\eta}]} + \|\nabla p_i\|_{\bar G_{\bar T}[i_{T^*+\eta}]} \to 0 \qquad \text{при } \mu \to 0 \tag{5.6}$$

каково бы ни было $\eta > 0$.

Доказательство

В силу определения I.2 и (I5.2) найдутся такие $0<\sigma_1$, $\sigma_2<1$, что для любой точки $(t,q) \in \bar{\mathfrak{M}}_{\sigma_1} = \{(t,q): T^* \le t \le \overset{\circ}{T},\ \max|q_j - \overset{1}{q}_j(0,t)| \le \sigma_1\}$ уравнение $H(t,p^\ell,q)=0$ имеет решение $p^\ell = f^\ell(t,q) \in C_2(\bar{\mathfrak{M}}_{\sigma_1})$, $\overset{11}{p}(0,t) = f^\ell(t,\overset{1}{q}(0,t))$, и оно единственно на сегменте $|p^\ell - \overset{11}{p}(0,t)| \le \sigma_2$. Пусть $0<\varkappa \le \sigma_1$ таково, что $h(t,p^\ell,q) \ge \gamma > 0$ если $(t,q) \in \bar{\mathfrak{M}}_\varkappa$, $|p^\ell - f^\ell(t,q)| \le \varkappa$.

Пусть $0<\delta \le \delta_4^*$, $0<\mu<\mu_4^*(\delta)$. В силу теорем I.4, I.5

$$|\nabla q(0,T(\mu))| < \frac{\varkappa}{10}, \quad |p^\ell(\mu,0,T(\mu)) - f^\ell(T(\mu),q(\mu,0,T(\mu)))| - \omega(\delta,\mu) < \frac{\varkappa}{10} \tag{6.6}$$

если $0<\delta<\delta_5^*$, $0<\mu<\mu_5^*(\delta)$. Пусть $T(\mu) < T \le \overset{\circ}{T}$ таково, что в $\bar G_T$ существует решение $(p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu \ne 0)$, и при $T(\mu) \le t \le T$

$$|\nabla q(0,t)| \le \varkappa, \quad |p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))| \le \varkappa \tag{7.6}$$

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar G_t} + \|q(\mu,\cdot)\|_{\bar G_t} \le \bar M, \tag{8.6}$$

где $\bar M = 7\rho^* + \hat M + C^*_{10} + 1 + \|\overset{1}{q}\|_{\bar G_{\bar T}} + \sum_{i=1}^{\ell} \|\overset{1}{p}_i\|_{\bar G_{\bar T}[i_{T^*}]} + \|\overset{1}{p}_i\|_{\bar D_{\bar T}[i_{T^*}]}$.

Отметим, что (8.6) имеет место при $t = T(\mu)$ в силу (60.5). Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в доказательстве теоремы I.5 нетрудно показать, что $|p^\ell(\mu,0,t) - f^\ell(t,q(\mu,0,t))| \le \omega(\delta,\mu)$ при $T(\mu) \le t \le T$. Следовательно,

$$|\nabla p^\ell(0,t)| \le \omega(\delta,\mu) + C|\nabla q(0,t)| \quad \text{при } T(\mu) \le t \le T. \tag{9.6}$$

Пользуясь леммой Адамара [8], из (I.I), (2.I) для $(x,t)\in \bar{G}_T$ получим

$$\nabla p_i(x,t)=\nabla p_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t))+\int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\Big\{\mathcal{E}_{ii}[\mu,\xi,\tau]\nabla p_i(\xi,\tau)+ \tag{I0.6}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{2}\mathcal{E}_{ij}[\mu,\xi,\tau]\nabla p_j(\xi,\tau)+\mathcal{F}_i[\mu,\xi,\tau]\nabla q(\xi,\tau)\Big\}_{\xi=\varkappa_i^-(\tau,x,t)}d\tau$$

$$\nabla q_j(x,t)=\int\limits_0^t\Big\{\sum_{s=1}^{2}K_j^s[\mu,\xi,\tau]\nabla p_s(\xi,\tau)+\mathcal{L}_j[\mu,\xi,\tau]\nabla q(\xi,\tau)\Big\}_{\xi=\varkappa_j^+(\tau,x,t)}d\tau, \tag{II.6}$$

где $\mathcal{E}_{ij}$, $\mathcal{F}_i$, K_j^s , $\mathcal{L}_j$ матрицы соответствующих размеров, зависящие от $x,t,\overset{1}{p},\overset{1}{q},p(\mu,.),q(\mu,.)$. Обозначим через $\overset{1}{w}_i[\mu,x,t]$ матрицу размера $K_i\times K_i$, удовлетворяющую в $\bar{G}_T$ уравнению

$$\overset{1}{w}_i[\mu,x,t]=E+\int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\mathcal{E}_{ii}[\mu,\xi,\tau]\overset{1}{w}_i[\mu,\xi,\tau]\Big|_{\xi=\varkappa_i^-(\tau,x,t)}d\tau, \tag{I2.6}$$

где E – единичная матрица. Легко видеть, что решение $\overset{1}{w}_i\in C(\bar{G}_T[i_{T*}])$ $\overset{1}{w}_i\in C(\bar{\mathcal{D}}_T[i_{T*}])$ уравнения (I2.6) существует и единственно. Из (8.6), (I2.6) вытекает

$$\|\overset{1}{w}_i[\mu,.]\|_{\bar{G}_T[i_{T*}]}<C_{20}^*\quad,\quad \|\overset{1}{w}_i[\mu,.]\|_{\bar{\mathcal{D}}_T[i_{T*}]}<C_{20}^*. \tag{I3.6}$$

Рассмотрим матрицу

$$\overset{2}{w}_i[\mu,x,t]=\nabla p_i(x,t)-\overset{1}{w}_i[\mu,x,t]\nabla p_i(\xi_i^-(x,t),\theta_i^-(x,t)). \tag{I4.6}$$

Из (I0.6), (II.6) в силу (I2.6), (I4.6) имеем

$$\overset{2}{w}_i[\mu,x,t]=\int\limits_{\theta_i^-(x,t)}^{t}\Big\{\mathcal{E}_{ii}[\mu,\xi,\tau]\overset{2}{w}_i[\mu,\xi,\tau]+\mathcal{F}_i[\mu,\xi,\tau]\nabla q(\xi,\tau)+ \tag{I5.6}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\mathcal{E}_{ij}[\mu,\xi,\tau]\Big[\overset{1}{w}_j[\mu,\xi,\tau]\nabla p_j(\xi_j^-(\xi,\tau),\theta_j^-(\xi,\tau))+\overset{2}{w}_j[\mu,\xi,\tau]\Big]\Big\}_{\xi=\varkappa_i^-(\tau,x,t)}d\tau,$$

$$\nabla q_j(x,t)=\int\limits_0^t\Big\{\sum_{s=1}^{2}K_j^s[\mu,\xi,\tau]\Big[\overset{1}{w}_s[\mu,\xi,\tau]\nabla p_s(\xi_s^-(\xi,\tau),\theta_s^-(\xi,\tau))+ \tag{I6.6}$$

$$+\overset{2}{w}_s[\mu,\xi,\tau]\Big]+\mathcal{L}_j[\mu,\xi,\tau]\nabla q(\xi,\tau)\Big\}_{\xi=\varkappa_j^+(\tau,x,t)}d\tau.$$

Положим

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{2} \| \overset{2}{w}_i [\mu, .] \|_{\bar{G}_\theta} + \| \nabla q \|_{\bar{G}_\theta} \qquad \text{при } 0 < \theta \leq T^*$$

