Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

НИРФИ

Препринт № 9

Е.Н.Пелиновский, М.И.Рабинович

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

г.Горький,
1971 г.

А н н о т а ц и я

В данной работе предлагается метод исследования многоволновых процессов в слабонелинейных распределенных системах с медленно меняющимися параметрами. Данный подход является развитием асимптотического метода, предложенного в [1] . Получены уравнения первого и второго приближений как для систем, описывающихся уравнениями первого порядка, так и уравнениями лагранжевого типа. В последнем случае обсуждается связь рассматриваемого подхода с "усредненным вариационным принципом" [2] .

В литературе [3,4] уже рассматривались с помощью тех или иных приближенных методов отдельные задачи, связанные с исследованием процессов распространения волн в слабонелинейных средах с медленно меняющимися параметрами. Во всех работах, однако, соответствующие приближенные уравнения для амплитуд и фаз волн выводились лишь в первом приближении и только для одной волны, причем, как правило, вывод их зависел от конкретных особенностей решаемой физической задачи.

В данной работе предлагается асимптотический метод исследования многоволновых взаимодействий в одномерных слабонелинейных диспергирующих системах с медленно меняющимися параметрами. Излагаемый здесь подход, являющийся обобщением метода, данного в [1], аналогичен соответствующей модификации асимптотического метода Боголюбова для сосредоточенных систем [5,6].

1. Системы, описываемые уравнениями первого порядка

В большинстве практически интересных случаев уравнения, описывающие поля в слабонелинейной среде (или движение непрерывной среды) с медленно меняющимися параметрами, можно представить в виде

$$A(\tau,\varkappa)\frac{\partial u}{\partial t}+B(\tau,\varkappa)\frac{\partial u}{\partial x}+C(\tau,\varkappa)u=\mu f^{(1)}+\ldots$$
$$\ldots+\mu^m f^{(m)}(\tau,\varkappa,\beta_1,\ldots,\beta_r,u,\partial u/\partial t,\partial u/\partial x)+\ldots, \tag{1}$$
$$\tau=\mu t\,,\quad \varkappa=\mu x\,,\quad \mu \ll 1\,,$$

где A – матрица столбец, а B и C – квадратные матрицы, $u=(u_1,\ldots u_n)$ и $f=(f_1,\ldots,f_n)$ n-мерные вектор функции, причем f – полиномы по u, $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$ и периодические с периодом 2π функции переменных $\beta_1,\ldots,\beta_r$, являющихся фазами внешних полей, мгновенные частоты и волновые числа которых определяются как

$$\nu_j(\tau,\varkappa)=\partial\beta_j/\partial t\,,\qquad \gamma_j(\tau,\varkappa)=-\partial\beta_j/\partial x\,. \tag{2}$$

При $\mu=0$ и постоянных параметрах τ и $\varkappa$ система (1) имеет решения в виде бегущих волн

$$u=\psi^s e^{i(\omega t-k_s x)}+\text{к.с.}\,, \tag{3}$$

где ω и k связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega,k_s)=\mathrm{Det}\,\|A\omega-Bk_s-iC\|=0 \tag{4}$$

(s – индекс нормальной волны – ветви дисперсионного уравнения), а ψ^s – правые собственные векторы матрицы $\| A\omega - Bk_s - iC \|$, определяемые из уравнений

$$(A\omega - Bk_s - iC)\phi^s = 0. \qquad (5)$$

При $\mu \neq 0$ многоволновое решение – результат взаимодействия квазигармонических волн с переменными частотой и волновым числом будем искать в виде

$$u = \sum_{s=1}^{a} \psi^s(\tau, \chi)\, a_s(\tau, \chi)\, e^{i\theta_s} + \text{к.с.} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n w^{(n)}(\tau, \chi, \theta_1, \ldots, \theta_q, \beta_1, \ldots, \beta_r), \qquad (6)$$

где $w^{(n)}$ – периодические вектор-функции переменных θ_s и β_j. Выбор решения $u^{(0)}$ (где $u^{(0)} = u(x, t)$ при $\mu = 0$) определяется начальными и граничными условиями, которые естественно ставить сразу для приближенных уравнений, а также видом правой части (1). В частности в (6) должны быть учтены все возникающие из-за нелинейности и внешних полей волны, которые находятся в синхронизме (резонансе) с нормальными волнами линейной системы (условия резонанса приведены ниже). Уравнения для вновь введенных неизвестных функций a_s и θ_s будем искать в следующей форме

