

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 23

Ю.А.РЫЖОВ

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН
В ОДНОМЕРНОЙ
СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

г. Горький
1972

А н н о т а ц и я

Рассматривается задача о распространении волны в одномерной мелкомасштабной случайно-неоднородной среде в приближении марковского случайного процесса. Показано, что коэффициенты диффузии марковского процесса определяют метрику пространства, в котором броуновское движение частицы эквивалентно рассматриваемому процессу. Получено решение диффузионного уравнения, определяющее поведение коэффициента отражения от слоя с неоднородностями. Показано, что коэффициент отражения от слоя с неоднородностями (среднее значение $\xi(\lambda)$ в слое равно ξ_0 окружающей среды) имеет равномерное распределение по фазе, что приводит к отсутствию регулярной компоненты отраженного поля. Получены выражения для интенсивности проходящей и отраженной волн. Достаточно толстый слой полностью отражает волну в виде хаотического рассеянного поля. Сформулированы условия, при которых полученные результаты являются строгими.

Показано, что модели среды в виде непрерывного процесса $\Delta\xi(x)$ и дискретных слоев со случайной диэлектрической проницаемостью в диффузионном приближении приводят к одинаковым результатам.

1. В в е д е н и е

Интерес к одномерной задаче о распространении волн в случайно-неоднородной среде объясняется, прежде всего, заманчивой возможностью получения тем или иным методом строгих решений волнового стохастического уравнения. С другой стороны, одномерный случай распространения волн в хаотически неоднородной среде сам по себе не лишен интереса для ряда практически важных задач о поведении волн в ионосфере, морской воде, длинных линиях передачи, искусственных слоистых средах. Аналогичная проблема рассматривается при изучении поведения электрона в неупорядоченной одномерной решетке [1].

Другой важной стороной вопроса в целом является сравнение точных результатов с результатами приближенной теории и анализ итерационных рядов, возникающих при решении уравнений поля, с помощью строгих решений. На больших расстояниях, проходимых волной, фундаментальную роль играет явление рассеяния "назад", которое лишь с большими ограничениями может быть рассчитано приближенными методами.

За последние годы появилось довольно много работ с анализом одномерного стохастического волнового уравнения. В настоящей статье мы опираемся на результаты работ [2-5] о волноводах со случайными неоднородностями. В этих работах было показано, что задача о поведении коэффициента отражения в волноводе со случайными неоднородностями эквивалентна задаче о броуновском движении частицы на плоскости Лобачевского (модель Пуанкаре).

В настоящей работе получен общий результат такого рода. Показано, что метрика неевклидова пространства, в котором броуновское движение частицы эквивалентно рассматриваемому процессу, определяется коэффициентами диффузии этого процесса.

Обычно рассматриваются две модели одномерной случайно-неоднородной среды. В первой модели среда предполагается состоящей из дискретных плоских слоев со случайными коэффициентами отражения отдельного слоя. Такая модель рассматривалась в [6]. Было показано, что пропускательная способность слоя экспоненциально падает с увеличением толщины рассеивающего слоя.

Модель непрерывной среды изучалась в [4, 7, 9, 10]. В [7] определялся, в частности, коэффициент отражения в приближении метода возмущений (улучшенного учетом затухания среднего поля). Результаты этой работы интересно сравнить с решением, которое мы получим на основе уравнения Эйнштейна-Фоккера-Планка.

В работах [9, 10] изучалось распространение волны в приближении марковского процесса. Электрическое поле волны не образует марковского процесса. Поэтому в этих статьях рассматривалась совокупность поля и его производной.

В настоящей работе проблема анализируется на основе диффузионного уравнения, полученного в [4]. Если справедливы условия применимости диффузионного приближения, то обе модели среды описываются одним и тем же уравнением. Поэтому конкретные результаты близки к результатам, полученным в [6] для дискретных рассеивателей. Существенным отличием является, однако, то обстоятельство, что в схеме расчетов, использованной в [6], пришлось сделать предположения о поведении фазы отраженного поля.

Применяемый в данной работе метод позволяет получить такие результаты строго. В частности, в разделе 4 исследуется распределение коэффициента отражения по фазе.

