Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 26

НИРФИ

М.А.Антонец, Г.М.Жислин, И.А.Шерешевский

# О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ $n$ ЧАСТИЦ

г. Горький
1 9 7 2

## 1. Определения и основные результаты

1.1. В настоящей работе устанавливаются достаточные условия конечности дискретного спектра гамильтониана квантовой многочастичной системы с парным взаимодействием в пространстве функций фиксированной симметрии.

Физический смысл этих условий состоит в том, что в каждом из энергетически наиболее выгодных распадений системы имеется либо пара отталкивающихся подсистем, либо подсистема, состоящая из отталкивающихся частиц и никакие две подсистемы не притягиваются друг к другу "слишком сильно".

Полученные результаты обобщают известные ранее условия конечности дискретного спектра оператора энергии $n$ одноименно заряженных частиц в поле притягивающего центра [1,2,3] .

1.2. Рассмотрим оператор энергии квантовой системы $n$ частиц с парным взаимодействием

$$\mathcal{H}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\Delta_i+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{1,n} v_{ij}(|r_i-r_j|) , \qquad (1.1)$$

где $\Delta_i$ – оператор Лапласа по координатам $r_i=\{x_{3i-2},x_{3i-1},x_{3i}\}$ $i$-ой частицы, $m_i>0$ – масса $i$-ой частицы и $v_{ij}=v_{ji}$.

Пусть функции $v_{ij}(r_1)$ удовлетворяют условиям:

$$\int_{|r_1|<A}|v_{ij}(r_1)|^2 d^3 r_1<+\infty \qquad \text{для любого } A>0$$

и

$$\int_{|r_1-r_1'|\leq 1}|v_{ij}(r_1)|^2 d^3 r_1 \to 0 \qquad \text{при } |r_1'|\to\infty$$

Далее функции $v_{ij}$ предполагаются вещественными.

Положим $R^{3n}=\{r,\ r=\{r_1,\dots,r_n\}\}$. Пусть $\Omega\subset R^{3n}$, $C_0^2(\Omega)$ – совокупность дважды непрерывно дифференцируемых в $R^{3n}$ функций с носителями в $\Omega$. Оператор $\mathcal{H}$, определенный на $C_0^2(R^{3n})$ имеет единственное самосопряженное расширение в $\mathcal{L}^2(R^{3n})$[4].

1.3. Будем отождествлять систему частиц с множеством их номеров $N=\{1,\dots,n\}$. Подмножество $N_\alpha\subset N$ назовем подсистемой. Число частиц в подсистеме $N_\alpha$ обозначим $n_\alpha$.

Множество $Z_p=\{N_{\alpha_1},\dots,N_{\alpha_q}\}$, такое, что $N_{\alpha_i}\cap N_{\alpha_j}=\emptyset$ при $i\neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{s} N_{\alpha_i}=N$ назовем распадением. Положим $Z_0=\{\{1\},\dots,\{n\}\}$, $Z_1=\{N\}$, а остальные распадения пронумеруем в произвольном порядке. Число подсистем в распадении $Z_p$ обозначим $\jmath_p$.

Будем писать $Z_p > Z_q$, если $Z_p\neq Z_q$ и для любой подсистемы $N_\alpha$, $N_\alpha\in Z_q$, найдется подсистема $N_\beta$, $N_\beta\in Z_p$, такая, что $N_\alpha\subseteq N_\beta$.

1.4. Следуя [5], проведем инвариантное отделение движения центра масс системы $N$. Для этого введем в $R^{3n}$ скалярное произведение

$$(r,\tilde r)_1=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(r_i,\tilde r_i)\ ,$$

где

$$(r_i,\tilde r_i)=\sum_{\gamma=0}^{2} x_{3i-\gamma}\,\tilde x_{3i-\gamma}\ .$$

Тогда $R^{3n}=R_0\oplus R_c$, где

$$R_c=\{r,r=\{r_1,\dots,r_n\}\in R^{3n},\ r_k=\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i\ ,k=1,\dots,n\}$$

$$R_0=\{r,r=\{r_1,\dots,r_n\}\in R^{3n},\ \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i=0\}\ .$$

При этом оператор $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму операторов $H_0$ и $H_c$, где

$$H_0=-\frac{1}{2}\Delta_0+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{1,n}v_{ij}(|(P_0 r)_i-(P_0 r)_j|) \qquad (1.2)$$

– оператор энергии относительного движения системы, определенный на $C_0^2(R_0)$, $H_c=-\frac{1}{2}\Delta_c$ – оператор энергии движения центра масс системы, определенный на $C_0^2(R_c)$,

$P_0$ – проектор в $R^{3n}$ на $R_0$. Далее нас будет интересовать оператор $H_0$. Продолжим его до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение. Обозначим область определения оператора $H_0$ через $\mathcal{D}(H_0)$.

