

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 19



ИРФИ

Л.А.Островский, И.А.Папилова

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УСИЛЕНИИ ВОЛН
В АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

г.Горький,
1971 г.

А н н о т а ц и я

Рассматривается нелинейное взаимодействие произвольных мод в акустическом волноводе на различных частотах. Проводится, в частности, расчет вырожденных параметрических усилителей на основе прямоугольных волноводов с водой при различных граничных условиях (жесткая и свободная граница, смешанные случаи). Исследуется также влияние поверхностных волн на усиление внутренних волн в волноводе.

Трудности реализации **нелинейных взаимодействий** звуковых волн в жидкостях и газах связаны, как известно, с малостью дисперсии среды [1,2], что приводит к синхронному возбуждению высших гармоник взаимодействующих волн и, в результате, к существенным потерям энергии. Эти трудности в значительной мере снимаются при использовании волноводных систем, где дисперсия обусловлена влиянием границ. При этом возбуждение определенных мод волновода позволяет осуществить синхронизм между накачкой и сигналом.

В данной работе исследуется **нелинейное взаимодействие** различных мод в акустических волноводах. В качестве примера рассчитаны коэффициенты усиления и частотная полоса вырожденных параметрических систем на основе **прямоугольных волноводов** с водой для различных типов граничных поверхностей.

Метод усреднения для волноводных систем. Будем исходить из уравнений акустики с учетом **нелинейных членов** второго порядка малости [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \bar{\zeta} &= - M s_1 \\ \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \nabla \xi &= - M s_2 \end{aligned} \quad (1)$$

где $S_1 = \nu(\xi \bar{z})$, $S_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} (\xi \bar{z}) + (\bar{z} \nabla \bar{z}) + (\bar{z} \nabla) \bar{z} + \frac{\delta-1}{2} \xi \nabla \xi \right)$, ν - показатель адиабатичности; ξ и \bar{z} - безразмерные возмущения плотности ρ и скорости частиц среды \bar{v} определяемые следующим образом; $\rho = \rho_0 (1 + M \xi)$, $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{V_m}$, где V_m - некоторая постоянная порядка максимального значения \bar{v} в задаче, $M = \frac{V_m}{c_0} \ll 1$ - максимальное число Маха, c_0 - скорость звука. Вместе с \bar{t} и \bar{x} введены безразмерные переменные $\tau = \bar{t}/T$, $\bar{x} = \bar{z}/\lambda$, где T и $\lambda = T/c_0$ - некоторые характерные масштабы порядка периода и длины взаимодействующих волн.

Рассмотрим волновод произвольного сечения, ось которого направлена вдоль X ; на боковых стенках волновода заданы недиссипативные граничные условия, так что нормальная компонента потока энергии на стенке равна нулю. Для анализа нелинейного взаимодействия обобщим метод усреднения, известный для одномерных волн (см., например, 3)⁺ Будем искать решение (1) в виде:

$$\xi = \sum_s \sum_{p,q} A_s^{pq}(x,t) \exp(i\omega_s t - ik_m(\omega_s)x) \cdot \psi_{pq}(\bar{z}_1) + k.c. + MP(t, \bar{z}_1, x) \quad (2)$$

$$\bar{z} = \sum_s \sum_{p,q} A_s^{pq}(x,t) \exp(i\omega_s t - ik_m(\omega_s)x) \cdot \psi_{pq}(\bar{z}_1) \bar{\psi}_s^{pq}(\bar{z}_1) + k.c. + M\bar{W}(t, \bar{z}_1, x),$$

⁺ Некоторые случаи взаимодействия электромагнитных волн в волноводе уже рассматривались ранее [4]. Что же касается акустических волн, то для них, по-видимости, рассматривались лишь малые нелинейные поправки к одноволновому решению [10].