2. Уравнения Эйнштейна-Фоккера в инвариантной форме

В работах [2,3] была использована идея об эквивалентности статистического поведения коэффициента отражения волновода со случайными неоднородностями с броуновским движением частицы на плоскости Лобачевского. Установление такого рода связи неевклидовой геометрии с марковскими случайными процессами полезно в ряде отношений. Эта эквивалентность естественным образом вытекает из инвариантной записи уравнений Эйнштейна-Фоккера. В обычной форме уравнение имеет вид [11,12] :

$$\sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial A^i \sqrt{g} v}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B^{ik} \sqrt{g} v}{\partial x^i \partial x^k} \quad (1)$$

Уравнение (1) записано в криволинейных координатах n -мерного пространства с известной метрикой и элементом объема

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

Дискриминант метрического тензора \sqrt{g} , вообще говоря, зависит от времени t . Коэффициенты уравнения (1) A^i и B^{ik} могут быть вычислены, если известно уравнение движения точки фазового пространства $(\bar{F}(x^1, x^2, \dots, x^n))$, изображающей поведение системы.

$$A^i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle x^i - \xi^i \rangle}{\tau}, \quad B^{ik} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle (x^i - \xi^i)(x^k - \xi^k) \rangle}{\tau}$$

При переходе к новым координатам величина B^{ik} преобразуется как тензор, в то время как A^i вектором не является [11,12]. Закон преобразов A^i можно записать, используя (2).

Уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (c^i \sqrt{g} v)}{\partial x^i}, \quad (3)$$

$$\Delta v = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \cdot g^{ik} \frac{\partial v}{\partial x^k}),$$

где g^{ik} — тензор, обратный к метрическому тензору g_{ik} , вычисляется по формулам

$$g^{ik} = \frac{1}{2} B^{ik} \quad (4)$$

Величина c^i является вектором и связана с A^i соотношением

$$c^i = A^i - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{2g} g^{ik} \frac{\partial g}{\partial x^k} \quad (5)$$

Поэтому второй член правой части (1) является ковариантной дивергенцией потока $c^i v$ и уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div} [\vec{C}v - \nabla v] = 0 \quad (6)$$

Если вектор $c^i v$ равен нулю в какой-либо системе отсчета, то он равен нулю и в других системах. В этом случае величина A^i выражается через метрический тензор (коэффициенты диффузии). Другими словами, в этом случае B^{ik} и A^i не являются независимыми. В евклидовом пространстве $c^i = A^i$ (то есть A^i будет вектором и иметь инвариантный смысл). Таким образом, динамическое уравнение величины (x^1, x^2, \dots, x^n) определяет геометрию пространства диффузии, а физический смысл вектора c^i связан с регулярным потоком в системе (например, диффузия в поле силы тяжести). Величина же A^i включает в себя также поток диффузионный. Например, если в декартовой системе

процесс имеет $A_x = A_y = A_z = 0$, то при переходе к сферической системе координат можно получить $A_r \neq 0$. При этом в любой системе координат $C^i = 0$.

Уравнение (3) показывает, что любой процесс, описываемый уравнением (1), можно рассматривать как броуновское движение в пространстве с метрическим тензором g_{ik} , определяемым коэффициентами диффузии рассматриваемого процесса.

3. Одномерная задача о распространении волны в случайно-неоднородной среде

Запишем уравнение для электрического поля:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (7)$$

Предполагается, что $\varepsilon(z)$ является стационарным случайным процессом внутри слоя $(0, L)$ со средним значением $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0$, равным диэлектрической проницаемости окружающей среды (рис. 1). Допустим, что на слой с неоднородностями падает справа волна $E_0 = e^{ikz}$, $k = k_0 \sqrt{\varepsilon_0}$. В уравнении (7) перейдем к переменной y по формуле $E = e^{-iy} dz$. Для величины $y = \frac{E'}{E} \sim \frac{H_y}{E_x}$ получим уравнение Риккати

$$y' + y^2 + k_0^2 \varepsilon(z) = 0 \quad (8)$$

Можно было бы рассматривать статистические свойства величины y . С точки зрения результатов предыдущего раздела здесь мы имеем дело с диффузионным процессом на некоторой плоскости Лобачевского (моделью которой является верхняя полуплоскость величины y с определенной метрикой). Однако удобнее рассматривать другую величину R , определяемую соотношением:

$$y = ik \frac{1-R}{1+R} \quad (9)$$

для которой также получаем уравнение Риккати

$$\frac{dR}{dz} = \frac{1}{2ik} [2R(2k^2 + k_0^2 \Delta \epsilon(x)) + k_0^2 \Delta \epsilon(x)(1+R^2)] \quad (10)$$

Величина y при переходе через границы слоя ($x=0$ и $x=L$) непрерывна. Отсюда легко установить, что $R(x=0)=0$, $R(x=L) = -Ae^{-2ikL}$, если выражение для поля отраженной волны записать в виде $E_{\text{отр}} = Ae^{-ikx}$.