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} = \mu F_1^s\left\{\tau, \chi, a_s, \frac{\partial \theta_s}{\partial x}\right\} + \mu^2 F_2^s\{\ldots\} + \ldots, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \Phi_0^s\{\tau, \chi, \partial\theta_s/\partial x\} + \mu \Phi_1^s\{\ldots\} + \ldots;$$

здесь F и Φ – неизвестные дифференциальные операторы по τ и ψ в частных производных. Решение (6) можно определить с любой наперед заданной степенью точности, если найти неизвестные периодические функции $w^{(n)}(\theta_s, \beta_j)$ и раскрыть вид операторов F_i и Φ_i. Заметим, кстати, что возможен несколько иной подход к построению асимптотического решения (6) системы (1), основанной на разложении в ряд по малому параметру самих амплитуд и фаз a_s и θ_s (аналогичный подход используется в методе геометрической оптики [7,8]), а не их производных, как в данном случае. При таком подходе число переменных, а следовательно, и число получаемых уравнений (даже для одноволнового процесса) непрерывно возрастает с ростом номера приближения. В то же время в рассматриваемом методе число переменных – уравнений определяется лишь числом взаимодействующих волн, а возрастает только порядок этих уравнений. Поскольку анализ одного нелинейного уравнения определенного порядка зачастую проще, чем соответствующего числа нелинейных уравнений первого порядка$^{+)}$, данный подход оказывается предпочтительнее.

Уравнения для $w^{(n)}$ найдем из (1), подствив туда (6),(7) и требуя равенства нулю коэффициентов при μ^n :

$^{+)}$ Из одного нелинейного уравнения всегда можно построить систему уравнений первого порядка, обратное же из-за нелинейности, возможно лишь в редких случаях [9].

$$\left(A\Phi_0^s + B\frac{\partial\theta_s}{\partial x} - iC\right)\psi^s = 0 , \tag{8}$$

$$A\left[\sum_{s=1}^{q}\Phi_0^s\frac{\partial w^{(n)}}{\partial\theta_s} + \sum_{i=1}^{r}\nu_i\frac{\partial w^{(n)}}{\partial\beta_i}\right] + B\left[\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial\theta_s}{\partial x}\frac{\partial w^{(n)}}{\partial\theta_s} + \sum_{i=1}^{r}\gamma_i\frac{\partial w^{(n)}}{\partial\beta_i}\right] + Cw^{(n)} = h^{(n)}(\tau, x, \theta, \beta) , \tag{9}$$

$$h^{(1)} = f^{(1)} - \sum_{s=1}^{q} e^{i\theta_s}\left\{\left(AF_1^s + B\frac{\partial a_s}{\partial x} + ia_s A\Phi_1^s\right)\psi^s + a_s\left(A\frac{\partial\psi^s}{\partial\tau} + B\frac{\partial\psi^s}{\partial x}\right)\right\} , \tag{10}$$

$$h^{(n)} = f^{(n)} + \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial u}\cdot w^{(1)} + \dots - \sum_{s=1}^{q} e^{i\theta_s} A\psi^s\left(F_n^s + ia_s\Phi_n^s\right) - A\frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial\tau} - B\frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial x} \quad (n \geq 2) \tag{11}$$

Поскольку коэффициенты $\psi^s(\tau, x)$ в (6) предполагаются не равными нулю, функционал Φ_0^s, согласно (8), должен определяться из дисперсионного уравнения

$$D\left(\Phi_0^s, \frac{\partial\theta_s}{\partial x}\right) = \mathrm{Det}\left\| A\Phi_0^s + B\frac{\partial\theta_s}{\partial x} - iC\right\| = 0. \tag{12}$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial x} = -k_s(\tau, \chi) \ , \quad \Phi_0^s = \omega_s(\tau, \chi) \, . \tag{13}$$

Заметим, что введенный таким образом параметр ω_s совпадает с мгновенной частотой волны $\partial\theta_s/\partial t$ лишь в первом приближении.