1.5. Как и в [6], для распадения $Z_p$ введем в $R_0$ подпространства

$$R_c^{Z_p}=\left\{r, r=\{r_1,\dots,r_n\}\in R_0, r_i=M_\alpha^{-1}\sum_{k\in N_\alpha}m_k r_k, i\in N_\alpha, N_\alpha\in Z_p\right\}$$

$$R_0^{Z_p}=\left\{r, r=\{r_1,\dots,r_n\}\in R_0, \sum_{i\in N_\alpha}m_i r_i=0, N_\alpha\in Z_p\right\},$$

где $M_\alpha=\sum_{i\in N_\alpha}m_i$. Тогда $R_0=R_0^{Z_p}\oplus R_c^{Z_p}$ и

$$H_0=H_0^{Z_p}+H_c^{Z_p}+I_{Z_p}, \qquad (1.3)$$

где оператор

$$H_0^{Z_p}=-\frac{1}{2}\Delta_0^{Z_p}+\frac{1}{2}\sum_{N_\alpha\in Z_p}\sum_{\substack{i,k\in N_\alpha\\ i\neq k}}v_{ik}(|(P_0^{Z_p}r)_i-(P_0^{Z_p}r)_k|)$$

определен на $C_0^2(R_0^{Z_p})$, оператор $H_c^{Z_p}=-\frac{1}{2}\Delta_c^{Z_p}$ – на $C_0^2(R_c^{Z_p})$, оператор

$$I_{Z_p}=\frac{1}{2}\sum_{N_\alpha,N_\beta\in Z_p,\alpha\neq\beta}\ \sum_{i\in N_\alpha, j\in N_\beta}v_{ij}(|r_i-r_j|)$$

– на $C_0^2(R_0)$; $P_0^{Z_p}$ – проектор в $R^{3n}$ на $R_0^{Z_p}$.

Оператор $H_0^{Z_p}$ продолжим до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

Для подсистемы $N_\alpha \subset N$ аналогично тому, как это было сделано для системы $N$, можно построить оператор $H_0(N_\alpha)$ +). Очевидно

$$H_0^{Z_p} = \sum_{N_\alpha \in Z_p} \oplus H_0(N_\alpha) \qquad (1.4)$$

1.6. Пусть $S(N_\alpha)$ – группа перестановочной симметрии оператора $H_0(N_\alpha)$. Для $Z_p = \{N_{\alpha_1}, \ldots, N_{\alpha_t}\}$ обозначим $S(Z_p)$ подгруппу группы $S(N)$, состоящую из всех перестановок вида $\tilde{g} g$, где $\tilde{g} \in \tilde{S}(Z_p) \equiv S(N_{\alpha_1}) \times \ldots \times S(N_{\alpha_t}), g \in S_p$, $S_p$ – группа перестановок тождественных подсистем в распадении $Z_p$. Можно показать, что эта группа совпадает с определенной в [5] (стр.78) группой $S(Z_h)$ при $Z_p = Z_h$.

Пусть $R$ – полная группа вращений трехмерного пространства. Группами симметрии операторов $H_0$ и $H_0^{Z_p}$ являются, соответственно. $G(N) = S(N) \times R$ и $G(Z_p) = S(Z_p) \times R$. Типы неприводимых представлений этих групп будем обозначать $\sigma$ и $\sigma_p$. Если неприводимое представление группы $G(Z_p)$ типа $\sigma_p$ индуцировано в смысле [5] (стр.80) неприводимым представлением типа $\sigma$ группы $G(N)$, то будем писать $\sigma_p < \sigma$ [5].

Обозначим $\mathcal{Y}^\sigma$ ($\mathcal{Y}^{\sigma_p}$) подпространство всех функций из $\mathcal{L}^2(R_0)$ ($\mathcal{L}^2(R_0^{Z_p})$), преобразующихся по представлениям типа $\sigma$ ($\sigma_p$) группы $G(N)$ ($G(Z_p)$). Пусть $H_0^\sigma$ – сужение оператора $H_0$ на $D(H_0^\sigma) = D(H_0) \cap \mathcal{Y}^\sigma$ и $H_0^{\sigma_p}(Z_p)$ – сужение оператора $H_0^{Z_p}$ на $D(H_0^{\sigma_p}(Z_p)) = D(H_0^{Z_p}) \cap \mathcal{Y}^{\sigma_p}$.