Сделаем несколько замечаний об уравнении (10). Это уравнение несколько отличается от соответствующего уравнения в [13]. Отличие связано с другим определением функции $R(x)$. Уравнение (10) справедливо и в том случае, когда на границе $x=0$ введено отражение R_0 , происхождение которого в данном случае не существенно.

Наконец, полезно исключить регулярный ход величины $R(x)$ и перейти к $S(x) = R(x)e^{i2kx}$, статистические свойства которой одинаковы со свойствами $R(x)$, и которую будем называть коэффициентом отражения

$$\frac{dS}{dx} = \frac{k_0 \Delta \epsilon(x)}{2i\sqrt{\epsilon_0}} (S e^{-ikx} + e^{ikx})^2 \quad (11)$$

Для того, чтобы процесс $S(x)$ был марковским диффузионным, необходимо, чтобы масштаб изменения величины $S(x)$ был велик по сравнению с масштабом неоднородностей l . Малость изменения $S(x)$ можно достигнуть, если брать величину флуктуаций $\Delta \epsilon(x)$ достаточно малой.

При вычислении коэффициентов диффузионного уравнения мы считали процесс $\epsilon(x)$ дельта-коррелированным. Кроме того, предполагалось, что интервал усреднения Δx ($\Delta x \ll L$) велик по сравнению с длиной волны ($\lambda = 2\pi/k$), то есть функция $S(x)$ мало меняется на интервале λ .

Условие малости изменения $s(z)$ на расстояниях λ и l можно записать в виде:

$$kl \frac{\langle \Delta \epsilon^2 \rangle}{\epsilon_0^2} \ll 1$$

Наконец, все последующие результаты мы получили лишь для случая мелкомасштабных флуктуаций $\Delta \epsilon(z)$, то есть при $kl \ll 1$. С учетом всех перечисленных ограничений получается следующее уравнение, которое было найдено в [4] для функции распределения $W(\rho, \varphi, \tau)$, где $S = \rho e^{i\varphi}$

$$4 \frac{\partial W(\rho, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (1-\rho^2)^2 W + \left[8 + \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \quad (12)$$

где $\tau = \frac{\kappa_0^2 l^2}{4} \frac{\langle \Delta \epsilon^2 \rangle}{\epsilon_0^2}$, а вероятность ΔP нахождения ρ и φ в интервалах $[\rho, \rho + d\rho]$ и $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ определяется равенством

$$\Delta P = W(\rho, \varphi, \tau) \rho d\rho d\varphi$$

Это уравнение полезно сравнить с уравнением работ [2-3, 5], в которых была использована модель сред дискретными неоднородностями. Было получено следующее уравнение:

$$4 \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (1-\rho^2)^2 W + \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}$$

Это уравнение отличается от (12) коэффициентом при $\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}$. Может показаться, что различие в уравнении связано с разными динамическими уравнениями, упрощающими величиной R . При выводе (14) использовалось соотношение вида:

$$R = e^{i\theta} \frac{R_0 - \Gamma^*}{1 - R_0 \Gamma} . \quad (15)$$

Это соотношение определяет преобразование коэффициента отражения при действии к слою с коэффициентом отражения R_0 элементарного однородного слоя с коэффициентом отражения Γ в свободном пространстве. Отыскивалась метрика единичного круга, заполняемого значениями коэффициента отражения, инвариантная по отношению к преобразованию (15). Однако, этих соображений недостаточно для получения правильного уравнения. Для вывода уравнения необходимо знание динамического уравнения, управляющего изменением R вдоль z (например, при изменении толщины слоя).

Полная цепочка преобразований типа (15), содержащая информацию о реализации $\xi(z)$ в слое, разумеется, эквивалентна динамическому уравнению для $R(z)$. Если преобразование (15) дополнить информацией о функции

$\xi(z)$, то нужное уравнение может быть получено следующим образом. К слою толщины z , входным импедансом Z_0 и коэффициентом отражения R_0 добавим элементарный слой толщины Δz и проницаемостью $\xi(z) = \epsilon_0 + \Delta \epsilon(z)$. Пользуясь соотношениями типа (15) для введенных нами величин Y и R , можно найти изменения Y и R , и поделив на Δz , получить дифференциальные уравнения, совпадающие полностью с уравнениями (9), (10).