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{2} \left[\| \overset{2}{w}_i [\mu, .] \|_{\bar{G}_\theta [i_{T^*}]} + \| \overset{2}{w}_i [\mu, .] \|_{\bar{D}_\theta [i_{T^*}]} \right] + \| \nabla q \|_{\bar{G}_\theta} \quad \text{при } T^* < \theta \leq T$$

Из (8.6), (I3.6), (I5.6), (I6.6), (0.9) и равенств $\nabla p|_{t=0} = \nabla q|_{t=0} = 0$ имеем

$$S(\theta) \leq C \int_0^\theta |\nabla \overset{\ell}{p}(0,\eta)| d\eta + C \int_0^\theta S(\eta) d\eta , \quad 0 < \theta \leq T .$$

Следовательно, в силу леммы 0.

$$S(\theta) \leq C \int_0^\theta |\nabla \overset{\ell}{p}(0,\eta)| d\eta \qquad \text{при } 0 < \theta \leq T . \qquad (I7.6)$$

Из (I7.6), (59.5), (60.5) и теоремы I.4 вытекает, что

$$S(t) \leq \omega(\delta,\mu) + C \int_{T(\mu)}^{t} |\nabla \overset{\ell}{p}(0,\eta)| d\eta \quad \text{при } T(\mu) \leq t \leq T. \qquad (I8.6)$$

Пользуясь (9.6), (I8.6) и леммой Гронуолла получим

$$|\nabla \overset{\ell}{p}(0,t)| \leq \omega(\delta,\mu), \quad S(t) \leq \omega_1(\delta,\mu) \quad \text{при } T(\mu) \leq t \leq T. \qquad (I9.6)$$

В силу (I9.6), (0.9)

$$|\nabla p(0,t)| \leq \omega(\delta,\mu), \quad |\overset{\ell}{p}(\mu,0,t) - f(t, q(\mu,0,t))| \leq \omega_2(\delta,\mu) \quad \text{при } T(\mu) \leq t \leq T. \qquad (20.6)$$

Зафиксируем произвольное $1 \leq i \leq 7$. Из (I3.6), (I4.6), (I9.6), (20.6) и теоремы I.4 имеем

$$\| \nabla p_i \|_{\bar{G}_T [i_{T(\mu)}]} \leq \omega(\delta,\mu), \quad \| \nabla p_i \|_{\bar{D}_T [i_{T^*-\delta^3}]} \leq \omega(\delta,\mu). \qquad (2I.6)$$

Отсюда

$$\| p_i(\mu,.) \|_{\bar{G}_T [i_{T(\mu)}]} + \| p_i(\mu,.) \|_{\bar{D}_T [i_{T^*-\delta^3}]} \leq \| \overset{1}{p}_i \|_{\bar{G}_T [i_{T^*}]} + \| \overset{1}{p}_i \|_{\bar{D}_T [i_{T^*}]} + \omega(\delta,\mu). \qquad (22.6)$$

Оценим $|p_i(\mu,.)|$ в $\bar{G}_T [i_{T^*-\delta^3}, i_{T(\mu)}]$. Согласно (49.5), (57.5), (6I.5) $\overset{*}{p}{}^{\ell} - \frac{1}{2}\hat{p} < \overset{\ell}{p}(\mu,0,t) < \bar{p}^{\ell} + \frac{1}{2}\hat{p}$ при $T^* - \delta^3 \leq t \leq T(\mu)$, если $0 < \delta < \delta_6^*$, $0 < \mu < \mu_6^*(\delta)$. При любых $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \min(\varepsilon, \delta_6^*)$,

$0<\mu<\mu_6^*(\delta)$ в силу (I9.6) и непрерывности $\overset{1}{\rho}{}^{\ell}(0,t)$ на $[T^*,T]$ $|\rho^{\ell}(\mu,0,t)-\rho^{\ell}(\mu,0,T(\mu))|\le\omega(\varepsilon)+\omega(\delta,\mu)$ при $T(\mu)\le t\le T^*+\varepsilon$. Следовательно, при $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, $0<\delta<\delta_7^*(\varepsilon)$, $0<\mu<\mu_7^*(\varepsilon)$ имеют место неравенства $T^*+\varepsilon<T^*-\delta^3+\Delta T_0^*$, и

$$\overset{1}{\rho}{}^{\ell}-\hat{\rho}<\rho^{\ell}(\mu,0,t)<\bar{\rho}^{\ell}+\hat{\rho} \quad \text{при } T^*-\delta^3\le t\le T^*+\varepsilon. \tag{23.6}$$

Пусть $T^*-\delta^3\le t_0\le T(\mu)$. Из (I.I), (I.6), (2.6), (8.6) при $T^*+\varepsilon\le t\le T$ имеем

$$\begin{aligned}&|p_{i\varkappa}(\mu,\varkappa_i^-(t,0,t_0),t)-p_{i\varkappa}(t,\rho^{\ell}(\mu,0,t_0))|\le g_{i\varkappa}(t_0,\rho^{\ell}(\mu,0,t_0),q(\mu,0,t_0))-\\&-g_{i\varkappa}(T^*,\rho^{\ell}(\mu,0,t_0),q^*)|+C[\varepsilon+\delta^3]+C\int_{T^*+\varepsilon}^{t}\Big\{|p_i(\mu,\varkappa_i^-(\tau,0,t_0),\tau)-\\&-p_i(\tau,\rho^{\ell}(\mu,0,t_0))|+\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|p_j(\mu,\varkappa_i^-(\tau,0,t_0),\tau)-\overset{1}{p}_j(\varkappa_i^-(\tau,0,T^*),\tau)|+\\&+|q(\mu,\varkappa_i^-(\tau,0,t_0),\tau)-\overset{1}{q}(\varkappa_i^-(\tau,0,T^*),\tau)|\Big\}d\tau.\end{aligned}\tag{24.6}$$

Каково бы ни было $1\le j\le n$, $j\ne i$ весь отрезок $\xi=\varkappa_i^-(\tau,0,t_0)$, $T^*+\varepsilon\le\tau\le T$ лежит либо в $\bar{G}_T(j_{T(\mu)})$, либо в $\bar{\mathcal{D}}_T(j_{T^*-\delta^3})$ если $0<\delta<\delta_8^*(\varepsilon)$, $0<\mu<\mu_8^*(\delta)$. Поэтому из (24.6), учитывая (I9.6), (2I.6) и непрерывность $\overset{1}{q},\overset{1}{p}_j\ (j\ne i)$ на отрезке $\xi=\varkappa_i^-(\tau,0,T^*)$ $T^*+\varepsilon\le\tau\le T$, имеем

$$\begin{aligned}&|p_i(\mu,\varkappa_i^-(t,0,t_0),t)-p_i(t,\rho^{\ell}(\mu,0,t_0))|\le C\varepsilon+\omega(\delta,\mu)+\\&+C\int_{T^*+\varepsilon}^{t}|p_i(\mu,\varkappa_i^-(\tau,0,t_0),\tau)-p_i(\tau,\rho^{\ell}(\mu,0,t_0))|d\tau.\end{aligned}$$

Следовательно, $|p_i(\mu,x,t)|\le m_i+C\varepsilon+\omega(\delta,\mu)$ для $(x,t)\in\bar{G}_T[i_{T^*-\delta^3},i_{T(\mu)}]$, $T^*+\varepsilon\le t\le T$. Из (23.6) и леммы 3.5 имеем $\|\rho(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_{T^*+\varepsilon}}<\rho^*$. Таким образом, учитывая (I9.6), (22.6), получим

$$\|p(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_T}+\|q(\mu,\cdot)\|_{\bar{G}_T}<\bar{M}-1+C_{20}^*\varepsilon+\omega_3(\delta,\mu). \tag{25.6}$$

Зафиксируем произвольные $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, $0<\delta<\delta_8^*(\varepsilon)$, $0<\mu_0<\mu_8^*(\delta)$

такие, что $\omega_1(\delta,\mu) < \frac{\varkappa}{2}$, $\omega_2(\delta,\mu) < \frac{\varkappa}{2}$, $C^*_{20}\varepsilon + \omega_3(\delta,\mu) < \frac{1}{2}$ при $0 < \mu < \mu_0$. Сопоставляя (7.6), (8.6) с (I9.6), (20.6), (25.6) и пользуясь леммами I.4, 2.4, нетрудно показать, что при любом $0 < \mu < \mu_0$ в $\bar{G}_{\hat{T}}$ существует единственное решение $(p(\mu,\cdot),q(\mu,\cdot))$ задачи $(\mu \neq 0)$, удовлетворяющее (3.6) с $C^*_{19} = \bar{M}$ и (I9.6), (2I.6) $_0T = \hat{T}$. Следовательно, (4.6), (5.6) имеют место. Теорема I.6 доказана.