Имея в виду, что правые части уравнений (9) являются периодическими функциями θ_s и β_j, представим $h^{(n)}$ в виде ряда (ниже все быстроменяющиеся переменные, в том числе и β_i, будем обозначать как $\theta_{s,m}$)

$$h = \sum_{s=1}^{q} H^s(\tau,\chi)e^{i\theta_s} + \sum_{m=q+1}^{p} H^m(\tau,\chi)e^{i\theta_m} + \text{к.с.} \tag{14}$$

В первую группу членов здесь выделены слагаемые, соответствующие собственным волнам системы, – для них

$$D(\omega_s, k_s) = 0, \tag{15}$$

а во вторую – возникающие за счет нелинейности и внешних полей комбинационные волны, которые находятся вне синхронизма с первыми, для них

$$D\left(\frac{\partial\theta_m}{\partial t}, \frac{\partial\theta_m}{\partial x}\right) \neq 0 \ . \tag{16}$$

Для того, чтобы комбинационная волна была резонансна, т.е. удовлетворяла (15), очевидно необходимо выполнение условий синхронизма+)

$$\sum_{i=1}^{\ell} n_i \theta_i = \theta_j + \theta_j^0 (\chi, \tau), \qquad (17)$$

где n_i – целые числа, а $\theta_{i,j}$ удовлетворяют дисперсионному уравнению (12) (или (15)).

Вектор функции H^d определяется соотношениями ($d \lessgtr_s^m$)

$$H^d = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} h\, e^{-i\theta_d} \cdot d\theta_1, \ldots, d\theta_p . \qquad (18)$$

Периодические по θ функции $w^{(n)}$ также представим в виде ряда

$$w = \sum_{s=1}^{q} W^s e^{i\theta_s} + \sum_{m=q+1}^{p} W^m e^{i\theta_m} + \text{к.с.} \qquad (19)$$

После подстановки (14), (19) в (9) получим, приравнивая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, систему алгебраических уравнений для определения $W^{(n)}$. Амплитуды $W^{(1)m}$, согласно (16), ограничены и равны $W_k^{(1)m} = -i \sum_{j=1}^{n} D_{jk} H_j^{(1)m} / D\left(\frac{\partial\theta_m}{\partial t}, \frac{\partial\theta_m}{\partial x}\right)$ (D_{jk} – минор D). Ограниченные же решения для

+) При $\tau, \chi = const$ из этого условия приравниванием коэффициентов при t и x получаются обычные условия синхронизма $\sum_{i=1}^{\ell} n_i \omega_i = \omega_j$, $\sum_{i=1}^{\ell} n_i k_i = k_j$

$W^{(1)s}$, ввиду (15), могут существовать, как известно, лишь при выполнении условий ортогональности

$$(\zeta^{*s}, H^{(1)s}) = 0 \qquad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^s H_k^{(1)s} = 0 \;; \qquad (20)$$

где ζ^{*s} – правый собственный вектор, сопряженной с (8) алгебраической системы. Из этих условий, учитывая (10), (18), найдем выражения для искомых функционалов F_1^s и Φ_1^s

$$F_1^s = -\frac{d\omega_s}{dk_s}\,\frac{\partial a_s}{\partial \chi} + \mathrm{Re}\, f_s^{(1)} - a_s G_s^{(1)}, \qquad (21)$$

$$\Phi_1^s = \frac{1}{a_s}\,\mathrm{Jm}\, f_s^{(1)},$$

где

$$f_s^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} D_{k\ell}^s \langle f_k^{(1)} e^{-i\theta_s} \rangle / D'_{\omega_s} \psi_\ell^s,$$

а

$$G_s^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} D_{k\ell}^s \Big(A_k \frac{\partial \psi_k^s}{\partial \tau} + \sum_{m=1}^{n} B_{km} \frac{\partial \psi_m^s}{\partial \chi} \Big) / D'_{\omega_s} \psi_\ell^s,$$

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \varphi \, d\theta_1, \dots, d\theta_p .$$

При выводе этих соотношений учтено, что

$$(\zeta^{*s}, B\psi^s)/(\zeta^{*}_s, A\psi^s) = \frac{d\omega_s}{dk_s} = v_s(k_s, \tau, \chi), \qquad (22)$$

а
$$\frac{\zeta_k^s}{(\zeta^{*s}, A\psi^s)} = \frac{D_{k\ell}^s}{D_\omega^1 \psi_\ell^s} \qquad (23)$$

(доказательство этих равенств приведено в Приложении)