С метрикой, использованной в работе [5], связаны соотношения

$$A_i = C_i - B^{12} = 0, \quad B_{11} = B_{22} \quad (16)$$

Следствием равенства нулю A_i и C_i является уравнение

$$\frac{d \langle s \rangle}{d \tau} = 0, \quad (17)$$

которое можно получить непосредственно из уравнения (14). Таким образом, средний коэффициент отражения не зависит от толщины слоя (что является следствием отсутствия потока $C_i(A_i)$ в уравнении (14)) даже при $\langle S_0 \rangle \neq 0$.

Уравнение (11) приводит к метрике

$$B^{11} = \frac{1}{2}(1+p^4) + 5y^2 - x^2, \quad B^{22} = \frac{1}{2}(1+p^4) + 5x^2 - y^2, \quad (18)$$

$$B^{12} = -3xy, \quad p^2 = x^2 + y^2$$

При этом $A_1 = -3x$, $A_2 = -3y$

Уравнение и решение для среднего коэффициента отражения имеют вид

$$\frac{d\langle S \rangle}{d\tau} = -3\langle S \rangle, \quad \langle S \rangle = \langle S_0 \rangle e^{-3\tau} \quad (19)$$

Если $\langle S_0 \rangle = 0$, то $\langle S \rangle \equiv 0$, в этом случае отраженное поле не имеет регулярной составляющей и полностью хаотично. Отличие $\langle S \rangle$ от нуля может быть только из-за отражения на границе слоя. По-видимому, отсюда можно предсказать, что при $\langle S_0 \rangle = 0$ независимо от толщины рассеивающего слоя распределение по фазе для коэффициента отражения будет равномерным в интервале $[0, 2\pi]$. В следующем разделе этот результат мы получим точно.

Таким образом, при большой "густоте" толчков на интервале усреднения $\Delta\tau$ можно сформулировать такие требования к изменению ϵ_n, ℓ_n (ℓ_n - толщина отдельного элементарного слоя) вдоль Z , чтобы не нарушились условия применимости диффузионного приближения (по фазе и модулю S). В этом приближении дискретная и непрерывная модели среды описываются одним и тем же уравнением (12).

4. Функция распределения коэффициента отражения

Решение уравнения (12) мы будем искать, предполагая распределение по фазе периодическим с периодом 2π

$$W(\rho, \varphi, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} W_m(\rho, \tau) \quad (20)$$

Начальное распределение зададим в виде

$$W(\rho, \varphi, \tau_0) = \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (21)$$

Подставляя (20) в (12), получим уравнение для $W_n(\rho, \tau)$

$$4 \frac{\partial W_n}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho^2)^2 W_n - \left[12 + \frac{(1 - \rho^2)^2}{\rho^2} \right] n^2 W_n \quad (22)$$

Уравнение (22) будем решать с помощью преобразования Лапласа

$$W_n(\rho, s) = \int_0^{\infty} W_n(\rho, \tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (23)$$

Для $W_n(\rho, s)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} & (1 - \rho^2)^2 W_n''(\rho, s) + \frac{1 - \rho^2}{\rho} (1 - 9\rho^2) W_n'(\rho, s) + \\ & + W_n \left[8(2\rho^2 - 1) - \frac{(1 - \rho^2)^2}{\rho^2} n^2 - 12n^2 - 4s \right] = -4W_n(\rho, \tau_0) e^{-s\tau_0}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$W_n(\rho, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho_0} e^{-in\psi_0}. \quad (25)$$

Разложение (20) можно переписать в виде суммы по косинусам (так как $W_n = W_{-n}$) и в дальнейшем рассматривать $n = 0, 1, 2, \dots$

Решение уравнения (12) должно удовлетворять условию нормировки

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 W(\rho, \varphi, \tau) \rho d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^1 W_0(\rho, \tau) \rho d\rho = 1 \quad (26)$$

Таким образом, условию нормировки должно удовлетворять решение (22) при $n = 0$. Можно показать, что нужное решение единственным образом отбирается условием

$$\rho \left[\frac{\partial W_0}{\partial \rho} (1 - \rho^2)^2 - 4\rho(1 - \rho^2) W_0 \right]_0^1 = 0 \quad (27)$$

Это соотношение автоматически гарантирует выполнение условия нормировки, если последнее выполнено при $\tau = \tau_0$.