Замечание. В силу (I9.6), (20.6)

$$\max_{T(\mu)\le t\le \hat{T}} |\nabla p(0,t)| + \max_{T(\mu)\le t\le \hat{T}} |\nabla q(0,t)| \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0. \tag{26.6}$$

Теорема 2.6. Условие (*) выполняется, если справедлива теорема I.6.

Доказательство

Зафиксируем любые $\overset{*}{\beta}{}^{\ell} < \hat{\beta}^{\ell} < \bar{\beta}^{\ell}$, $1 \le i \le \gamma$. Каково бы ни было $0 < \delta < \delta^*_4$, согласно (49.5), (57.5), (6I.5), для любого достаточно малого μ найдется число $t(\mu)$, $T^* - \delta^{\delta} < t(\mu) < T(\mu) < T^* + \delta$, такое что $\beta^{\ell}(\mu,0,t(\mu)) = \hat{\beta}^{\ell}$. В силу (3.6) можно указать такое $\Delta T > 0$, что решение $p_i(t,\hat{\beta}^{\ell})$ задачи (I.6), (2.6) существует на $[T^*, T^* + \Delta T]$, и $|p_i(t,\hat{\beta}^{\ell})| < C^*_{19}$ при $T^* \le t \le T^* + \Delta T$. Пусть $T^* + \Delta T < T \le \hat{T}$ таково, что $p_i(t,\hat{\beta}^{\ell})$ существует на $[T^*, T]$, и $|p_i(t,\hat{\beta}^{\ell})| \le C^*_{19} + 1$ при $T^* \le t \le T$. Пусть $\delta < \varepsilon < \Delta T$. Выберем μ столь малым, чтобы при любом $1 \le j \le \gamma$, $j \ne i$, весь отрезок $\xi = \varkappa_i^-(\tau,0,t(\mu))$, $T^* + \varepsilon \le \tau \le t$, лежал либо в $\bar{G}_T(j_{T(\mu)})$, либо в $\bar{D}_T(j_{T^* - \delta^{\delta}})$. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в доказательстве теоремы I.6, нетрудно показать, что

$$|p_i(\mu,\varkappa_i^-(t,0,t(\mu)),t) - p_i(t,\hat{\beta}^{\ell})| < C\varepsilon + \omega(\delta,\mu) \quad \text{при } T^* + \varepsilon \le t \le T$$

Поэтому при достаточно малых ε, δ, μ $|p_i(t,\hat{\beta}^{\ell})| < C^*_{19} + \frac{1}{2}$ на $T^* + \varepsilon \le t \le T$ и, следовательно, $|p_i(t,\hat{\beta}^{\ell})| < C^*_{19} + \frac{1}{2}$ на $[T^*, T]$. Из проведенного рассмотрения вытекает, что решение $p_i(t,\hat{p}^{\ell})$ существует при $T^* \le t < \overset{\circ}{T}$. Теорема 2.6 доказана.

Теорема 3.6. Какова бы ни была односвязная замкнутая область $D \in \bar{G}_f$, не имеющая общих точек ни с одной характеристикой $x = \varkappa_s^-(t,0,0)$, $x = \varkappa_s^-(t,0,T^*)$, $1 \le s \le r$, при $\mu \to 0$

$$\|\nabla p_t\|_D + \|\nabla p_x\|_D + \|\nabla q_t\|_D + \|\nabla q_x\|_D \to 0. \tag{27.6}$$

Доказательство

1°. Выберем произвольное $\eta > 0$. Из (8.4), (28.2) в силу (3.6)-(5.6), (6.4) при любых $1 \le i \le r$, $0 < \mu < \mu_0$ имеем

$$\|\alpha_i(\mu,.)\|_{\bar{G}_f} \le C, \ \|\nabla\alpha_i\|_{\bar{D}_f[i_{T^*-\eta}]} \le \omega(\mu), \ \|\nabla\alpha_i\|_{\bar{G}_f[i_{T^*+\eta}]} \le \omega(\mu). \tag{28.6}$$

Для $(x,t) \in \bar{G}_f$, $x \ne \varkappa_s^-(t,0,T^*)$ при $1 \le s \le r$, положим $S(\mu,x,t) = |\nabla q_t(x,t)| + \sum_{i=1}^{r} |\nabla p_i(x,t)|$, $S(\mu,T) = \max_{\bar{G}_T} S(\mu,x,t)$ для $0 \le T \le T^* - \eta$, $S(\mu,T) = \max_{\bar{D}_T[1_{T^*-\eta}]} S(\mu,x,t)$ для $T^* - \eta \le T \le \overset{\circ}{T}$. Из (9.2), (9.4) и уравнений для $\frac{\partial q_i}{\partial t}$, $\frac{\partial q_i}{\partial t}(\mu,.,.)$ вида (3.I), учитывая (5.4), (25.2), (3.6)-(5.6), (28.6), при $0 < \mu < \mu_0$, $0 \le t \le T^* - \eta$ получим

$$S(\mu,t) \le \omega(\mu) + C\int_0^{T^*-\eta} |\nabla p_t(0,\eta)|\,d\eta + C\int_0^t S(\mu,\tau)\,d\tau.$$

В силу (37.4), (38.4) $\int_0^{T^*} |\nabla p_t(0,\eta)|\,d\eta = \omega(\mu)$. Следовательно,

$$S(\mu,\overset{\circ}{T}) \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to 0. \tag{29.6}$$

Из (5.4), (25.2), (28.6), (29.6), (37.4) вытекает, что какова бы ни была односвязная замкнутая область $D \in \bar{D}_f(1_{T^*})$, не имеющая общих точек ни с одной характеристикой $x = \varkappa_s^-(t,0,0)$, $1 \le s \le r$

$$\|\nabla p_t\|_D + \|\nabla q_t\|_D \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to 0. \tag{30.6}$$

Из леммы 3.2 и (0.I), (0.2), (4.6), (5.6), (30.6) имеем

$$\|\nabla p_x\|_D + \|\nabla q_x\|_D \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to 0. \tag{31.6}$$

Цель дальнейших рассмотрений – оценка $S(\mu,x,t)$ и $\sum_{i=1}^{r}|\nabla\alpha_i(x,t)|$ в $\bar G_f(^1T(\mu))$. По лемме 5.4, учитывая (26.6), (60.5), (I.4) при $0<\mu\le\mu_1<\mu_0$, $T(\mu)\le t\le\overset{\circ}{T}$, имеем

$$|\nabla p_t^{\ell}(0,t)|<C\mu^{-1}e^{-\gamma\mu^{-1}(t-T(\mu))}+\omega_\mu(T(\mu),\overset{\circ}{T};t)+C\max_{T(\mu)\le\tau\le t}|\nabla q_t(0,\tau)|. \qquad (32.6)$$