1.7. Пусть

$$\mu_p^\sigma = \inf_{\sigma_p < \sigma} \left\{ \inf_{\varphi \in D(H_0^{\sigma_p}(Z_p)), \|\varphi\| = 1} (H_0^{\sigma_p}(Z_p)\varphi, \varphi) \right\}$$

$$\mu^\sigma = \min_{Z_p, \mathfrak{z}_p \geq 2} \mu_p^\sigma; \quad \mathcal{O}(\sigma) = \{ Z_p ; \mu_p^\sigma = \mu^\sigma, \mathfrak{z}_p \geq 2 \}.$$

---

+) $H_0(N_\alpha) = 0$ при $n_\alpha = 1$

Распадения $Z_p$, $Z_p \in \mathcal{O}(\sigma)$, назовем определяющими (для типа $\sigma$).

1.8. Пусть

$$b_{ij}(x) = \lim_{R\to\infty} \left\{ \operatorname{vrai\,inf}_{|r_1|>R} |r_1|^x v_{ij}(r_1) \right\}$$

Предположим, что для каждой пары $i,j \in N$, $i \neq j$, или

$$b_{ij}(x) \equiv 0 \quad \text{для всех } x \in [0, +\infty) \qquad (1.5)$$

или для некоторого $x = a_{ij}$, $0 < a_{ij} < +\infty$,

$$0 < |b_{ij}(a_{ij})| < +\infty . \qquad (1.6)$$

В случае выполнения (1.6) числа $a_{ij}$ определяются по функции $v_{ij}$ однозначно. В случае выполнения (1.5) положим $a_{ij} = +\infty$.

Пусть $\Gamma^a = \{(i,j), i,j \in N, i \neq j, a_{ij} = a\}$, $0 < a \leq +\infty$. Обозначим через $\mathcal{G}$ множество таких подсистем $N_\alpha \subset N$, что для всех $i,j \in N_\alpha$ $v_{ij}(r_1) \geq 0$. При $i,j \in N_\alpha$ положим $q_{ij} = 1$, если

$$\operatorname{vrai\,inf}_{|r_1|<R} v_{ij}(r_1) > 0 \quad \text{для всех } R \qquad (1.7)$$

и $q_{ij} = 0$ в противном случае.

Для $Z_p \in \mathcal{O}(\sigma)$ и всех $N_\alpha$, $N_\beta \in Z_p$ $\alpha \neq \beta$, $N_\gamma \in Z_p \cap \mathcal{G}$ определим множества

$$T^a_{\alpha\beta} = (N_\alpha \times N_\beta) \cap \Gamma^a , \quad T^a_\gamma = (N_\gamma \times N_\gamma) \cap \Gamma^a .$$

Пусть для каждого $Z_p \in \mathcal{O}(\sigma)$ $a(p)$ есть минимальное из чисел $a$, для которых хотя бы одно из множеств $T^a_{\alpha\beta}$, $T^a_\gamma$, не пусто при $N_\alpha, N_\beta \in Z_p$, $N_\gamma \in Z_p \cap \mathcal{G}$.

Обозначим

$$e^p_{\alpha\beta} = \sum_{i,j \in T^{a(p)}_{\alpha\beta}} b_{ij}(a(p)), \quad e^p_\gamma = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in T^{a(p)}_\gamma} q_{ij} b_{ij}(a(p))$$

$$e_p = \frac{1}{2} \sum_{N_\alpha, N_\beta \in Z_p, \alpha \neq \beta} e^p_{\alpha\beta} + \sum_{N_\gamma \in Z_p \cap \mathcal{G}} e^p_\gamma .$$

1.9. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. Для того, чтобы дискретный спектр оператора $H_0^G$ был конечным достаточно, чтобы для любого распадения $Z_p$, $Z_p \in \mathcal{O}(G)$, выполнялись неравенства:

$$\mathrm{I}\ a(p) < 2$$

$$\mathrm{II}\ \ell^p_{\alpha\beta} \geq 0 \quad N_\alpha, N_\beta \in Z_p, \alpha \neq \beta$$

$$\mathrm{III}\ \ell_p > 0 .$$

Основная трудность при использовании теоремы 1.1. заключается в отыскании определяющих распадений. Приведем примеры систем, для которых эту трудность удается преодолеть и установить конечность дискретного спектра соответствующих операторов.

1.10. Пусть $V_{ij}(r_1) = b_{ij} r_1^{-1}, i = j$, $i, j = 1, \ldots, n$,

$$b_{ij} > 0,\ i, j \neq 1,\ b_{1j} < 0,\ j = 2, \ldots, n \ \text{и}$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij} > 0, \quad i = 2, \ldots, n . \tag{1.8}$$

Очевидно, условие 1 в этом случае выполнено. Покажем., что выполнены и условия П,Ш. Действительно, пусть $Z_q = \{N_{\alpha_1}, \ldots, N_{\alpha_t}\}$, $1 \in N_{\alpha_1}$.