Таким образом урав..ения первого приближения имеют вид

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} + v_s(\tau,\varkappa)\frac{\partial a_s}{\partial x} = \mu \operatorname{Re} f_s^{(1)} - \mu a_s \sigma_s^{(1)},$$
$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \omega_s(\tau,\varkappa,\partial\theta_s/\partial x) = \frac{\mu}{a_s}\operatorname{Jm} f_s^{(1)}. \qquad (24)$$

Из этих уравнений непосредственно следуют уравнения первого приближения для систем с постоянными параметрами [1]. Действительно, в последнем случае $\theta_s = \omega_s^0 t - k_s^0 x + \varphi_s(\tau,\varkappa)$, то есть $\frac{\partial\theta_s}{\partial t} = \omega_s^0 + \mu\frac{\partial\varphi_s}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\theta_s}{\partial x} = -k_s^0 + \mu\frac{\partial\varphi_s}{\partial\varkappa}$, учитывая, что второе слагаемое мало, разложим функцию $\omega_s(\partial\theta_s/\partial x)$ в ряд – $-\omega_s \simeq \omega_s^0 - \mu v_s \frac{\partial\varphi_s}{\partial\varkappa}$. Подставив эти выражения в систему (24), получим для первого уравнения $\sigma \simeq 0(\sim\mu^2)$, а для второго

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial t} + v_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial x} = \frac{\mu}{a_s}\operatorname{Jm} f_s^{(1)}. \qquad (24a)$$

Для построения уравнений второго приближения необходимо определить $W^{(1)s}$ из системы

$$(A\omega_s - Bk_s - iC)W^{(1)s} = -iH^{(1)s}, \tag{25}$$

где $H^{(1)s}$ представим в виде (см. (10),(14),(24))

$$H^{(1)s} = \overline{H}^{(1)s} + (Av_s - B)\psi^s \frac{\partial a_s}{\partial x},$$

сравнивая затем (25) и (П.1) и избавляясь от неопределенности, нетрудно найти

$$W_\ell^{(1)s} = i\left(\frac{\partial \psi_\ell^s}{\partial k_s} + v_s \frac{\partial \psi_\ell^s}{\partial \omega_s}\right)\frac{\partial a_s}{\partial x} - \tag{26}$$

$$-i\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \omega}\left(D_{k\ell}\overline{H}_k^{(1)s}\right)}{D'_\omega(\omega_s k_s)}.$$

Далее воспользуемся условием ограниченности $W^{(2)s}$ (см. (20)) и определим F_2^s и Φ_2^s

$$F_2^s = \operatorname{Re} f_s^2$$

$$\Phi_2^s = -\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_s}{dk_s^2}\frac{\partial^2 a_s}{\partial x^2} + \frac{1}{a_s}\operatorname{Jm} f_s^{(2)} - \frac{1}{a_s}\frac{\partial a_s}{\partial x}G_s^{(2)}, \tag{27}$$

где

$$G_s^{(2)} = \frac{1}{D'_\omega}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{D_{km}^s}{\psi_m^s}\left(A_k\delta_{k\ell}\frac{\partial}{\partial \tau} + B_{k\ell}\frac{\partial}{\partial x}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial \psi_\ell^s}{\partial k_s} + v_s\frac{\partial \psi_\ell^s}{\partial \omega_s}\right), \tag{28}$$

$$\text{а}\quad f_s^{(2)}=\frac{1}{D_\omega^1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{D_{km}^s}{\psi_m^s}\Big(\Big\langle e^{-i\theta_s}\Big\{f_k^{(2)}\delta_{k\ell}+\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_\ell}w_\ell^{(1)}+$$

$$+\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial(\partial u_\ell/\partial t)}\Big[\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial}{\partial\tau}\big(\psi_\ell^s a_s e^{i\theta_s}\big)+\sum_{i=1}^{q}\omega_i\frac{\partial w_\ell^{(1)}}{\partial\theta_i}\Big]+$$

$$+\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial(\partial u_\ell/\partial x)}\Big[\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial}{\partial\chi}\big(\psi_\ell^s a_s e^{i\theta_s}\big)-\sum_{i=1}^{q}k_i\frac{\partial w_\ell^{(1)}}{\partial\theta_i}\Big]\Big\}\Big\rangle+ \tag{29}$$

$$+i\Big(A_k\delta_{k\ell}\frac{\partial}{\partial\tau}+B_{k\ell}\frac{\partial}{\partial\chi}\Big)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial/\partial\omega\,\big(D_{j\ell}^s\,\bar H_j^{(1)s}\big)}{D_\omega^1}-$$

$$-iA_k\delta_{k\ell}\Big(\frac{\partial\psi_k^s}{\partial k_s}+v_s\frac{\partial\psi_k^s}{\partial\omega_s}\Big)\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,f_s^{(1)}}{\partial\chi}\Big),$$