где индекс S фиксирует частоту волны, а ρ и q - поперечную структуру соответствующей моды волновода. Зависимость комплексной амплитуды A от x и t предполагается медленной; ρ и \vec{W} - некоторые малые поправки к искомому решению первого приближения. Функции ψ_{pq} и $\bar{\psi}_{pq}^S$ соответствуют структуре ортогональных мод волновода в линейном приближении и, следовательно, удовлетворяют уравнению

$$\Delta_{\perp} \psi_{pq} + (\alpha_{pq}^S)^2 \psi_{pq} = 0 \quad (3)$$

$$\bar{\psi}_{pq}^S = - \frac{\nabla \psi_{pq} - i \vec{k}_{pq} \psi_{pq}}{i \omega_S \psi_{pq}}$$

с граничными условиями $\psi_{pq} = 0$ либо $\frac{\partial \psi_{pq}}{\partial n} = 0$ на стенках. В (3) \vec{k}_{pq} - поперечный волновой вектор, определяемый дисперсионным соотношением

$$(\alpha_{pq}^S)^2 = \frac{\omega_S^2}{c_0^2} - k_{pq}^2 \quad (4)$$

Подставим теперь (2) в (1), учитывая (3) и (4). Тогда в первом порядке по $\frac{M}{W}$ легко получить систему уравнений для ρ и \vec{W}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{W} = \vec{J}_1 + \sum_S \sum_{pq} \left(\frac{\partial A_S^{pq}}{\partial t} \psi_{pq}(\vec{r}_1) + \frac{\partial A_S^{pq}}{\partial x} \psi_{pq}(\vec{r}_1) \bar{\psi}_{x pq}^S \right) \exp(i\omega_S t - i k_m x) + k.c.$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \rho = \vec{J}_2 + \sum_S \sum_{pq} \left(\frac{\partial A_S^{pq}}{\partial t} \psi_{pq} \bar{\psi}_{pq}^S + \psi_{pq} \nabla A_S^{pq} \right) \exp(i\omega_S t - i k_m x) + k.c \quad (5)$$

Здесь \vec{F}_1 и \vec{F}_2 - правые части (1), в которые подставлены выражения (2) при $\rho=0$ и $\vec{W}=0$.

Далее, как обычно, потребуем ограниченности функций ρ и \vec{W} . Ясно, что достаточно установить условия неубывания одной из них, поскольку ограниченность второй следует тогда из (5). Поэтому исключим из (5) \vec{W} +)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta \rho = \Phi \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{F}_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_s \sum_{pq} \left(\frac{\partial A_s^{pq}}{\partial t} \psi_{pq}^s + \psi_{pq}^s \nabla A_s^{pq} \right) \vec{\psi}_{pq}^s \right) \exp i\omega_s t - i k_m x \\ & - \operatorname{div} \left(\sum_s \sum_{pq} \frac{\partial A_s^{pq}}{\partial t} \psi_{pq}^s \vec{\psi}_{pq}^s + \psi_{pq}^s \nabla A_s^{pq} \right) \exp i\omega_s t - i k_m x \end{aligned}$$

Пользуясь далее ортогональностью и полнотой системы собственных функций (4), представим ρ в виде $\rho = \sum P_{mn}(x, t) \psi_{mn}(\vec{r}_1)$. Проводя ортогонализацию в (6), получим для каждой моды

$$\frac{\partial^2 P_{mn}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P_{mn}}{\partial x^2} - \alpha_{mn}^2 P_{mn} = \Phi_{mn} \quad (7)$$

+) Можно, разумеется, получать те же результаты непосредственно из системы (5), что, однако, связано с несколько более громоздкими выкладками.

где
$$\Phi_{mn} = \frac{\int \psi_{mn} \Phi \beta ds_{\perp}}{\int \psi_{mn}^2 \beta ds_{\perp}} = f_{mn} + a_{mn}, \quad \beta - \text{ве-}$$

совая функция, а

$$f_{mn} = \frac{\int \left(\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial \tau} - \text{div} \vec{F}_2 \right) \psi_{mn} \beta ds_{\perp}}{\int \psi_{mn}^2 \beta ds_{\perp}}; \quad a_{mn} = \left[\frac{\int \psi_{mn} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sum_S \sum_{pq} \frac{\partial A_S^{pq}}{\partial \tau} \psi_{pq} \beta ds_{\perp} \right)}{\int \psi_{mn}^2 \beta ds_{\perp}} + \frac{\int \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial A_S^{pq}}{\partial x} \psi_{pq} \overline{\Psi}_{xpq}^s \right) - \text{div} \left(\sum_S \sum_{pq} \frac{\partial A_S^{pq}}{\partial \tau} \psi_{pq} \overline{\Psi}_{pq}^s + \psi_{pq} \nabla A_S^{pq} \right) \psi_{mn} \beta ds_{\perp}}{\int \psi_{mn}^2 \beta ds_{\perp}} \right] \exp i \omega_s t - i k_m x$$

где S_{\perp} - поперечное сечение волновода.

Задача, таким образом, сведена к одномерной.