По лемме 3.2 $\overset{1\ell}{p}_t(0,t)$, $\overset{1}{q}_t(0,t)\in C[T^*,\overset{\circ}{T}]$. Следовательно,

$$|p_t^{\ell}(\mu,0,t)|<C+C\mu^{-1}e^{-\gamma\mu^{-1}(t-T(\mu))}+C\|q_t(\mu,\cdot)\|_{\bar G_t}, \quad T(\mu)\le t\le\overset{\circ}{T}. \qquad (33.6)$$

Пользуясь теперь леммой 3.4, (3.6), (67.5), (7I.5) и леммой Гронуолла получим

$$\|q_t(\mu,\cdot)\|_{\bar G_f}+\sum_{i=1}^{r}\|\beta_i(\mu,\cdot)\|_{\bar G_f}<C \quad \text{при } 0<\mu\le\mu_1. \qquad (34.6)$$

В силу (3.6), (34.6) (59.5) $\mu|p_t^{\ell}(\mu,0,T^*+\delta)|$, $|F^{\mu}(T^*+\delta)|<C$ при $0<\delta<\delta_4^*$, $0<\mu<\hat\mu(\delta)=\min(\mu_1,\mu_4^*(\delta))$. Поэтому по лемме 5.4

$$|\nabla p_t^{\ell}(0,t)|<C\mu^{-1}e^{-\gamma\mu^{-1}[t-(T^*+\delta)]}+\omega_\mu(T^*+\delta,\overset{\circ}{T};t)+C\max_{T^*+\delta\le\tau\le t}|\nabla q_t(0,\tau)| \qquad (35.6)$$

при $T^*+\delta\le t\le\overset{\circ}{T}$. Следовательно, в силу (0.9), (3.6)-(5.6)

$$|\nabla p_i(0,t)|<C\mu^{-1}e^{-\gamma\mu^{-1}[t-(T^*+\delta)]}+\omega_\mu(T^*+\delta,\overset{\circ}{T};t)+C\max_{T^*+\delta\le\tau\le t}|\nabla q_t(0,\tau)|. \qquad (36.6)$$

2°. Зафиксируем произвольное $0<\delta<\delta_4^*$, $0<\mu<\hat\mu(\delta)$. Последовательно для $i=r,r-1,\dots,1$ определим точки $O_i(x_i,t_i)$, полагая $x_r=0$, $t_r=T^*+\delta$, $x_i=\xi^{-i,x_{i+1},t_{i+1}}_{-(i+1),0,T^*-\delta}$, $t_i=\tau^{-i,x_{i+1},t_{i+1}}_{-(i+1),0,T^*-\delta}$ при $1\le i\le r-1$.

Легко видеть, что $x_r<x_{r-1}<\dots<x_1$; $t_r<t_{r-1}<\dots<t_1$, и $x_1\to 0$, $t_1\to T^*$ при $\delta\to 0$. Пусть $T^*+\delta<T\le\overset{\circ}{T}$. Обозначим через N_T множество натуральных чисел $1\le i\le r$ таких, что $t_i<T$. Для любого $i\in N_T$ положим

$$\overline{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta}=\left\{(x,t): t_i\le t\le T,\ \varkappa^-_{i+1}(t,x_i,t_i)\le x\le \varkappa^-_i(t,x_i,t_i)\right\}.$$

По построению $\overline{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta}\in\overline{G}_T\left[i_{T^*},(i+1)_{T^*}\right]$, и если $i\ne r$, то $0\le\theta^-_{i+1}(x,t)\le T^*-\delta^3$, $T^*+\delta\le\theta^-_i(x,t)\le T$ для $(x,t)\in\overline{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta}$. Зафиксируем произвольные $T^*+\delta<T\le\hat{T}$, $i\in\mathcal{N}_T$. Производные $\overset{1}{p}_t$, $\overset{1}{q}_t$ удовлетворяют в $\overline{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta}$ уравнениям (26.2), (27.2); $p_t(\mu,.)$, $q_t(\mu,.)$ удовлетворяют в $\overline{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta}$ тем же уравнениям ($\overset{1}{p}$, $\overset{1}{q}$ следует заменить на $p(\mu,.)$, $q(\mu,.)$), но соответствующие члены $\sum\limits_{\rho\in\omega(s,i)}\frac{\lambda_\rho}{|\lambda_s-\lambda_\rho|}\Delta P_s[\cdot]$, $\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\nu_j}\Delta Q_j[\cdot]$ при $\mu\ne0$ равны нулю. Преобразуем (26.2),(27.2) в $\overline{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta}$ к единообразному виду для $\mu\ge0$. По выбранному δ, очевидно, найдется такое $0<\varepsilon^*(\delta)<\delta$, что каково бы ни было $0<\varepsilon<\varepsilon^*(\delta)$ при любых $1\le s<s'\le r$ точка $\left(\xi^{-s,0,T^*+\varepsilon}_{-s',0,T^*-\varepsilon^3},\ \tau^{-s,0,T^*+\varepsilon}_{-s',0,T^*-\varepsilon^3}\right)$ лежит внутри треугольника с вершинами $(0,T^*-\delta)$, $(0,T^*+\delta)$, $\left(\xi^{+m,0,T^*+\delta}_{-r,0,T^*-\delta^3},\ \tau^{+m,0,T^*+\delta}_{-r,0,T^*-\delta}\right)$. Зафиксируем теперь произвольные $0<\varepsilon<\varepsilon^*(\delta)$, $1\le s\le r$, $(x,t)\in\overline{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta}$, и рассмотрим (27.2). Для $\rho\in\omega(s,i)$ обозначим

$$\overline{\tau}^{\,-s,x,t}_{\rho}(\varepsilon)=\max\left\{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*+\varepsilon},\ \tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*-\varepsilon^3}\right\},\quad \underline{\tau}^{\,-s,x,t}_{\rho}(\varepsilon)=\left\{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*+\varepsilon},\ \tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*-\varepsilon^3}\right\}.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\theta^-_s(x,t)}^{t}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p}\,\frac{\partial\overset{1}{p}}{\partial t}\right)_{(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}d\tau=\sum_{\rho\in\omega(s,i)}\left\{\int\limits_{\theta^-_s(x,t)}^{\underline{\tau}^{-s,x,t}_{\rho}(\varepsilon)}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_\rho}\,\frac{\partial\overset{1}{p}_\rho}{\partial t}\right)_{(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}d\tau+\right.$$

$$+\int\limits_{\overline{\tau}^{-s,x,t}_{\rho}(\varepsilon)}^{t}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_\rho}\,\frac{\partial\overset{1}{p}_\rho}{\partial t}\right)_{(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}d\tau+\left.\int\limits_{\underline{\tau}^{-s,x,t}_{\rho}(\varepsilon)}^{\overline{\tau}^{-s,x,t}_{\rho}(\varepsilon)}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_\rho}\,\frac{\partial\overset{1}{p}_\rho}{\partial t}\right)_{(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}d\tau\right\}+\tag{37.6}$$

$$+\int\limits_{\theta^-_s(x,t)}^{t}\sum_{\rho\bar{\in}\omega(s,i)}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_\rho}\,\frac{\partial\overset{1}{p}_\rho}{\partial t}\right)_{(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}d\tau.$$

Для любого $\rho_0 \in \omega(s,i)$ преобразуем фигурирующий в (37.6) интеграл по $\left[\underline{\tau}_{\rho_0}^{-s,x,t}(\varepsilon),\ \bar{\tau}_{\rho_0}^{-s,x,t}(\varepsilon)\right]$. Вычисляя $\frac{d}{d\tau} P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}$ при $\theta_s^-(x,t)=\tau=t$, $\tau \neq \tau_{-\rho,0,T^*}^{-s,x,t}$, где $\rho \in \omega(s,i)$, и учитывая лемму 3.2, получим

$$\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_{\rho_0}}\frac{\partial \overset{1}{p}_{\rho_0}}{\partial t}\right)_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)} = \frac{\lambda_{\rho_0}}{\lambda_{\rho_0}-\lambda_s}\frac{d}{d\tau}P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)} +$$

$$+ R_{s\rho_0}\left[\xi,\tau,\overset{1}{p}(\xi,\tau),\overset{1}{q}(\xi,\tau),\left.\frac{\partial \overset{1}{p}_k(\xi,\tau)}{\partial t}\right|_{k\neq s,\rho_0},\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}(\xi,\tau)\right]_{\xi=x_s^-(\tau,x,t)}, \tag{38.6}$$

где $R_{s\rho_0}$ – матрица размера $k_s \times 1$, линейная по $\left.\frac{\partial \overset{1}{p}_k}{\partial t}\right|_{k\neq s,\rho_0}$, $\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}$.