При $n \neq 0$ из (22) получим

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^1 W_n(\rho, \tau) \rho d\rho = -n^2 \int_0^1 \rho \left[12 + \frac{(1 - \rho^2)^2}{\rho^2} \right] W_n(\rho, \tau) \rho d\rho \quad (28)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial W(\varphi, \tau)}{\partial \tau} = \sum e^{im\varphi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 W_m(\rho, \tau) \rho d\rho. \quad (29)$$

Чтобы коэффициенты разложения в (29) были конечны, необходимо наложить требования на поведение $W_n(\rho, \tau)$ при

$\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow 1$, которые обеспечивали бы сходимость интеграла в (28). Это условие и условие (27) (отсутствие потока вероятности через границы области) единственным образом определяют решение задачи.

Рассмотрим уравнение (24) без правой части. Введем обозначение $s_n = 3n^2 + s$ и сделаем замену переменных

$$t = \rho^2, \quad W_n = (1 - \rho^2)^{-2 + \alpha} z \quad (30)$$

Если выбрать α по формуле $2\alpha = 1 + \sqrt{4s_1 + 1}$. $\operatorname{Re} \alpha > 0$, то уравнение (24) будет приведено к виду

$$t^2(t-1)z'' + z't[(2\alpha+1)t-1] + z[(\alpha^2 - \frac{n^2}{4})t + \frac{n^2}{4}] = 0 \quad (31)$$

Это уравнение ([14], стр.619) заменой $z = t^{n/2} y$ сводится к гипергеометрическому

$$t(t-1)y'' + [(2\alpha+n+1)t - 1 - n]y' + \alpha(\alpha+n)y = 0 \quad (32)$$

Можно выбирать, таким образом, два линейно-независимых решения уравнения (24) без правой части в виде

$$W_n^{(1)} = (1 - \rho^2)^{-2 + \alpha} \rho^n F(\alpha, \alpha + n, 1 + n, \rho^2), \quad (33)$$

$$W_n^{(2)} = (1 - \rho^2)^{-2 + \alpha} \rho^n F(\alpha, \alpha + n, 2\alpha, 1 - \rho^2),$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ - гипергеометрическая функция Гаусса.

Определитель Вронского фундаментальной системы

$$(33) K_n(\rho) = W_n^{(1)} W_n^{(2)'} - W_n^{(2)} W_n^{(1)'} \quad \text{равен}$$

$$K_n(\rho) = \frac{C_n(s)}{\rho(1-\rho^2)^4}, \quad C_n(s) = 2 \frac{\Gamma(2\alpha) n!}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+n)} \quad (34)$$

Мы не будем загромождать изложение исследованием функции $W_n^{(1)}$ и $W_n^{(2)}$ и доказательством того, что с их помощью можно найти решение уравнения (24) с правой частью. Приведем лишь некоторые данные

$$\rho \rightarrow 0 \quad \begin{cases} W_n^{(1)} \sim t^{n/2} (1+\alpha t) \rightarrow 0 \\ W_n^{(2)} \sim t^{-n/2} \end{cases} \quad \text{расходится}$$

$$\rho \rightarrow 1 \quad \begin{cases} W_n^{(1)} \sim (1-t)^{-1-a} \\ W_n^{(2)} \quad \text{конечно} \end{cases} \quad \text{расходится.}$$

Решение уравнения (24) конструируется обычным способом [15]:

$$W_n(\rho, s) = \begin{cases} \frac{2 W_n^{(2)}(\rho_0) W_n^{(1)}(\rho)}{\pi \rho_0 (1-\rho_0^2)^2 K_n(\rho_0)} e^{-s\tau_0 - in\varphi_0}, & \rho < \rho_0 \\ \frac{2 W_n^{(1)}(\rho_0) W_n^{(2)}(\rho)}{\pi \rho_0 (1-\rho_0^2)^2 K_n(\rho_0)} e^{-s\tau_0 - in\varphi_0}, & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (35)$$

Найденное решение единственно и удовлетворяет всем необходимым требованиям. Осуществляя обратное преобразование Лапласа, мы можем найти $W_n(\rho, \tau)$. Однако вычисления просты лишь для случая $n=0$.