Пусть $z_q \geq 3$ и $\ell^q_{\alpha_1\alpha_s} < 0$ для некоторого $s \neq 1$. Тогда, согласно [6], распадение $Z_q$ не является определяющим.

Пусть $z_q \geq 3$ и $\ell^q_{\alpha_1\alpha_s} > 0$, $s = 2, \ldots, z_q$. Тогда условия П,Ш очевидно выполнены.

Пусть $z_q = 2$, $n_{\alpha_2} \geq 2$. Если при этом $\ell^q_{\alpha_1\alpha_2} < 0$, то найдется $i \in N_{\alpha_2}$, для которого $\sum_{j \in N_{\alpha_1}} b_{ij} < 0$. Рассмотрим распадение $Z_{q'} = \{N_{\alpha_1}, \{i\}, N_{\alpha_2} \setminus \{i\}\}$. Так как операторы $H_0(N_{\alpha_2})$ и $H_0(N_{\alpha_2} \setminus \{i\})$ неотрицательны, то $\mu_q = \mu_{q'}$. Распадение $Z_{q'}$ по доказанному выше не является определяющим, следовательно, и $Z_q$ не будет определяющим.

Наконец, если $z_q = 2$, $n_{\alpha_2} \geq 2$, $\ell^q_{\alpha_1\alpha_2} \geq 0$ или $z_q = 2$, $n_{\alpha_2} = 1$, выполнение условий П,Ш очевидно.

Таким образом, неравенства (1.8) обеспечивают конечность дискретного спектра соответствующего оператора. Приведенные рассуждения остаются справедливыми при учете перестановочной и вращательной симметрии.

В частном случае $b_{ij}=1$ , $i,j\neq 1$ , $b_{1j}=-2, j\neq 1$ , мы получаем утверждение теоремы 1 [3] .

1.11. Пусть $b_{ij}=e_i e_j$ . Тогда неравенство (1.8) переходит в

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} e_j > 0 \qquad i=2,\dots,n \tag{1.9}$$

если $e_i>0$ при $i\neq 1$ , или в

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} e_j < 0 \qquad i=2,\dots,n , \tag{1.10}$$

если $e_i<0$ при $i\neq 1$ . Пусть $|e_2|\leq|e_3|\leq\dots\leq|e_n|$ . Предположим, что одновременно в (1.1)

$$m_2\leq m_3\leq \dots \leq m_n \tag{1.11}$$

Тогда, если рассматривать оператор (1.2) без учета перестановочной симметрии, условие (1.8) можно несколько ослабить. Пусть сначала $m_2=m_3=\dots=m_n$. Положим $N_i=N\setminus\{i\}, i\neq 1$. Из леммы (1.3) (Приложение 1) следует, что если оператор $H(N_i)$ имеет непустой дискретный спектр то

$$\inf H(N_2)<\inf H(N_i) \qquad \text{при } e_i\neq e_2 \tag{1.12}$$

Если дискретный спектр $H(N_i)$ пуст, то в силу [6] $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} e_j>0$ при $e_i>0$ или $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} e_j<0$ при $e_i<0$ ; $i\neq 1$ . Поэтому для конечности дискретного спектра оператора $H_0$ достаточно выполнения неравенств

$$\sum_{j=1, j\neq 2}^{n} e_j > 0 \qquad \text{при } e_i>0 \quad i\neq 1 \tag{1.13}$$

$$\sum_{j=1, j\neq 2}^{n} e_j < 0 \qquad \text{при } e_i<0 \quad i\neq 1 \tag{1.14}$$

Если увеличить числа $m_i$ , то $\inf H_0$ не возрастет. Поэтому и при выполнении (1.11) условие (1.13) (или (1.14) ) является достаточным для конечности дискретного спектра оператора $H_0$ .