Проинтегрируем (38.6) по $\left[\underline{\tau}_{\rho_0}^{-s,x,t}(\varepsilon),\ \bar{\tau}_{\rho_0}^{-s,x,t}(\varepsilon)\right]$, учитывая, что $\tau=\tau_{-\rho_0,0,T^*}^{-s,x,t}$ есть, вообще говоря, точка разрыва непрерывности первого рода функции $P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}$, и подставим полученное выражение в правую часть (37.6). Тогда (27.2) при $i=s=1$ запишется в виде

$$\frac{\partial \overset{1}{p}_s(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \overset{1}{p}_s(\xi_s^-(x,t),\theta_s^-(x,t))}{\partial t} + \int_{\theta_s^-(x,t)}^{t}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_s}\frac{\partial \overset{1}{p}_s}{\partial t}\right)_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau +$$

$$+\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t}\left\{\frac{\partial P_s}{\partial t}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}] + \frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial q}\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t} + \sum_{\substack{\rho\in\omega(s,i)\\ \rho\neq s}}\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_\rho}\frac{\partial \overset{1}{p}_\rho}{\partial t}\right\}_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau +$$

$$+\sum_{\rho\in\omega(s,i)}\frac{\lambda_\rho}{|\lambda_s-\lambda_\rho|}\left\{P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]_{\left(\xi_{-\rho,0,T^*+\varepsilon}^{-s,x,t},\ \tau_{-\rho,0,T^*+\varepsilon}^{-s,x,t}\right)} - P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]_{\left(\xi_{-\rho,0,T^*-\varepsilon}^{-s,x,t},\ \tau_{-\rho,0,T^*-\varepsilon}^{-s,x,t}\right)}\right\}+ \tag{39.6}$$

$$+\sum_{\rho\in\omega(s,i)}\left\{\int_{\theta_s^-(x,t)}^{\underline{\tau}_\rho^{-s,x,t}(\varepsilon)}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_\rho}\frac{\partial \overset{1}{p}_\rho}{\partial t}\right)_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau + \int_{\bar{\tau}_\rho^{-s,x,t}(\varepsilon)}^{t}\left(\frac{\partial P_s[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_\rho}\frac{\partial \overset{1}{p}_\rho}{\partial t}\right)_{(x_s^-(\tau,x,t),\tau)}d\tau +\right.$$

$$+\int\limits_{\underline{\tau}_{p}^{-s,x,t}(\varepsilon)}^{\overline{\tau}_{p}^{-s,x,t}(\varepsilon)} R_{sp}\left[\xi,\tau,\overset{1}{p},\overset{1}{q},\frac{\partial \overset{1}{p}_{k}}{\partial t}\Big|_{k\neq s,p},\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}\right]_{\xi=\varkappa_{s}^{-}(\tau,x,t)} d\tau \Big\}.$$

Аналогично устанавливается, что в $\overline{G}^{i,i+1}_{T,\delta}$

$$\frac{\partial \overset{1}{q}_{j}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial \overset{1}{q}_{j}(x+\nu_{j}t,0)}{\partial t}+\int\limits_{0}^{t}\Big\{\frac{\partial Q_{j}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial t}+\sum_{k=i+1}^{r}\frac{\partial Q_{j}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_{k}}\frac{\partial \overset{1}{p}_{k}}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial Q_{j}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial q}\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}\Big\}_{(\varkappa_{j}^{+}(\tau,x,t),\tau)} d\tau+\sum_{\nu=1}^{i}\frac{\lambda_{\nu}}{\lambda_{\nu}+\nu_{j}}\Big\{Q_{j}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]_{\left(\xi^{+j,x,t}_{-\nu,0,T^{*}+\varepsilon},\ \tau^{+j,x,t}_{-\nu,0,T^{*}+\varepsilon}\right)}-$$

$$-Q_{j}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]_{\left(\xi^{+j,x,t}_{-\nu,0,T^{*}-\varepsilon},\ \tau^{+j,x,t}_{-\nu,0,T^{*}-\varepsilon}\right)}\Big\}+\sum_{\nu=1}^{i}\Big\{\int\limits_{0}^{\tau^{+j,x,t}_{-\nu,0,T^{*}-\varepsilon}}\left(\frac{\partial Q_{j}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_{\nu}}\frac{\partial \overset{1}{p}_{\nu}}{\partial t}\right)_{(\varkappa_{j}^{+}(\tau,x,t),\tau)} d\tau+ \qquad (40.6_{0})$$

$$+\int\limits_{\tau^{+j,x,\tau}_{-\nu,0,T^{*}+\varepsilon}}^{t}\left(\frac{\partial Q_{j}[\overset{1}{p},\overset{1}{q}]}{\partial p_{\nu}}\frac{\partial \overset{1}{p}_{\nu}}{\partial t}\right)_{(\varkappa_{j}^{+}(\tau,x,t),\tau)} d\tau+\int\limits_{\tau^{+j,x,t}_{-\nu,0,T^{*}-\varepsilon}}^{\tau^{+j,x,t}_{-\nu,0,T^{*}-\varepsilon}} S_{\nu j}\left[\xi,\tau,\overset{1}{p},\overset{1}{q},\frac{\partial \overset{1}{p}_{k}}{\partial t}\Big|_{k\neq\nu},\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}\right]_{(\varkappa_{j}^{+}(\tau,x,t),\tau)} d\tau\Big\},$$

$$j=1,2,\dots,m\ ,$$

где функция $S_{\nu j}$ линейная по $\frac{\partial \overset{1}{p}_{k}}{\partial t}\Big|_{k\neq\nu}$, $\frac{\partial \overset{1}{q}}{\partial t}$. Легко видеть, что производные $\frac{\partial p_{k}(\mu,.)}{\partial t}$, $\frac{\partial q_{j}(\mu,.)}{\partial t}$ при $\mu\to 0$ в $\overline{G}^{i,i+1}_{T,\delta}$ удовлетворяют уравнениям (39.6_{μ}), (40.6_{μ}), получающимся из (39.6_{0}), (40.6_{0}) при замене $\overset{1}{p},\overset{1}{q},\overset{1}{p}_{t},\overset{1}{q}_{t}$ на $p(\mu,.)$, $q(\mu,.)$, $p_{t}(\mu,.)$, $q_{t}(\mu,.)$. Запишем (39.6_{0}), (39.6_{μ}) для $(x,t)\in\overline{G}^{i,i+1}_{T,\delta}$ в следующем виде