Здесь мы используем (35) для получения общего результата, о котором уже упоминалось. При $\rho_0 \rightarrow 0$ все $W_n(\rho, s) \rightarrow 0$ за исключением $W_0(\rho, s)$. Таким образом, при $\rho_0 = 0$ функция распределения коэффициента отражения имеет вид:

$$W(\rho, \varphi, \tau) = W_0(\rho, \tau) \quad (36)$$

то есть имеет место равномерное распределение по фазе.

Функция распределения модуля коэффициента отражения $W(\rho, \tau) = 2\pi W_0(\rho, \tau)$ (выражается через $W_0(\rho, \tau)$ и при $\rho_0 \neq 0$) при $\rho_0 = 0$ была найдена в [4]

$$W(\rho, \tau) = \frac{2e^{-\tau/4}}{\sqrt{\pi} \tau^{3/2}} \int_0^1 \frac{f \ln f}{\xi(1-\xi)(1-\rho^2)^2} e^{-(\ln f)^2/\tau} d\xi \quad (37)$$

$$f^2 = \frac{(1-\rho^2)\xi(1-\xi)}{1-\xi(1-\rho^2)}$$

Мы используем выражение (37) для определения интенсивности отраженной волны

$$I = \langle \rho^2 \rangle = \int_0^1 \rho^2 W(\rho, \tau) d\rho \quad (38)$$

Заменой переменной, определяемой соотношением $\ln f = u$, можно привести интеграл (38) к виду

$$I = 1 - \frac{e^{-\tau/4}}{\sqrt{\pi} \tau^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{u^2 e^{-u} e^{-u^2/\tau}}{1+e^{-2u}} du \quad (39)$$

Отсюда легко получить асимптотические разложения. Для тонкого слоя ($\tau \ll 1$)

$$I = 1 - e^{-\tau/4} \quad (40)$$

Для толстого слоя ($\tau \gg 1$)

$$I = 1 - 2\pi^{3/2} \tau^{-3/2} e^{-\tau/4} \quad (41)$$

Достаточно толстый слой полностью отражает энергию падающей волны в виде энергии хаотического рассеянного поля ($\langle \xi \rangle = 0$). Соответственно, интенсивность прошедшей волны падает с ростом толщины по закону $\tau^{-3/2} e^{-\tau/4}$. Аналогичный результат был получен в [6] для модели с

дискретными неоднородностями. Используя (37), можно вычислить и другие моменты модуля коэффициента отражения.

Б. Среднее поле в слое

Поле E можно записать в виде

$$\begin{aligned} E &= E_0 + C e^{ikz} & z < 0 \\ E &= E_0 + P(x) e^{ikz} + Q(x) e^{-ikz} & 0 < z < L \\ E &= E_0 + A e^{-ikz} & z > 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Используя уравнения поля, можно для функций $Q(x)$ и $\Phi(x) = P(x) + 1$ получить систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} 2ikQ' - k_0^2 \Delta \epsilon(x) Q - k_0^2 \Delta \epsilon(x) \Phi e^{i2kz} &= 0, \\ 2ik\Phi' - k_0^2 \Delta \epsilon(x) \Phi - k_0^2 \Delta \epsilon(x) Q e^{-i2kz} &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Функция $S(x) = Q(x)/\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению (11) и является коэффициентом отражения. Функция $\Phi(x)$ при $x=0$ определяет комплексную амплитуду проходящей волны. Располагая решением для $S(x)$, мы можем из (43) найти амплитуду $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = e^{-i \frac{k_0}{2\sqrt{\epsilon_0}} \int_z^L \Delta \epsilon (1+R) dz} \quad (44)$$

Из (44) видно, что для точного определения среднего поля в слое, необходимо располагать совместной функцией распределения величин $\Delta \epsilon$ и R (или $\Delta \epsilon$ и y , или другой комбинации). Лишь для тонкого слоя ($\tau \ll 1$) можно пренебречь величиной R в подынтегральном выражении

показателя экспоненты и получить

$$\Phi = e^{-i \frac{k_0}{2\sqrt{\epsilon_0}} \int_0^L \Delta \epsilon dx} \quad (45)$$

Интеграл в показателе экспоненты можно считать распределенным по нормальному закону. Усредняя (45), можно записать:

$$\langle \Phi \rangle = e^{-\tau} \quad (\tau \ll 1) \quad (46)$$

Приближенно можно получить из (44) более общую формулу (годную при любых τ). Величины $\Delta \epsilon(x)$ и $R(x)$ слабо коррелированы. Можно показать, что при $\langle S_0 \rangle = 0$

$$\langle \Delta \epsilon(x) R(x) \rangle \approx k l \frac{\langle \Delta \epsilon^2 \rangle}{\epsilon_0^2} \ll 1$$