Условие ненарастания P (а значит, и \overline{W}) сводится теперь к требованию ортогональности по x, t правой части (7) обобщенным функциям левой части для каждой из взаимодействующих мод в отдельности. В результате получим

$$\frac{\partial A_S^{mn}}{\partial \tau} + V_{mn}^s \frac{\partial A_S^{mn}}{\partial x} = \overline{f}_{mn}^s \quad (8)$$

где $\overline{f}_{mn}^s = \int f_{mn}^s \exp -i(\omega_s t - k_m(\omega_s) x)$; V_{mn}^s - групповая скорость данной моды на частоте ω_s , соответствующая линейному приближению. Аналогичным образом

могут быть получены уравнения высших приближений.

Число связанных уравнений в системе (8) определяется числом волн, частоты которых связаны резонансными условиями вида $\omega_s = \omega_e \pm \omega_m$, $k_s = k_e \pm k_m$ но это число увеличивается в случае вырождения, когда одни и те же ω_s и k_s отвечают модам с разной структурой. С другой стороны, из-за пространственной ортогональности нелинейных членов взаимодействия может отсутствовать. ($\int_{mn} = 0$) даже при выполнении резонансных условий.

Вырожденное параметрическое усиление. Рассмотрим далее синхронное взаимодействие двух волн на кратных частотах ω и 2ω , причем каждой из частот соответствует определенная мода волновода, и для этих мод выполнены условия синхронизма: $\omega_1 = 2\omega + \delta$, $k_2 = 2k_1 + \Delta$ (δ - малая расстройка, а $\Delta = 2 \frac{\partial k_2}{\partial \omega} \delta$).

Положим также, что соответствующие моды не вырождены, а для других частот, кратных ω , условие синхронизма не выполняется ни на одной из них.

Тогда для установившихся процессов ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) из (8) получим

$$i \frac{2k_{mn}}{\omega_1} \frac{\partial A^{mn}}{\partial x} = M A_1^{mn*} A_2^{m'n'} B_1^{mn} \exp i\delta T - i\Delta x \quad (9)$$

$$i \frac{2k_{m'n'}}{\omega_2} \frac{\partial A_2^{m'n'}}{\partial x} = M (A_1^{mn})^2 B_2^{m'n'} \exp -i\delta T + i\Delta x$$

где

$$\begin{aligned}
 \beta_1^{mn} = & - \int \left\{ \nabla \left(-\frac{1}{i\omega_2} (\nabla \psi_{mn} + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn}) \right) \nabla (\nabla \psi_{m'n'} - i \vec{k}_{m'n'} \psi_{m'n'}) \right. \\
 & + \nabla \left[\left(\frac{1}{i\omega_2} (\nabla \psi_{m'n'} - i \vec{k}_{m'n'} \psi_{m'n'}) \right) \nabla \right] \frac{\nabla \psi_{mn} + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn}}{i\omega_1} + \\
 & + \nabla \left(\frac{1}{i\omega_2} (\nabla \psi_{m'n'} - i \vec{k}_{m'n'} \psi_{m'n'}) \right) \nabla \frac{(\nabla \psi_{mn} + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn})}{i\omega_1} + \nabla \left[\left(-\frac{1}{i\omega_1} \nabla \psi_{mn} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn} \right) \nabla \right] \frac{\nabla \psi_{m'n'} - i \vec{k}_{m'n'} \psi_{m'n'}}{i\omega_2} + \frac{\delta-1}{2} \left[\psi_{mn} \nabla^2 \psi_{m'n'} + 2 \nabla \psi_{mn} \nabla \psi_{m'n'} \right. \\
 & \left. + \psi_{m'n'} \nabla^2 \psi_{mn} \right] \left. \right\} \frac{\psi_{mn} \beta dS_{\perp}}{\int \psi_{mn}^2 \beta dS_{\perp}} \\
 \beta_2^{mn} = & - \int \left\{ \nabla \left(-\frac{1}{i\omega_1} (\nabla \psi_{mn} + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn}) \right) \frac{\nabla (\nabla \psi_{mn} + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn})}{-i\omega_1} \right. + \\
 & + \nabla \left[\left(\frac{1}{i\omega_1} (\nabla \psi_{mn} + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn}) \right) \nabla \right] (\nabla \psi_{mn} + i \vec{k}_{mn} \psi_{mn}) + \frac{\delta-1}{2} \left[\psi_{mn} \nabla \psi_{mn} + \right. \\
 & \left. + \nabla \psi_{mn} \nabla \psi_{mn} \right] \left. \right\} \frac{\psi_{m'n'} \beta dS_{\perp}}{\int \psi_{m'n'}^2 \beta dS_{\perp}}
 \end{aligned}$$