$$\frac{\partial p_{s}(\mu,x,t)}{\partial t}=\frac{\partial p_{s}(\mu,\xi_{s}^{-}(x,t),\theta_{s}^{-}(x,t))}{\partial t}+\int\limits_{\theta_{s}^{-}(x,t)}^{t}\frac{\partial P_{s}}{\partial p_{s}}\frac{\partial p_{s}(\mu,\xi,\tau)}{\partial t}\Big|_{\xi=\varkappa_{s}^{-}(\tau,x,t)} d\tau+ \qquad (41.6)$$

$$+\mathcal{L}_{s}^{i}[\mu,\varepsilon;p,q]\ ,\quad s=1,2,\dots,r\ .$$

Оценим теперь при $T^*+\delta < T \le \mathring{T}$ функцию $\bar{S}(\mu,T) = \max\limits_{\mathcal{G}_T^\delta} S(\mu,x,t)$, где $\mathcal{G}_T^\delta = \bigcup\limits_{i\in\mathfrak{N}_T} \bar{G}_{T,\delta}^{i,i+1}$. Зафиксируем произвольное $\mathcal{G}_T^\delta$ $i\in\mathfrak{N}_T$, и рассмотрим $S(\mu,x,t)$ в $\bar{G}_{T,\delta}^{i,i+1}$. В силу (28.2), (8.4), (41.6) матрица $\beta_s(\mu,.)$ $(\mu \ge 0,\ 1 \le s \le z)$ удовлетворяет в $\bar{G}_{T,\delta}^{i,i+1}$ уравнению

$$\beta_s(\mu,x,t) = \int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \frac{\partial P_s}{\partial p_s}\,\beta_s(\mu,\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)\,d\tau + \mathcal{L}_s^i[\mu,\varepsilon,p,q]\,. \tag{42.6}$$

Пользуясь (42.6) и записывая фигурирующие в $\mathcal{L}_s^i$ производные p_t при $\mu \ge 0$ в виде (5.4), (25.2) оценим $|\nabla\beta_s(x,t)|$ в $\bar{G}_{T,\delta}^{i,i+1}$. Пусть $s > i$. Оценим

$$A_1 = \int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left|\nabla \frac{\partial P_s}{\partial p_s}\,\beta_s(\xi,\tau)\right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)} d\tau = A_{1,1} + A_{1,2}\,,$$

где $A_{1,1}$ – интеграл по $[\theta_s^-(x,t),\ \tau_{-1,0,T^*-\varepsilon^3}^{-s,x,t}]$, а $A_{1,2}$ – интеграл по $[\tau_{-1,0,T^*-\varepsilon^3}^{-s,x,t},\ t]$. В силу (3.6)-(5.6), (39.6) $A_{1,1} < \omega(\mu)$, а

$$A_{1,2} = C\int\limits_{\tau_{-1,0,T^*-\varepsilon^3}^{-s,x,t}}^{t} |\nabla\beta_s(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau))|\,d\tau + C\int\limits_{\tau_{-1,0,T^*-\varepsilon^3}^{-s,x,t}}^{t} \left|\nabla\frac{\partial P_s(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}{\partial p_s}\right| d\tau\,. \tag{43.6}$$

Легко видеть, что $[\tau_{-1,0,T^*-\varepsilon^3}^{-s,x,t},\ t] = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 – объединение конечного числа непересекающихся отрезков σ_k, $k = 1,2,\dots,k_0(x,t)$, таких, что при любом $1 \le k \le k_0(x,t)$ множество $\{(\xi,\tau):\ \xi = \varkappa_s^-(\tau,x,t),\ \tau\in\sigma_k\} \in \bar{G}_{T,\delta}^{\bar{k},\bar{k}+1}$, где $\bar{k} \le i$, а Ω_2 – объединение конечного числа непересекающихся интервалов σ_j', $j = 1,2,\dots,j_0(x,t)$ таких, что $\operatorname{mes}\Omega_2 < \omega(\delta)$, и каково бы ни было $1 \le j \le j_0(x,t)$ множество $\{(\xi,\tau):\ \xi = \varkappa_s^-(\tau,x,t),\ \tau\in\sigma_j'\} \cap \mathcal{G}_T^\delta$ пустое. Учитывая теперь (3.6)-(5.6), (34.6) из (43.6) получим

$$A_{1,2} < C\int\limits_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + \omega(\delta,\mu)\,.$$

Следовательно,

$$A_1 < C \int_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + \omega(\delta;\mu) \quad \text{для} \quad (x,t) \in \bar{G}^{\,i,i+1}_{T,\delta} \,. \tag{44.6}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left\{ \left|\nabla \frac{\partial P_s}{\partial t}\right| + \left|\nabla \frac{\partial P_s}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t}\right| \right\}_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau < C \int_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + \omega(\delta,\mu) \tag{45.6}$$

$$\sum_{\rho=1}^{2} \int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left|\nabla \frac{\partial P_s}{\partial p_\rho} \beta_\rho\right|_{(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)} d\tau < C \int_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + \omega(\delta,\mu) \,. \tag{46.6}$$

Пусть $\rho \bar{\in} \omega(s,i)$. Оценим

$$B_\rho = \int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left| \frac{\partial P_s[\mu,\xi,\tau]}{\partial p_\rho} \alpha_\rho(\mu,\xi,\tau) \frac{\partial p_\rho(\mu,\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial P_s[0,\xi,\tau]}{\partial p_\rho} \alpha_\rho(0,\xi,\tau) \frac{\partial p_\rho(0,\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t} \right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)} d\tau \,.$$

В силу (3.6), (28.6) $B_\rho < C\,[B_{\rho,1} + B_{\rho,2}]$, где

$$B_{\rho,1} = \int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left|\nabla \frac{\partial p_\rho(\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t}\right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)} d\tau \,,$$

$$B_{\rho,2} = \int_{\theta_s^-(x,t)}^{t} \left|\nabla \frac{\partial P_s}{\partial p_\rho} \alpha_\rho(\xi,\tau)\right| \left|\frac{\partial p_\rho(0,\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t}\right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)} d\tau \,.$$

Учитывая (37.4), (38.4) и равенство $p_t(\mu,\cdot)\big|_{t=0} = \overset{1}{p}_t(\cdot)\big|_{t=0}$, получим

$$B_{\rho,1} < C \int_{0}^{T^*-\delta} \left|\nabla \frac{\partial p_\rho(0,\eta)}{\partial t}\right| d\eta < \omega(\mu) \,.$$

Принимая во внимание (3.6)-(5.6), (28.6), (3.2), (4.2), имеем

$$B_{\rho,2}=\int\limits_{\Omega_1}+\int\limits_{\Omega_2}\leq\omega(\mu)\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{t}\left|\frac{\partial\rho_\rho(0,\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t}\right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)}d\tau+$$

$$+C\int\limits_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\rho_\rho(0,\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t}\right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)}d\tau\leq\omega(\delta,\mu).$$

Следовательно,

$$B_\rho<\omega(\delta,\mu). \qquad (47.6)$$

Зафиксируем теперь произвольное $\rho\in\omega(s,i)$. В силу (4.6), (5.6)

$$\left|\nabla\rho_s\left(\xi^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}+\varepsilon},\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}+\varepsilon}\right)\right|,\ \left|\nabla\rho_s\left(\xi^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}-\varepsilon^3},\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}-\varepsilon^3}\right)\right|<\omega(\mu). \qquad (48.6)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_\rho^-=\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}-\varepsilon^3}}\left|\nabla\frac{\partial\rho_s}{\partial\rho_\rho}\frac{\partial\rho_\rho(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}{\partial t}\right|d\tau .$$