Заметим, что при учете перестановочной симметрии выполнение неравенства (1.13) (или (1.14) ) не является достаточным для конечности дискретного спектра оператора $H_0^G$ . Это показывает следующий пример. Рассмотрим систему из четырех частиц таких, что $e_1>0$, $e_2=e_3<0$ , $e_4=e_3+\delta<0$, $\delta>0$, $m_2=m_3=m_4$. В качестве групп $G(N)$ и $G(Z_p)$ возьмем $S(N)$ и $S(Z_p)$. Симметричное и антисимметричное представление обозначим через $E$ и $A$ соответственно. Предположим, что $|e_i|<e_1$, $i=2,\dots,4$ . Тогда определяющим могут быть только распадения $Z_4=\{(123),(4)\}$ или $Z_3=\{(124)(3)\}$, так как гамильтонианы систем (1,2,3) и (1,2,4) имеют согласно [6] бесконечный дискретный спектр для любого типа симметрии. Для любого $\varepsilon>0$ (в силу леммы 1.1. Приложения 1) можно указать $\delta_1>0$, так, что при $\delta<\delta_1$ $|\inf H_0^E(Z_4)-\inf H_0(Z_3)|<\varepsilon$ . Кроме того, согласно [9], $\inf H_0^E(Z_4)<\inf H_0^A(Z_4)$; следовательно, при некотором $\delta>0$, $\inf H_0^A(Z_4)>\inf H_0(Z_3)$. Отсюда следует, что $Z_3$ является определяющим распадением для типа симметрии $A$ исходной системы. Если $2|e_2|>e_1$ , то условие (1.14) выполнено. Если при этом $|e_2|+|e_4|<e_1$ , то согласно [6] оператор $H_0^A$ имеет бесконечный дискретный спектр. Отметим, что при тех же условиях оператор $H_0^E$ имеет только конечный дискретный спектр.

## 2. Вспомогательные предложения

2.1. Для $r$ , $r\in K_0$, $N_\alpha$, $N_\beta\subset N$ , $N_\alpha\cap N_\beta=\emptyset$ положим

$$d_r(N_\alpha,N_\beta)=\min_{i\in N_\alpha,\,j\in N_\beta}|r_i-r_j| .$$

Определим в $R_0$ для всех $Z_p$ и любого $A>0$ множества $\Omega_p$ :

$$\Omega_0(A)=\{r, r\in R_0, |r_i-r_j|>A\ , \ i\neq j, i,j=1,\dots,n\},\ \text{при } p>1$$

$$\Omega_p(A)=\{r, r\in R_0, r\bar{\in}\Omega_q\ , \ \jmath_q>\jmath_p, d_r(N_\alpha,N_\beta)>A, \alpha\neq\beta, N_\alpha,N_\beta\in Z_p\},$$

$$\Omega_1(A)=\{r, r\in R_0\ , \ r\bar{\in}\Omega_q\ , \ \jmath_q>1\}\ .$$

Согласно [5]

$$\Omega_p(A)\cap\Omega_q(A)=\emptyset \qquad \text{при } p\neq q$$
$$\bigcup_p\Omega_p(A)=R_0$$

<u>Лемма 2.1.</u> Пусть $Z_p=\{N_{\alpha_1},\dots,N_{\alpha_s}\}$ и $r\in\Omega_p(A)$. Тогда $|r_k-r_j|<nA$ для всех $k,j\in N_{\alpha_i}, i=1,\dots,s$

<u>Доказательство.</u> Так как $r\in\Omega_p(A)$, то $r\bar{\in}\Omega_q(A)$ при $q\neq p$. Пусть $j\in N_{\alpha_t}\in Z_p$. Тогда найдется такое $k_1\in N_{\alpha_t}\setminus\{j\}$, что $|r_j-r_{k_1}|<A$. Далее, для некоторого $k_2\in N_{\alpha_t}\setminus\{j,k_1\}$ выполняется хотя бы одно из неравенств: $|r_j-r_{k_2}|\leq A$, $|r_{k_1}-r_{k_2}|\leq A$. Поэтому $|r_j-r_{k_2}|<2A$. Если номера $k_1,\dots,k_{\ell-1}\in N_{\alpha_t}\setminus\{j\}$ выбраны так, что $|r_j-r_{k_m}|<(\ell-1)A$, $1<m\leq \ell-1$, то можно найти $k_\ell\in N_{\alpha_t}\setminus\{j,k_1,\dots,k_{\ell-1}\}$, так, что $|r_j-r_{k_\ell}|<\ell A$.

2.2. Для $r$, $r\in R_0$, положим $|r|_1=\sqrt{(r,r)_1}$. Для векторов $r_i$, $|r_i|=\sqrt{x_{3i-2}^2+x_{3i-1}^2+x_{3i}^2}$.

Пусть

$$A_k=\{Z_p:\ Z_p\in\mathcal{O}(G)\ ,\ \jmath_p=k\}\quad 2\leq k\leq n\ .$$

Определим для $Z_p\in A_k$ "конуса"

$$\mathcal{K}_p=\{r: r\in R_0, (1+C_k^2)|P_c^{Z_p}r|_1^2\geq|r|_1^2\}\ , \tag{2.1}$$

где $P_c^{Z_p}$ – проектор в $R_0$ на $R_c^{Z_p}$ и $C_k>0$ – некоторые константы.