Если ввести действительные амплитуду и фазу, так что $A = a \exp i\theta$, то система (9) примет вид:

$$\frac{2\kappa_{mn}}{\omega_1} \frac{\partial a_1}{\partial x} = Ma_1 a_n J_m (B_1^{mn} \exp i\theta)$$

$$\frac{2\kappa_{m'n'}}{\omega_2} \frac{\partial a_{n'}}{\partial x} = -Ma_1^2 J_m (B_2^{mn} \exp i\theta) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \Delta + \left(\frac{Ma_n \operatorname{Re}(B_1 \exp i\theta)}{2\kappa_{mn}} - \frac{Ma_1^2 \operatorname{Re}(B_2 \exp i\theta)}{2\kappa_{min}} \right)$$

Здесь $\theta = \theta_2 - 2\theta_1 - \Delta x$

Уравнения типа (10) хорошо изучены применительно к задачам нелинейной электродинамики и оптики [5].

Если, в частности, $\Delta = 0$, $a_n \gg a_1$ (параметрическое усиление в заданном поле накачки), то из (10) следует, что a_1 изменяется экспоненциально

$$a_1 = a_{10} \exp \frac{Ma_n}{2\kappa_1} J_m B_1 \exp i\theta x \quad (11)$$

Ясно, что при действительных B_1 максимальный инкремент по x достигается для $\theta = \pi/2$ и равен в размерных переменных (ср. [6])

$$q = M \cdot B_1 \pi f_n / 2\kappa_1 C_0 \text{ см}^{-1} \quad (12)$$

Отметим, что q растет с приближением к критической частоте данной моды, где $\bar{K}_1 \rightarrow 0$ (однако полоса усиления при этом сужается).

Для оценки полосы пропускания усилителя следует решать систему (10) при $\Delta \neq 0$. Выражение для $a_1(x)$ при этом довольно громоздко. Поэтому будем рассматривать случай, когда на границах полосы относительная расстройка велика, так что

$\Delta/a_n \sigma_1 \gg 1$, где $\sigma_1 = \frac{MB_1 \pi f_n}{2K_1 C_0}$. Тогда решение (10) имеет вид (ср. [5])

$$a_1(x) = a_{10} \exp \frac{MB_1 a_n \pi f_n}{2K_1 C_0} \cdot \frac{\sin \Delta x / 2}{\Delta / 2} \quad (13)$$

$$\psi = \Delta \cdot x + \psi(0)$$

т.е. в данном случае $a_1(x)$ изменяется периодически с периодом $\lambda = \frac{4\pi}{\Delta}$. Определим, как обычно, полосу усиления δ из условия падения коэффициента усиления по мощности вдвое и добавим естественное условие достижения максимального усиления по x на границах полосы, т.е. $\frac{\lambda}{4} = l_0$ при $\Delta \cdot v_{2p} = \sigma$, где l_0 - длина системы. Тогда, пользуясь (12), найдем

$$\delta/\omega_0 = \frac{2MB_1 \cdot a_n v_{2p}}{K_1 \ln(K^0/1,4) \cdot C_0} \quad (14)$$

Сделаем еще замечание относительно импульсного режима. Здесь проявляется особенность волноводных параметрических систем по сравнению с обычно рассматриваемыми, например, в оптике, где дисперсия связана со свойствами диэлектрика. Именно, в последнем случае групповые скорости v_{gr} синхронных волн различны, поэтому импульсы накачки и сигнала расходятся, так что эффективное усиление происходит лишь на ограниченной длине [7]. Для волновода же, как известно, $v_{gr} \cdot v_{ф} = c_0^2$, и равенство фазовых скоростей одновременно означает равенство групповых, т.е. усиление импульсов происходит так же, как и непрерывных сигналов (до тех пор, пока справедливо "групповое" приближение).

Приведем далее примеры возможных реализаций параметрического усиления в прямоугольном волноводе при различных граничных условиях.