Легко видеть, что $J_\rho^-\leq C\sum\limits_{j=1}^{4}J_{\rho,j}^-$, где

$$J_{\rho,1}^-=\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}-\varepsilon^3}}\left|\nabla\frac{\partial\rho_\rho(\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t}\right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)}d\tau ,$$

$$J_{\rho,2}^-=\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}-\varepsilon^3}}\left|\nabla\frac{\partial\rho_s}{\partial\rho_\rho}\alpha_\rho(\xi,\tau)\right|\left|\frac{\partial\rho_\rho(0,\xi_\rho^-(\xi,\tau),\theta_\rho^-(\xi,\tau))}{\partial t}\right|_{\xi=\varkappa_s^-(\tau,x,t)}d\tau ,$$

$$J_{\rho,3}^-=\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}-\varepsilon^3}}\left|\nabla\rho_\rho(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)\right|d\tau ,\quad J_{\rho,4}^-=\int\limits_{\theta_s^-(x,t)}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^{\pm}-\varepsilon^3}}\left|\nabla\frac{\partial\rho_s(\varkappa_s^-(\tau,x,t),\tau)}{\partial\rho_\rho}\right|d\tau .$$

В силу (37.4), (38.4) $J_{\rho,1}^-\leq\omega(\mu)$. При $K=1$, $J_{\rho,K}^-=J'_{\rho,K}+J''_{\rho,K}$ где $J'_{\rho,K}$ – соответствующий интеграл по $\left[\theta_s^-(x,t),\tau^{-s,x,t}_{-1,0,T^{\pm}\varepsilon^3}\right]$, а

$J''_{\rho,\kappa}$ – соответствующий интеграл по $\mathcal{G} = \left[\tau^{-s,x,t}_{-1,0,T^*-\varepsilon^3}, \tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*-\varepsilon^3}\right]$. Учитывая (4.6), (5.6), (28.6) (29.6), имеем $J'_{\rho,\kappa} = \omega(\mu)$ $(\kappa=2,3,4)$. Оценим $J''_{\rho,\kappa}$ при $\rho = 1$. Легко видеть, что $\mathcal{G} = \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$, где $\tilde{\Omega}_1$ – объединение конечного числа непересекающихся отрезков $\tilde{\sigma}_\kappa$, $1 \le \kappa \le \tilde{\kappa}_0(x,t)$, таких, что при любом $1 \le \kappa \le \tilde{\kappa}_0(x,t)$ множество $\{(\xi,\tau): \xi = \varkappa^-_s(\tau,x,t), \tau \in \tilde{\sigma}_\kappa\} \in \bar{G}^{\hat{\kappa},\hat{\kappa}+1}_{T,\delta}$, $\hat{\kappa} \le \iota - 1$, а $\tilde{\Omega}_2$ – объединение конечного числа непересекающихся интервалов $\tilde{\sigma}'_j$, $j = 1,2,\ldots,\tilde{j}_0(x,t)$, таких, что $mes\,\tilde{\Omega}_2 = \omega(\delta)$, и каково бы ни было $1 \le j \le \tilde{j}_0(x,t)$ множество $\{(\xi,\tau): \xi = \varkappa^-_s(\tau,x,t), \tau \in \tilde{\sigma}'_j\} \cap \varphi^\delta_{\gamma T}$ пустое. Поэтому в силу (3.6)–(5.6), (28.6), (34.6)

$$J''_{\rho,3}, J''_{\rho,4} \le C \int_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + \omega(\delta,\mu)$$

$$J''_{\rho,2} \le \omega(\mu) \int_{\tau^{-s,x,t}_{-1,0,T^*-\varepsilon^3}}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*-\varepsilon^3}} \left| \frac{\partial p_\rho(0,\xi^-_\rho(\xi,\tau),\theta^-_\rho(\xi,\tau))}{\partial t} \right|_{\xi=\varkappa^-_s(\tau,x,t)} d\tau +$$

$$+ C \int_{\tilde{\Omega}_2} \left| \frac{\partial p_\rho(0,\xi^-_\rho(\xi,\tau),\theta^-_\rho(\xi,\tau))}{\partial t} \right|_{\xi=\varkappa^-_s(\tau,x,t)} d\tau \le \omega(\delta,\mu) .$$

Итак,

$$J^-_\rho \le \omega(\delta,\mu) + C \int_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau . \qquad (49.6)$$

Легко видеть, что

$$J^+_\rho = \int_{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*+\varepsilon}}^{t} \left| \nabla \frac{\partial P_s}{\partial p_\rho} \frac{\partial p_\rho(\varkappa^-_s(\tau,x,t),\tau)}{\partial t} \right| d\tau \le C \sum_{j=1}^{4} J^+_{\rho,j} ,$$

где $J^+_{\rho,j}$ – интеграл по $\left[\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*+\varepsilon}, t\right]$ подынтегрального выражения, фигурирующего в $J^-_{\rho,j}$. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным при оценках $J^-_{\rho,j}$, получим

$$J^+_\rho \le C \int_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + \omega(\delta,\mu) + C \int_{T^*+\delta}^{t} \left| \nabla \frac{\partial p_\rho(0,\tau)}{\partial t} \right| d\tau + C \int_{T^*+\varepsilon}^{T^*+\delta} \left| \nabla \frac{\partial p_\rho(0,\tau)}{\partial t} \right| d\tau . \quad (50.6)$$

в силу леммы 3.2, теоремы 1.5 и (0.9), (3.6), (33.6), (34.6) при

$$0<\mu<\mu_1(\varepsilon,\delta)=\min\left(\mu_4^*(\varepsilon),\ \hat{\mu}(\delta)\right)$$

$$\int\limits_{T^*+\varepsilon}^{T^*+\delta}|\nabla p_t(0,\tau)|d\tau<\omega(\varepsilon,\delta)+C\mu^{-1}\int\limits_{T^*+\varepsilon}^{T^*+\delta}e^{-\gamma\mu^{-1}(\tau-T(\mu))}d\tau<\omega(\varepsilon,\delta)+ \tag{51.6}$$

$$+C\mu^{-1}e^{-\gamma\mu^{-1}[T^*+\varepsilon-T(\mu)]}<\omega(\varepsilon,\delta)+C\mu^{-1}e^{-\frac{\gamma\varepsilon}{4\mu}}.$$

Следовательно,

$$J_\rho^+<\omega(\varepsilon,\delta,\mu)+C\mu^{-1}e^{-\frac{\gamma\varepsilon}{4\mu}}+C\int\limits_{T^*+\delta}^{t}\bar{S}(\mu,\tau)d\tau+C\int\limits_{T^*+\delta}^{t}|\nabla p_t(0,t)|d\tau. \tag{52.6}$$

Оценим

$$K_\rho=\int\limits_{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*-\varepsilon^3}}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*+\varepsilon}}\left|R_{s\rho}(\xi,\tau,p(\mu,.),q(\mu,.),\dots)-R_{s\rho}(\xi,\tau,p(0,.),q(0,.),\dots)\right|_{\xi=x_s^-(\tau,x,t)}d\tau$$

Пользуясь (3.6), (28.6), (34.6), будем иметь

$$K_\rho<\omega(\varepsilon)+C\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s,\rho}}^{2}\int\limits_{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*-\varepsilon^3}}^{\tau^{-s,x,t}_{-\rho,0,T^*-\varepsilon}}\left|\nabla\frac{\partial p_\nu(\xi_\nu^-(\xi,\tau),\theta_\nu^-(\xi,\tau))}{\partial t}\right|_{\xi=x_s^-(\tau,x,t)}d\tau. \tag{53.6}$$