Пусть далее

$$S_R = \{ r ; r \in R_0 , |r|_1 \leq R \}$$

$$\mathcal{M}_p = \mathcal{K}_p \setminus \bigcup_{\substack{Z_q \in A_s \\ s \leq k}} \mathcal{K}_q .$$

<u>Лемма 2.2.</u> Константы $C_s$, $s = 2, \ldots$, можно выбрать так, что

1. Для $Z_p \in A_k$, $r \in \mathcal{M}_p$, $(i,j) \in N_\alpha \times N_\beta$, $N_\alpha, N_\beta \in Z_p$, $\alpha \neq \beta$

$$|r_i - r_j| \geq d_k(C_k) |r|_1 ,$$

где $d_k(C_k)$ – некоторая константа, зависящая от $C_k$, $C_{k-1}$, причем $\lim\limits_{C_k \to 0} d_k(C_k) > 0$ при $C_{k-1} > 0$.

П. Для $Z_p$, $Z_q \in A_k$

$$\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_q = \{ r : r \in R_0 , r = 0 \} .$$

Ш. Для любого $\bar{A} > 0$ и всех $A \leq \bar{A}$ при достаточно большом $R = R(\bar{A})$

$$\bigcup_{Z_p \in \mathcal{O}(\sigma)} \Omega_p(A) \setminus S_R \subset \bigcup_{Z_p \in \mathcal{O}(\sigma)} \mathcal{M}_p .$$

<u>Доказательство</u>. Докажем 1. Пусть $r \in \mathcal{M}_p$, $N_\alpha$, $N_\beta$ – фиксированные подсистемы из $Z_p \in A_k$, $\alpha \neq \beta$, $(i_0, j_0) \in N_\alpha \times N_\beta$. Тогда

$$|(P_c^{Z_p} r)_{i_0} - (P_c^{Z_p} r)_{j_0}| \leq |r_{i_0} - r_{j_0}| + |(P_0^{Z_p} r)_{i_0}| + |(P_0^{Z_p} r)_{j_0}| .$$

Так как $r \in \mathcal{K}_p$, то

$$C_k^2 |P_c^{Z_p} r|_1^2 \geq |P_0^{Z_p} r|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i |(P_0^{Z_p} r)_i|^2 ,$$

откуда

$$|(P_0^{Z_p} r)_{i_0}| + |(P_0^{Z_p} r)_{j_0}| \leq 2 \sqrt{\frac{1}{m}} \, C_k |P_c^{Z_p} r|_1 , \qquad (2.2)$$

где $m=\min\limits_{i\in N}\{m_i\}$. Поэтому

$$|(P_c^{Z_p}r)_{i_0}-(P_c^{Z_p}r)_{j_0}|\leqslant|r_{i_0}-r_{j_0}|+2\sqrt{\frac{1}{m}}C_k|P_c^{Z_p}r|_1 \tag{2.3}$$

Пусть $k=2$. Так как $r\in\mathcal{M}_p\subset R_0$, то

$$|(P_c^{Z_p}r)_{i_0}-(P_c^{Z_p}r)_{j_0}|=\sqrt{\frac{M_\alpha+M_\beta}{M_\alpha M_\beta}}\,|P_c^{Z_p}r|_1$$

Отсюда и из (2.3) получим при $C_2<1$

$$|r_{i_0}-r_{j_0}|\geqslant\left(\sqrt{\frac{M_\alpha+M_\beta}{M_\alpha M_\beta}}-\sqrt{\frac{4}{m}}C_2\right)|r|_1\frac{1}{2} .$$

При малых $C_2$, $|r_{i_0}-r_{j_0}|\geqslant d_2|r|_1$, где $d_2>0$. Пусть $k>2$, числа $C_2,\ldots,C_{k-1}$ фиксированы и $Z_q$ получается из $Z_p$ объединением подсистем $N_\alpha$ и $N_\beta$. Так как $r\in\mathcal{K}_q$, то

$$(1+C_{k-1}^2)|P_c^{Z_q}r|_1^2<|r_1|^2\leqslant(1+C_k^2)|P_c^{Z_p}r|_1^2 ,$$

т.е.

$$(C_{k-1}^2-C_k^2)|P_c^{Z_p}r|_1^2<(1+C_{k-1}^2)\left(|P_c^{Z_p}r|_1^2-|P_c^{Z_q}r|_1^2\right). \tag{2.4}$$

Используя определение оператора $P_c^{Z_p}$, легко показать, что

$$|P_c^{Z_p}r|_1^2-|P_c^{Z_q}r|_1^2=\frac{M_\alpha M_\beta}{M_\alpha+M_\beta}|(P_c^{Z_p}r)_{i_0}-(P_c^{Z_p}r)_{j_0}|. \tag{2.5}$$

Если $0<C_k<C_{k-1}<1$, то из (2.3)–(2.5) следует, что

$$|r_{i_0}-r_{j_0}|\geqslant|r|_1\cdot d_k(C_k) , \tag{2.6}$$

где

$$d_k(C_k)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{M_\alpha+M_\beta}{M_\alpha M_\beta}\;\frac{C_{k-1}^2-C_k^2}{2}}-C_k\sqrt{\frac{4}{m}}\right).$$

Докажем утверждение П.