при получении этих выражений использовалось соотношение (см.Приложение)

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{D_{km}^s}{D_\omega^1\,\psi_m^s}\big(B-Av_s\big)_{k\ell}\Big(\frac{\partial\psi_\ell^s}{\partial k_s}+v_s\frac{\partial\psi_\ell^s}{\partial\omega_s}\Big)= \tag{30}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_s}{dk_s^2}.$$

Окончательно уравнения второго приближения записываются в виде

$$\frac{\partial a_s}{\partial t}+v_s(\tau,\chi)\frac{\partial a_s}{\partial x}=\mu\,\mathrm{Re}\,f_s^{(1)}-\mu a_s G_s^{(1)}+\mu^2\,\mathrm{Re}\,f_s^{(2)},$$

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}-\omega_s=\frac{\mu}{a_s}\mathrm{Im}\,f_s^{(1)}-\frac{1}{2a_s}\frac{d^2\omega_s}{dk_s^2}\frac{\partial^2 a_s}{\partial x^2}- \tag{31}$$

$$-\frac{\mu}{a_s}\frac{\partial a_s}{\partial x}G_s^{(2)}+\frac{\mu^2}{a_s}\mathrm{Im}\,f_s^{(2)}.$$

Аналогично строятся уравнения и более высоких приближений. Для сред с постоянными параметрами уравнения (31) переходят в уже известные [1] (при их выводе следует повторить процедуру, использовавшуюся при получении (24a)).

II. Системы второго порядка. Обобщенный вариационный принцип.

В тех случаях, когда исследуемая распределенная система описывается уравнениями второго порядка Лагранжевого типа, полученные выше результаты удается связать с так называемым "усредненным вариационным принципом" [2,10,11]. Найденная связь доказывает этот, вообще говоря, эвристический принцип и, кроме того, позволяет с его помощью сравнительно просто получить уравнения высших приближений.

Рассмотрим волновое поле, описываемое Лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}\Big[A(\tau,\chi)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}+B(\tau,\chi)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+ \qquad (32)$$
$$+C(\tau,\chi)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+E(\tau,\chi)uu\Big]+\mu L^{(1)}+\mu^2 L^{(2)}+\cdots$$

(поскольку Лагранжиан удовлетворяет условию симметрии относительно перестановки индексов, здесь матрицы A, C, E - симметричные; для упрощения записи будем считать также симметричной и матрицу B). Имея в виду, что неконсервативные и нелинейные силы малы, исходные уравнения для поля можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial t)}+\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial L}{\partial(\partial u/\partial x)}-\frac{\partial L}{\partial u}=\mu f^{(1)}+\dots \quad (33)$$

где f удовлетворяют стандартным условиям (см. (1), (2)).

Отыскивая решение системы (33) в виде рядов (6), (7), и повторяя операции, проделанные в первой части работы, нетрудно получить уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_s}{\partial t}+v_s(\tau,\chi)\frac{\partial a_s}{\partial x}=\mu\, \mathrm{Im}\, f_s^{(1)}+\mu a_s G_s^{(1)}\,, \\ &\frac{\partial \theta_s}{\partial t}-\omega_s(\tau,\chi,\partial\theta_s/\partial x)=\frac{\mu}{a_s}\,\mathrm{Re}\, f_s^{(1)}\,, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} &f_s^{(1)}=\left(\psi^s,-f^{(1)}e^{-i\theta_s}>\right)/D'_{\omega_s}\,; \\ &G_s^{(1)}=\frac{1}{D'_{\omega_s}}\left(\psi^s,\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}(\omega_s A\psi^s)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}(k_s B\psi^s)+\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\chi}(\omega_s B\psi^s)-\frac{\partial}{\partial\chi}(k_s C\psi^s)\right\}\right)\,, \end{aligned} \quad (35)$$

а волновое число $k_s=-\partial\theta_s/\partial x$ и $\omega_s=\Phi_0^s$ связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega_s,k_s)=\mathrm{Det}\,\|\alpha\|=0\,;\ (\alpha=-A\omega_s^2+B\omega_s k_s-Ck_s^2-E)\,, \quad (36)$$

а ψ^s – компоненты собственного вектора матрицы $\|\alpha\|$ (ввиду симметрии этой матрицы, ее правые и левые собственные вектора совпадают)[+].