Принимая во внимание (51.6) и оценивая фигурирующие в (53.6) интегралы при $\nu>\rho$ с помощью (37.4), (38.4), получим

$$K_\rho<\omega(\varepsilon,\mu)+C\sum_{\substack{\nu\neq s\\ \nu>\rho}}\int\limits_{T^*+\varepsilon}^{T^*+\delta}\left|\nabla\frac{\partial p_\nu(0,\tau)}{\partial t}\right|d\tau+C\sum_{\substack{\nu\neq s\\ \nu>\rho}}\int\limits_{T^*+\delta}^{t}\left|\nabla\frac{\partial p_\nu(0,\tau)}{\partial t}\right|d\tau< \tag{54.6}$$

$$< \omega(\varepsilon,\delta,\mu) + C\mu^{-1} e^{-\frac{\gamma\varepsilon}{4\mu}} + C\int\limits_{T^*+\delta}^{t} |\nabla p_t(0,\tau)|\,d\tau .$$

В силу (44.6) – (50.6), (54.6) для $(x,t)\in \bar{G}^{i,i+1}_{T,\delta}$, $1\le i\le 2$, $s\ge i$ при $0<\mu<\mu_1(\varepsilon,\delta)$ имеем

$$|\nabla p_s(x,t)| < \omega(\varepsilon,\delta,\mu) + C\mu^{-1} e^{-\frac{\delta\varepsilon}{4\mu}} + C\int\limits_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + C\int\limits_{T^*+\delta}^{t} |\nabla p_t(0,\tau)|\,d\tau . \qquad (55.6)$$

Аналогично устанавливается, что функции $|\nabla p_s(x,t)|$ при $s\le i$ и $|\nabla \frac{\partial q_j(x,t)}{\partial t}|$ при $1\le j\le m$ удовлетворяют неравенству (55.6) в $\bar{G}^{i,i+1}_{T,\delta}$, если $0<\mu\le \mu_1(\varepsilon,\delta)$. Следовательно, при любых $0<\delta<\delta_4^*$, $0<\varepsilon<\varepsilon^*(\delta)$, $0<\mu<\mu_1(\varepsilon,\delta)$ и $T^*+\delta<t<\mathring{T}$

$$\bar{S}(\mu,t) < \omega(\varepsilon,\delta,\mu) + C\mu^{-1} e^{-\frac{\delta\varepsilon}{4\mu}} + C\int\limits_{T^*+\delta}^{t} \bar{S}(\mu,\tau)\,d\tau + C\int\limits_{T^*+\delta}^{t} |\nabla p_t(0,\tau)|\,d\tau \qquad (56.6).$$

Исключая из правой части (56.6) $|\nabla p_t(0,\tau)|$ с помощью (36.6) и применяя затем лемму Гронуолла, получим

$$\bar{S}(\mu,t) < \omega(\varepsilon,\delta,\mu) + \hat{C}\mu^{-1} e^{-\frac{\delta\varepsilon}{4\mu}} + C \quad \text{при} \quad T^*+\delta\le t\le \mathring{T} . \qquad (57.6)$$

Пусть $\omega(\varepsilon,\delta,\mu) + \hat{C}\mu^{-1} e^{-\frac{\delta\varepsilon}{4\mu}} < 1$ если $0<\delta<\delta_5^*\le\delta_4^*$, $0<\varepsilon<\varepsilon_2^*(\delta)\le\varepsilon_1^*(\delta)$, $0<\mu\le\mu_2(\varepsilon,\delta)\le\mu_1(\varepsilon,\delta)$. Тогда в силу (57,6), (36,6)

$$|\nabla p_t(0,T^*+2\delta)| < C\mu^{-1} e^{-\frac{\gamma\delta}{\mu}} + C < C \quad \text{при} \quad 0<\mu<\mu_3(\varepsilon,\delta) \qquad (58.6)$$

$$\bar{S}(\mu,T^*+2\delta) < C. \qquad (59.6)$$

Пользуясь теперь леммой 5.4 и (0.9), (3.6)–(5.6), для $T^*+2\delta\le t\le\mathring{T}$ получим

$$|\nabla p_t(0,t)| < C e^{-\frac{\gamma}{\mu}[t-(T^*+2\delta)]} + \omega_\mu(T^*+2\delta,\mathring{T};t) + \qquad (60.6)$$

$$+ C\cdot \max_{T^*+2\delta\le\tau\le t} |\nabla q_t(0,\tau)|$$

заменяя δ на 2δ во всех рассуждениях, проведенных в 2°, для $0<\delta<\delta_6^*$, $0<\varepsilon<\varepsilon_3^*(\delta)$, $0<\mu<\mu_3(\varepsilon,\delta)$ при $T^*+2\delta\le t\le\overset{\circ}{T}$ получим (56.6), где δ следует заменить на 2δ. Из (60.6), (56.6) имеем

$$\bar{S}(\mu,t)<\omega(\varepsilon,\delta,\mu)+C\mu^{-1}e^{-\frac{\delta\varepsilon}{4\mu}} \qquad \text{при } T^*+2\delta\le t\le\overset{\circ}{T} \tag{61.6}$$

$$|\nabla p_t(0,t)|\le Ce^{-\delta\mu^{-1}[t-(T^*+2\delta)]}+\omega_\mu(T^*+2\delta,\overset{\circ}{T};t)+$$
$$+\omega(\varepsilon,\delta,\mu)+C\mu^{-1}e^{-\frac{\delta\varepsilon}{4\mu}} \qquad \text{при } T^*+2\delta\le t\le\overset{\circ}{T} \tag{62.6}$$

Принимая во внимание (30.6), (31.6), выберем теперь произвольную односвязную замкнутую область D такую, что $D\in\bar{G}_{\dagger}[i_{T^*},(i+1)_{T^*}]$ при некотором $1\le i\le 2$. Пусть D не имеет общих точек ни с одной характеристикой $x-\varkappa_s(t,0,0)$, $1\le s\le 2$. При любом достаточно малом δ $D\in\bar{G}^{i,i+1}_{\dagger,\delta}$. Пользуясь (5.4), (25.6), (37.4), (61.6), (62.6) нетрудно показать, что

$$\|\nabla p_t\|_D+\|\nabla q_t\|_D\to 0 \qquad \text{при } \mu\to 0 . \tag{63.6}$$

Из (6.1), (6.2) в силу (4.6), (5.6), (63.6) получим

$$\|\nabla p_x\|_D+\|\nabla q_x\|_D\to 0 \qquad \text{при } \mu\to 0 \tag{64.6}$$

Теорема 3.6 доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Гольдберг, Разрывные решения нелинейных смешанных задач для почти линейных гиперболических систем на плоскости, I, Матем., сб., (в печати).
2. Levin J.I., Levinson N., Singular perturbations of non-linear systems of differential equations and an associated boundary layer equation. J.Rational Mech.and Anal.3,1954,247-270. (см. также Л.Флетто, Н.Левинсон, Периодические решения сингулярно возмущенных систем, сб. Математика, 2:2, 1958, 61-68).
3. Ю.М.Репин, Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом, ПММ, 21, вып. 2, 1957, 253-261.
4. М.Г.Крейн, Лекция по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, 1964, АН УССР, Ин-т матем., Киев.
5. В.Н.Гольдберг, Ю.М.Неймарк, Корректность постановки нелинейной смешанной задачи для волнового уравнения на плоскости, Матем., сб., т. 67, (109:1, 1965, 16-54).
6. А.Н.Тихонов, О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, Матем., сб., т. 28 (69):1, 1950, 147-156.
7. Э.Беккенбах, Р.Беллман, Неравенства, 1965, Мир.
8. И.Г.Петровский, Лекция по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1952, ГИТТЛ, Москва-Ленинград.
9. В.Н.Гольдберг, Разрывные решения нелинейных смешанных задач для гиперболических уравнений на плоскости, II, Матем., сб., (в печати).