а) Волновод с жесткими стенками. Граничные условия в этом случае имеют вид $(\vec{z})_{n/s} = 0$, где $(\vec{z})_n$ - нормальная компонента скорости на границе. Тогда для структуры соответствующих мод имеем

$$\psi_{mn}^{12} = \cos \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{b} z, \quad (15)$$

где a и b - размеры волновода по осям y и z соответственно; m и n - целые числа. Согласно (15), резонансные соотношения (9) выполняются, если

$$\frac{m_2^2}{(a)^2} + \frac{n_2^2}{(b)^2} = 4 \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{b^2} \right) \quad (16)$$

Из (16), в частности, следует, что условия синхронизма справедливы для любой пары мод с $m_2 = 2m_1$, и $n_2 = 2n_1$, независимо от размеров волновода. В качестве примера рассмотрим усиление на модах $\psi_{02}^{(2)}$ и $\psi_{01}^{(1)}$. В этом случае для B_1 имеем

$$B_1 = -\bar{k}_1^4 + 2\bar{x}_{12}^4 + 2\bar{k}_1^2 \bar{x}_{12}^2 - \frac{\nu-1}{4}(\bar{k}_1^2 + 2\bar{x}_{12}^2) \quad (17)$$

Здесь $\bar{x}_{12} = \pi c_0 / \delta \omega_0$ и $\bar{k}_1^2 = 1 - \bar{x}_{12}^2$. Инкремент q теперь определяется из (12).

Приведем простейшую оценку для волновода, заполненного водой. Пусть $a = 7$ мм и $b = 2,8$ см (критическая частота такого волновода на моде ψ_{01} $f_k = 268$ кгц), тогда при $f_0 = 300$ кгц и $f_M = 600$ кгц имеем: $\bar{k}_1 = 0,44$, $\bar{x}_{12} = 0,81$ и $B_1 = 2,8$. Положим $M = 3 \cdot 10^{-4}$, что соответствует здесь интенсивности накачки J_M , равной 5 вт/см². В результате, согласно (12); $q = 0,84$ м⁻¹, так что коэффициент усиления $K_0 = \exp qL$ равен 2,3 на 1 метр. Отметим, что полоса усиления для такого волновода имеет порядок 0,6% от несущей частоты. Интересно отметить, что для плоских волн в свободном пространстве, распространяющихся в одном направлении, при той же мощности волны накачки аналогичный расчет даст $K = 1,3$ на метр (ср. [8]). Это объясняется уменьшением групповой скорости волн v_{gr} в волноводе по сравнению со свободным пространством, что при равных $J_M \sim v_{gr}^D$ отвечает большему числу Маха; последнее с избытком компенсирует уменьшение эффекта из-за различия в поперечной структуре мод. Необходи-

димо также иметь в виду, что в свободном пространстве уже на расстоянии 1,2 м при $M = 10^{-4}$ в волне накачки образуется ударная волна, и далее накачка резко затухает. Для данного волновода также отсутствует полная развязка с волнами высших гармоник; так, мода ψ_{04} находится в синхронизме с волной накачки на ее второй гармонике (плотности). Однако ввиду различия в структуре мод взаимодействие с "вредными" компонентами здесь слабее — расчет дает для второй гармоники значение не более 0,1 от амплитуды накачки на расстоянии 1 метр. Вышние же гармоники незначительны, поэтому усиление сигнала возможно на гораздо больших расстояниях.

б) Волновод со свободными границами, Для волновода с достаточно тонкими стенками, заполненного водой и находящегося в воздухе, можно записать граничное условие в виде $\xi_3 = 0$, что соответствует свободной границе. При этом вместо (13) имеем

$$\psi_{mn}^{1,2} = \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{b} \quad (18)$$

Условие синхронизма накачки и сигнала записывается в прежней форме (16). По-прежнему для любых двух мод $m_2 = 2m_1$, $n_2 = 2n_1$ выполняется резонансное условие (8). Однако для таких мод, как нетрудно убедиться, $B_1 = 0$ (нелинейные члены ортогональны). Тем не менее здесь возможно эффективное взаимо-