Пусть $\tau\in\mathcal{M}_p\cap\mathcal{M}_q$, $Z_p, Z_q\in A_k$, $p\neq q$. Тогда можно найти подсистемы $N_\alpha, N_\beta\in Z_p$, $\alpha\neq\beta$, $N_\gamma\in Z_q$ и частицы $i_0, j_0\in N$ так, что $(i_0, j_0)\in N_\alpha\times N_\beta$, $i_0, j_0\in N_\gamma$.
Так как $|\tau_{i_0}-\tau_{j_0}|=|(P_0^{Z_q}\tau)_{i_0}-(P_0^{Z_q}\tau)_{j_0}|$, то из (2.2) и (2.6) следует, что

$$|\tau|_1\, d_k(C_k)\leqslant|\tau_{i_0}-\tau_{j_0}|\leqslant\sqrt{\frac{4}{m}}\,C_k|\tau|_1 .$$

При достаточно малом $C_k$ $d_k(C_k)>\sqrt{\frac{4}{m}}C_k$, поэтому $|\tau|_1=0$. Осталось доказать Ш. Заметим, что для $\tau\in R_0$ и всех $N_\alpha\in Z_p$

$$\sum_{i\in N_\alpha}m_i|(P_0^{Z_p}\tau)_i|^2=\frac{1}{2M_\alpha}\sum_{i,j\in N_\alpha}m_i m_j|(P_0^{Z_p}\tau)_i-(P_0^{Z_p}\tau)_j|^2=$$

$$=\frac{1}{2M_\alpha}\sum_{i,j\in N_\alpha}m_i m_j|\tau_i-\tau_j|^2 .$$

Поэтому

$$|P_0^{Z_p}\tau|_1^2=\sum_{N_\alpha\in Z_p}\sum_{i\in N_\alpha}m_i|(P_0^{Z_p}\tau)_i|^2=\sum_{N_\alpha\in Z_p}\sum_{i,j\in N_\alpha}\frac{m_i m_j}{2M_\alpha}|(P_0^{Z_p}\tau)_i-$$

$$-(P_0^{Z_p}\tau)_j|^2=\sum_{N_\alpha\in Z_p}\sum_{i,j\in N_\alpha}\frac{m_i m_j}{2M_\alpha}|\tau_i-\tau_j|^2 . \tag{2.7}$$

Пусть $Z_p\in A_k$ и $\tau\in\Omega_p(A)\setminus S_R$. В силу леммы 2.1 и (2.7)

$$|P_0^{Z_p}\tau|_1^2\leqslant\frac{1}{2}A^2n^2M ,$$

где $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$. Следовательно,

$$|P_c^{Z_p}\tau|_1^2\geqslant|\tau|_1-\frac{1}{2}A^2n^2M\geqslant|\tau|_1\left(1-\frac{A^2n^2M}{2R^2}\right)$$

откуда, при $R^2 > \frac{\bar{A}^2 n^2 M}{c_k^2}$, следует, что $r \in \mathcal{X}_p$.
Так как

$$\bigcup_{z_p \in \mathcal{O}(\sigma)} \mathcal{M}_p = \bigcup_{z_p \in \mathcal{O}(\sigma)} \mathcal{X}_p ,$$

то утверждение Ш доказано.

2.3. Положим

$$a_0 = \max_{z_p \in \mathcal{O}(\sigma)} \{a(p)\}$$

$$W_{z_p} = \frac{1}{2} \sum_{N_\gamma \in z_p \cap \mathcal{G}} \sum_{ij \in N_\gamma,\, i \neq j} v_{ij}(|r_i - r_j|) .$$

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия 1–Ш теоремы 1.1.
Тогда константы $C_s, \ldots s = 2, \ldots$ и $R$ можно выбрать так, чтобы была справедлива лемма 2.2. и для $z_p \in \mathcal{O}(\sigma)$ и $r \in \mathcal{M}_p$ почти всюду имело бы место неравенство

$$I_{z_p} + W_{z_p} \geq \frac{\gamma}{|r|_1^{a_0}} ,$$

где $\gamma$ – некоторое положительное число.