Уравнения первого приближения (34) нетрудно интерпретировать в терминах усредненного Лагранжиана и усредненной виртуальной работы. Вводя усредненный Лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(1)}=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} L[U,dU/\partial t,\partial U/\partial x]\,d\theta_1,\dots,d\theta_p= \tag{37}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{q}(\psi^s,\alpha\psi^s)\,a_s^2+\mu\mathcal{L}_{NL}^{(1)}\ ;\ U=\sum_{s=1}^{q}\psi^s a_s e^{i\theta_s}+\text{к.с.}$$

и среднюю виртуальную работу

$$\overline{\delta Q^{(1)}}=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\delta Q\,[U,\partial U/\partial t,\partial U/\partial x]\,d\theta_1,\dots,d\theta_p, \tag{38}$$

непосредственным дифференцированием можно убедиться, что уравнения (34) имеют вид уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}^{(1)}}{\partial\,\partial\theta_s/\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}^{(1)}}{\partial\,\partial\theta_s/\partial x}-\frac{\partial\mathcal{L}^{(1)}}{\partial\theta_s}=\frac{\overline{\delta Q}^{(1)}}{\delta\theta_s}, \tag{a}$$

(39)

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{(1)}}{\partial a_s}=-\frac{\overline{\delta Q}^{(1)}}{\delta a_s}, \tag{б}$$

[+] Заметим, что если $\|B\|$ несимметричная матрица, то в матрицу $\|\alpha\|$ вместо элемента $b_{k\ell}$ войдет элемент $\frac{1}{2}(b_{k\ell}+b_{\ell k})$ и симметрия $\|\alpha\|$ не нарушится.

где через $\overline{\delta Q}/\delta\theta$ и $\overline{\delta Q}/\delta a$ обозначены коэффициенты при вариациях $\delta\theta$ и δa соответственно в выражении для

$$\overline{\delta Q}=\sum_{s=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}\left[<f_k\frac{\partial U_k}{\partial\theta_s}>\delta\theta_s+<f_k\frac{\partial U_k}{\partial a_s}>\delta a_s\right].$$

Из возможности записи уравнений первого приближения в виде (39) непосредственно следует, что

$$\int(\delta\mathcal{L}+\overline{\delta Q})\,dt\,dx=0\,, \tag{40}$$

а это – по существу формулировка обобщенного вариационного принципа Гамильтона в усредненной форме [10–12], который таким образом можно считать доказанным.

Итак, для составления уравнений первого приближения достаточно усреднить Лагранжиан и виртуальную работу по фазам взаимодействующих волн и записать уравнения Лагранжа второго рода для новых переменных a_s и θ_s. Такой подход для рассмотрения процессов в консервативных системах был предложен в [10–13].

Уравнения высших приближений также могут быть представлены в Лагранжевой форме, в частности, уравнения второго приближения по виду совпадают с (39) однако при усреднении L и δQ в них следует подставлять решение уже не нулевого, а первого приближения $U=\sum_{s=1}^{q}\psi^s a_s e^{i\theta_s}+\text{к.с.}+\mu w^{(1)}$. Аналогично уравнения n-го приближения записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial\theta_s/\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial\theta_s/\partial x}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_s}-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^2\theta_s/\partial t^2}+\ldots=\frac{\overline{\delta Q}}{\delta\theta_s}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\delta Q}}{\delta \partial\theta_s/\partial t}+\ldots,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_s}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial a_s/\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial a_s/\partial x}+\ldots= \tag{41}$$

$$=-\frac{\overline{\delta Q}}{\delta a_s}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\delta Q}}{\delta \partial a_s/\partial t}+\ldots,$$

где в L и $\delta\cdot Q$ при усреднении подставляется $n-1$ приближение – $U=\sum_{s=1}^{q}\psi^s a_s e^{i\theta_s}+\text{к.с.}+\sum_{i=1}^{n-1}\mu^i w^{(i)}$ (аналогично см [14]).

В заключение отметим, что используемые в работе ряды (6), (7) рассматриваются как формальные и обоснование данного подхода представляет самостоятельную задачу.[15]

Авторы признательны А.В.Гапонову за постоянный интерес к работе и обсуждение результатов.