действие, если наложить дополнительное условие на размеры волновода. В данном случае параметрическое усиление происходит, например, на модах с $m_1 = m_2 = 1$ и $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, если размеры волнода удовлетворяют условию $b^2/a^2 = 5/3$. Соответствующий коэффициент β_1 для мод ψ_{11} и ψ_{13} имеет вид

$$\beta_1 = + \frac{1}{4\pi^2} \left(-4\bar{k}_1^4 \frac{704}{45} + \frac{\bar{x}_{14}^2 \bar{k}_1^2 \cdot 352 + \bar{x}_{12}^2 \bar{x}_{1y}^2 864}{45} - \bar{x}_{1y}^2 \bar{k}_1^2 1668 + \bar{k}_1^2 \bar{x}_{1y}^2 559,6 - \bar{x}_{1y}^2 \bar{x}_{1z}^2 \cdot 400 \right) + \frac{\nu-1}{2\pi^2} \left(\frac{-\bar{k}_1^2 704 - \bar{x}_{1y}^2 352 + \bar{x}_{1z}^2 800}{45} \right) \quad (19)$$

Для такого волновода при $a = 7$ мм, $b = 8,7$ мм и $M = 3 \cdot 10^{-4}$, что здесь соответствует $J_H = 6$ Вт/см², $\bar{x}_{1z} = 0,44$, $\bar{x}_{1y} = 0,5$, $\bar{k}_1 = 0,83$, так что $\bar{k} = 5,7$ на метр; полоса усиления имеет порядок 2% от несущей частоты при $f_0 = 200$ кГц и $f_H = 400$ кГц. Отметим также, что здесь достигается значительно большая развязка с высшими гармониками, чем в рассмотренном выше случае, относящемся к волноводу с жесткими стенками, что связано с более сложной структурой мод для синхронных гармоник. Так, при $b^2/a^2 = 5/3$ вторая гармоника синхронна с накачкой лишь на моде ψ_{26} .

в) Волновод с одной свободной поверхностью.

Рассмотрим еще волновод в виде открытого прямо-

угольного канала с водой (рис.1). В данном случае три границы волновода можно считать жесткими ($(\frac{\partial \bar{z}_n}{\partial x})_z = 0$), а четвертую свободной ($\xi = 0$). При этом распределение плотности в сечении имеет вид

$$\psi_{mn}^{1,2} = \cos \frac{m\pi}{a} y \cos \left(\frac{2n+1}{2b} \right) \pi z \quad (20)$$

Для синхронного взаимодействия накачки и сигнала здесь необходимо удовлетворить условию:

$$\frac{m_2^2}{a^2} + \frac{(2n_2+1)^2}{4b^2} = 4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{(2n_1+1)^2}{4b^2} \right) \quad (21)$$

откуда и определяется структура мод, на которых возможно эффективное усиление. Условие (21) выполняется, если, например: а) сигналу соответствует мода ψ_{10} , накачке ψ_{10} , причем $b^2/a^2 = 3/4$ или б) сигнал на моде ψ_{1c} , а накачка на моде ψ_{01} при $b^2/a^2 = 5/16$.

Тогда, в случае б) для θ_1 имеем

$$\theta_1 = \frac{8}{15\pi} (\bar{x}_1^4 + 9 \bar{x}_{12}^4 + 3 \bar{x}_{14}^2 \bar{x}_1^2 + 3 \bar{x}_{12}^2 \bar{x}_1^2 + 9 \bar{x}_{14}^2 \bar{x}_{12}^2) + (\bar{x}_{12}^4 - 27 - 7,5 \bar{x}_1^2 \bar{x}_{12}^2) \frac{2}{5\pi} + \frac{4}{15\pi} (\eta - 1) (-9 \bar{x}_1^2 - 9 \bar{x}_{12}^2 - \bar{x}_{14}^2)$$

а в случае а) $\theta_1 = 0$, что связано с ортогональностью мод выбранной структуры.

Приведем некоторые оценки. Пусть $a = 7$ мм, тогда $b = 3,5$ мм и при $f_0 = 200$ кГц $\bar{x}_{14} = 0,53$:

$\bar{x}_{1,2} = 0,6$, $\bar{\mu} = 0,6$; если еще $M = 3 \cdot 10^{-4}$, что соответствует $J_H = 5$ вт/см, то $\delta_1 = 2,3$ и инкремент q , согласно (12), равен $0,28 \text{ м}^{-1}$, так что $K = \exp(qL) = 1,4$ на расстоянии 1 м.

Отметим также, что в последнем случае возбуждение четных гармоник накачки (и сигнала) невозможно, однако здесь возникают нечетные гармоники, причем на весьма сложных модах; например, третья гармоника накачки на моде ψ_{00} синхронна с основной волной, но ее значение составляет лишь 0,02 от накачки на расстоянии 1 м.