Это значит, что приближенно можно считать эти множители в подынтегральном выражении показателя в (44) независимыми

$$\langle \Phi(0) \rangle = e^{-\int_0^{\tau} [1 - \langle R^2(\tau') \rangle] d\tau'} \quad (47)$$

Но в силу равномерности распределения фазы (при $\langle S_0 \rangle = 0$) $\langle R^2 \rangle = 0$ так же как и $\langle R \rangle = 0$. В итоге получаем, что среднее поле спадает экспоненциально с толщиной слоя. Точно такой же закон спадающего среднего поля получается при использовании эффективной диэлектрической проницаемости одномерной мелкомасштабной безграничной среды.

З а к л ю ч е н и е

В настоящей работе мы не ставили задачи получения полной информации об одномерном распространении воли в случайно-неоднородном слое. Представлялось существенным получение строгих результатов, учитывающих рассеяние назад, на основе диффузионного уравнения для коэффициента отражения рассеивающего слоя. Коэффициент отражения является удобной величиной для исследования, поскольку удовлетворяет обыкновенному уравнению первого порядка (хотя и нелинейному) и при определенных условиях является марковским диффузионным процессом. Сравнивая строгие результаты с полученными приближенно в [7], мы видим, что для правильного учета явлений рассеяния назад по существу нужно учитывать и суммировать весь ряд теории возмущений, который и должен дать выражение для среднего коэффициента отражения равное нулю.

Автор благодарен Н.Г.Денисову за неизменный интерес к работе и обсуждение на всех ее этапах, а также В.И.Беспалову и В.В.Тамойкину за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Мотт. Электроны в неупорядоченных структурах ..
Изд. "Мир", М., 1969.
2. М.Е.Герценштейн, В.Б.Васильев, Теория вероятностей,
4, 424, 1959.
3. М.Е.Герценштейн, В.Б.Васильев, Радиотехника и элект-
роника, 4, 611, 1959.
4. В.И.Беспалов, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 2, 711, 1959.
5. С.И.Альбер, В.И.Беспалов, Радиотехника и электрони-
ка, 6, 448, 1961.
6. Ю.Л.Газарян, ЖЭТФ, 56, 1856, 1969.
7. I. Kupiec, L. B. Felsen, S. Rosenbaum, J. B. Kel-
ler, P. Chow, Radio Science, 4, (II), I067,
1969.
8. J. A. Morrison, Journ. of Math. Phys., II, (II),
3200, 1970.
9. J. A. Morrison, G. C. Papanicolaou and J. B. Kel-
ler, Comm. on Pure and Appl. Math., 24(5),
473-489. 1971.

10. J. MC Kenna and J.A. Morrison, Journ. of Math. Phys., II(8), 2348, 1970.
11. С.М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, Изд. "Наука", М., 1968.
12. М.А. Леонтович, Статистическая физика, ГИТТЛ, 1944.
13. Л.М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, М., 1957.
14. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ГИИЛ., М., 1950.
15. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, Т., Гостехиздат, 1957.

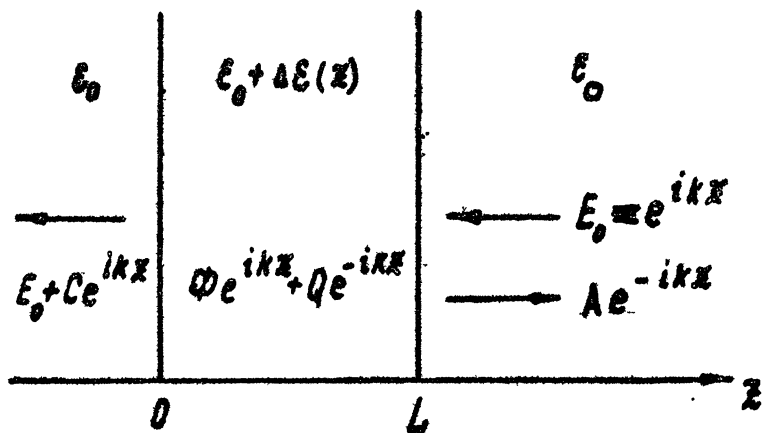


Рис. 1