П р и л о ж е н и е

Покажем справедливость соотношений (22), (23) и (30). Продифференцируем уравнения (8) по k_s, учитывая связь (12):

$$\left(A\omega_s - Bk_s - iC\right)\left(\frac{\partial}{\partial k_s} + \frac{d\omega_s}{dk_s}\frac{\partial}{\partial \omega_s}\right)\psi^s = -\left(B - A\frac{d\omega_s}{dk_s}\right)\psi^s . \qquad (П.1)$$

Чтобы существовало нетривиальное решение для $\frac{\partial \psi^s}{\partial k_s} + \frac{d\omega_s}{dk_s}\frac{\partial \psi^s}{\partial \omega_s}$ необходимо выполнение условий ортогональности (см. (20))

$$\left(\zeta^{*s}, B\psi^s\right) = \frac{d\omega_s}{dk_s}\left(\zeta^{*s}, A\psi^s\right), \qquad (П.2)$$

откуда непосредственно следует соотношение (22).

Для доказательства (30) еще раз продифференцируем по k_s уравнения (П.1). Требуя затем существования нетривиального решения для $\left(\frac{\partial}{\partial k} + \frac{d\omega}{dk}\frac{\partial}{\partial \omega}\right)^2 \psi$ аналогично предыдущему получим (30).

Справедливость (23) следует из соотношений (ср. [5])

$$D_{k\ell} = \gamma \zeta_k \psi_\ell \qquad (П.3)$$

и

$$D'_\omega = \gamma\left(\zeta^*, A\psi\right) \qquad (П.4)$$

для доказательства которых воспользуемся определением миноров

$$D\delta_{ik}=\sum_{l=1}^{n}(A\omega-Bk-iC)_{il}D_{kl} \qquad \text{(a)}$$

(П.5)

$$D\delta_{il}=\sum_{k=1}^{n}(A\omega-Bk-iC)_{ki}D_{kl} . \qquad \text{(б)}$$

При любом фиксированном $i \neq k$ величины D_{kl} удовлетворяют (8) и следовательно пропорциональны ψ_l. С другой стороны, при фиксированном $i \neq l$ D_{kl} пропорциональны ζ_k – решению транспонированной (по отношению к (8)) системе, т.е. $D_{kl} \sim \zeta_k \psi_l$.

Дифференцируя (П.5а) по ω и требуя существование нетривиального решения для $\partial D_{kl}/\partial\omega$ убеждаемся в справедливости (П.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. М.И.Рабинович. Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем. Докл. АН СССР, 1970, 191, № 6, 1253-1256.

2. Нелинейная теория распространения волн. Под ред. Г.И.Баренблатта. М., Мир, 1970.

3. Ф.Г.Басс. Применение метода ВКБ к нелинейному волновому уравнению и распространение сильных электромагнитных волн в ионосфере. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1970, 13, № 6, 864-872.

4. Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский. Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1970. 6, № 9, 934-939.

5. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.

6. Ю.А.Митропольский. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., Наука, 1964.

7. С.М.Рытов. Модулированные колебания и волны. Тр. ФИАН СССР, 1940, 2, 41-114.

8. Ю.А.Кравцов. О двух новых асимптотических методах в теории распространения волн в неоднородных средах. Акуст. ж., 1968, 14, № 1, 1-24.

9. Р.Курант. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964.

10. G.B.Whitham. A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian. J.Fluid.Mech., 1965, 22, p.2, 273-283.

11. V.J.Emery. Eikonal approximation for nonlinear equations. J.Math.Phys., 1970, 11, N 6, 1893.

12. Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский. Метод усреднения и обобщений вариационный принцип для нелинейных волн. Горький, НИРФИ, препринт №2, 1970.

13. W.F.Simmons. A variational method for weak resonant wave interactions. Proc.Soc.Lond. 1969, A309, 551-575.

14. М.И.Рабинович. О методе усреднения в нелинейной оптике. В сб. "Нелинейные процессы в оптике" (Тр. 1 Вавиловской конференции по нелинейной оптике). Новосибирск, Наука, Сиб. отд., 1970, 31-40.

15. М.И.Рабинович, А.А.Розенблюм. К обоснованию асимптотических методов в теории колебаний нелинейных распределенных систем ДАН СССР (в печати).