Влияние колебаний свободной поверхности на эффект параметрического усиления. Самостоятельный интерес представляют эффекты, связанные с возбуждением поверхностных волн под влиянием накачки в волноводе со свободными границами. Последнее ведет к малым изменениям размеров волновода, которые дают вклад в параметрическое усиление, причем этот вклад сравним, вообще говоря, с влиянием внутренней нелинейности в жидкости.

Ограничимся здесь случаем канала с одной свободной границей. В зависимости от частоты накачки на верхней границе могут возбуждаться различные типы поверхностных волн. Будем здесь рассматривать возбуждение высокочастотных (капиллярных) волн. В линейном приближении определение амплитуды капиллярной волны сводится к решению уравнения [9]

$$c_0^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

при неоднородном граничном условии для нормальной компоненты скорости

$$v_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (25a)$$

$$-\frac{\partial^2 v_{zH}}{\partial t^2} - g \frac{\partial v_{zH}}{\partial z} + a \Delta_{xy} \frac{\partial v_{zH}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 v_{zH}}{\partial t^2} \Big|_{z=\delta} \quad (25b)$$

Здесь g - ускорение силы тяжести, a - капиллярная постоянная, v_{zH} - заданное значение z -компоненты скорости частиц среды в соответствующей моде накачки при $z = \delta$, v_{zK} - связано с колебаниями поверхности.

Будем искать решение (24) в виде $\psi_K = \psi_{K0}(z) \exp(i\omega_K t - i k_{yH} x) \cos z_{yH} y$. Тогда из (24) и (25b) получим $\psi_{K0} = \psi_0 \operatorname{ch} k_z z$, где k_z - определяется из дисперсионного соотношения

$$k_z^2 - (k_H^2 + z_{yH}^2) / c_0^2 = g k_z - \omega_H^2 \quad (26)$$

Константа ψ_0 находится теперь из (25) при известном значении v_H . В результате для смещения поверхности ξ получим

$$\xi_H = \frac{-\omega_H^2 v_{zH} i [g - a(z_{yH}^2 - k_H^2)]^{-1}}{\operatorname{ch} k_z \delta [g k_z^2 - a k_z^2 (z_{yH}^2 - k_H^2) - \omega_H^2 k_z \operatorname{th} k_z \delta]} \quad (27)$$

где

$$z_{yH} = \frac{J_m}{a}; \quad v_H = i \left(M \frac{\rho_H}{\rho_H} k_{zH} \right) c_0; \quad k_{zH} = \frac{\pi(2n+1)}{2\delta}$$

так что вынужденные колебания свободной поверхности можно записать в виде

$$\xi = \xi_n \exp i\omega_n t - ik_n x \cos \alpha_{yn} y, \quad (28)$$

где ξ_n определится из (27). В общем случае сюда следует добавить собственное решение уравнения (24) однако последнее не дает вклада в параметрическое усиление из-за отсутствия синхронизма.

Рассмотрим теперь влияние колебаний верхней границы волновода на параметрическое усиление сигнала. Для этого достаточно решить линейное волновое уравнение

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (29)$$

при граничном условии $p' = 0$ на движущейся поверхности $\xi = \xi(x, y, t)$, где ξ задается формулой (28).

Решение (29) для фиксированных x и t будем снова отыскивать в виде сумм нормальных мод волновода

$$p(x, t) = A_j(x, t) \exp(i\omega_j t - ik_j x) \cos \frac{\pi m}{a} y \cos \frac{\pi n}{2b} z + k. c. + p'_{m'n'} \cdot (2n+1)z + k. c. + p'_{m'n'} \quad (30)$$

где $\beta(x, t) = \beta_0 + \xi_n \cos(\omega_n t - k_n x)$, β_0 — глубина канала, а $p'_{m'n'}$ — сумма остальных мод, вклад которых остается малым при условии $\xi_n \ll \beta_0$.

Подставляя (30) в (29) и воспользовавшись ортогональностью собственных мод волновода, получим уравнение для комплексной амплитуды $A_1(x, t)$ (справедливое при $\xi_N \ll \theta_0$)

$$2i\kappa_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\xi_N}{\theta_0} (A_1^* A_N) \kappa_{ZN}^2. \quad (31)$$

Сравнение (31) и (8) показывает, что поверхностные колебания границы приводят к экспоненциальному усилению сигнала с инкрементом

$$\Delta q = \frac{\kappa_{ZN}^2 \xi_N}{4\theta_0 \kappa_1} \sin(\theta_N - 2\theta_1) \quad (32)$$

Из (32) следует, что оптимальная фаза $\theta_N - 2\theta_1$, равна $\pi/2$ (ср. 12), что приводит, вообще говоря, к усилению с суммарным инкрементом $q + \Delta q$.

Следует учитывать, что на частотах порядка 10^5 гц и выше, фактическая амплитуда капиллярных волн должна быть существенно меньше, чем в (27), из-за их затухания. Соответствующий анализ с учетом вязкости не представляет каких-либо принципиальных усложнений по сравнению с приведенным выше, но приводит к довольно громоздким выражениям. Поэтому ограничимся здесь лишь одной оценкой. Для рассмотренного выше случая усиления на модах ψ_{10} и ψ_{01} (см. 22) при $f_0 \approx 1,6 \cdot 10^5$ кгц и $J_N = 5$ вт/см² расчет дает $\xi_N = 7 \cdot 10^{-5}$ см и $\Delta q \approx 8 \cdot 10^{-3}$ м⁻¹, т.е. в данном случае влияние поверхности на усиление можно пренебречь; Без учета затухания $\Delta q = 0,1 \text{ м}^{-1}$

следует отметить, что эта оценка относится к достаточно высоким частотам; при более низких частотах вклад поверхностных волн в усиление может быть сравнимым с Q .

Что касается влияния потерь на внутреннее параметрическое усиление, то здесь основную роль играют потери в стенках волновода, но и они приводят лишь к весьма малым изменениям инкремента нарастания. Для жесткого волновода, например, при тех же параметрах что и выше, декремент затухания γ равен $0,03 \text{ м}^{-1}$.

Проведенное рассмотрение позволяет, по-видимому, сделать вывод о перспективности применения волноводных систем с жидкостью в качестве параметрических усилителей в диапазоне порядка 1 мГц и ниже. Разумеется, что сделанные выше оценки не соответствуют максимально возможным величинам. Использование жидкостей с более сильно выраженными нелинейными свойствами позволяет в несколько раз увеличить коэффициент усиления. Нетрудно получить соответствующие формулы и для невырожденного параметрического усиления, которое тоже может быть реализовано в волноводе подбором соответствующей структуры мод.

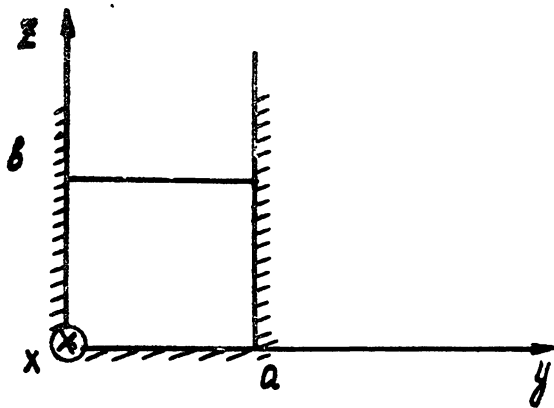


Рис. 1

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л.К.Зарембо, В.А.Красильников, Введение в нелинейную акустику. М., Наука, 1966.
2. В.А.Зверев, А.И.Калачев, Н.С.Степанов, К вопросу об использовании нелинейных эффектов в гидроакустике, Акуст. ж., 1967, 13, 3, 380-383.
3. А.В.Гапонов, Л.А.Островский, Н.И.Рабинович, Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1970, 13,2, 164-207.
4. З.Ф.Красильник, О некоторых волновых взаимодействиях в резонаторах, заполненных активной средой, дипломная работа, ГТУ, 1970г.
5. С.А.Ахманов, Р.В.Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР. М., 1966.
6. Е.А.Заболотская, С.И.Солуян, Р.В.Хохлов, Параметрический усилитель ультразвука, Акуст. ж., 1966, 12, 2, 185-188.
7. С.А.Ахманов, Ю.В.Григорьев, В.Г.Дмитриев, В.В.Радеев, Р.В.Хохлов, К теории параметрического генератора света, Нелинейная оптика, Труды П Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Наука, Новосибирск, 1968, 360-364.

8. Berklay H.O. A study of the Groveling-Wave parametric amplification mechanism in non-linear acoustics. J.Sound and Vibration,5,155-162 (1967).
9. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1954.
10. J.B.Keller and H.Millmon. Finite-Amplitude Sound-Wave Propagation in a Waveguide. J.Acoust.Soc.of Amer., 49, 329-333, 1971.