Доказательство. Пусть $k = 2$, или $k > 2$ константы $C_s, s < k$ уже выбраны, а $z_p \in A_k$. Положим

$$2d_k = \lim_{C_k \to 0} d_k(C_k)$$

и пусть $C_0$ таково, что при $C_k < C_0$ $d_k(C_k) \geq d_k$
Пусть $a = a(p)$. Рассмотрим функцию

$$I_{\alpha\beta}(r) = \sum_{(i,j) \in T^a_{\alpha\beta}} v_{ij}(|r_i - r_j|) ,$$

где $N_\alpha$, $N_\beta \in z_p$, $\alpha \neq \beta$. Для данного $\varepsilon_1 > 0$ можно указать $R_1 = R_1(\varepsilon_1)$, так, что при $|r_{ij}| > R_1$. $i, j \in N$, $i \neq j$ почти всюду

$$v_{ij}(|r_{ij}|) \geq \frac{b_{ij} - \varepsilon_1}{|r_{ij}|^a}$$

Далее, не оговаривая каждый раз, считаем, что все неравенства, включающие функции $v_{ij}$, выполняются почти всюду. Пусть конус $\mathcal{K}_\rho$ построен с помощью константы $C_\kappa < C_0$. Тогда по лемме 2.2 при $r \in \mathcal{M}_\rho$, $(i,j) \in N_\alpha \times N_\beta$

$$|r_i - r_j| \geqslant d_\kappa |r|_1 .$$

Пусть $R = R_1 \cdot d_\kappa^{-1}$. Тогда для $r \in \mathcal{M}_\rho \setminus S_\kappa$ и $(i,j) \in N_\alpha \times N_\beta$, $|r_i - r_j| > R_1$ и поэтому

$$I_{\alpha\beta}(r) \geqslant \sum_{(i,j) \in T^a_{\alpha\beta}} (b_{ij} - \varepsilon_1) |r_{ij}|^{-a} .$$

Положим $b'_{ij} = b_{ij} - \varepsilon_1$ и выберем $\varepsilon_1$ так, что $b'_{ij} > 0$, если $b_{ij} > 0$. Пусть $(s,t) \in N_\alpha \times N_\beta$. Для $r \in \mathcal{M}_\rho$ и $(i,j) \in N_\alpha \times N_\beta$ с помощью (2.7) получим

$$|r_{ij}| \leqslant |r_{is}| + |r_{st}| + |r_{tj}| \leqslant |r|_1 (x_{st} + C_\kappa \rho) ,$$

где $x_{st} = |r_{st}| |r|_1^{-1}$, $\rho^2 = 4Mm^{-2}$. Аналогично

$$|r_{ij}| \geqslant |r|_1 (x_{st} - C_\kappa \rho) .$$

Тогда при $C_\kappa \rho < x_{st}$ имеем

$$|r|_1^a I_{\alpha\beta} \geqslant \Phi(x_{st}, C_\kappa) = \left( \sum^{+}_{(i,j) \in T^a_{\alpha\beta}} \frac{b'_{ij}}{(x_{st} + C_\kappa \rho)^a} + \sum^{-}_{(i,j) \in T^a_{\alpha\beta}} \frac{b'_{ij}}{(x_{st} - C_\kappa \rho)^a} \right) ,$$

где $\sum^{+}$ – сумма по тем $(i,j)$, для которых $b'_{ij} > 0$, $\sum^{-}$ – по тем $(i,j)$, для которых $b'_{i,j} < 0$. Функция $\Phi(x_{st}, C_\kappa)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $[d_\kappa, \rho] \times [0, C_0]$ по совокупности переменных и

$$\Phi(x_{st}, 0) = x_{st}^{-a} (e^p_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta \varepsilon_1) \geqslant e^p_{\alpha\beta} \rho^{-a} - n_\alpha n_\beta \varepsilon_1 d_\kappa^{-a} .$$

Выберем $C_0$ так, чтобы при $C_\kappa < C_0$

$$\Phi(x_{st}, C_\kappa) \geqslant e^p_{\alpha\beta} \rho^{-a} - 2 n_\alpha n_\beta \varepsilon_1 d_\kappa^{-a} . \tag{2.8}$$

Пусть теперь $(i,j)\in T_\gamma^a$, $N_\gamma\in Z_p\cap \mathcal{G}$. Поскольку $a<2$ то из (1.3) следует, что $b_{ij}>0$. Для некоторого $R_2=R_2(\varepsilon_1)$ и $|r_{ij}|>R_2$ $v_{ij}(|r_{ij}|)\geq|r_{ij}|^{-a}(b_{ij}-\varepsilon_1)$. Так как $|r_{ij}|<\rho|r|_1$, то при $\varepsilon_1<b_{ij}$

$$v_{ij}(r_{ij})\geq(\rho|r|_1)^{-a}(b_{ij}-\varepsilon_1)\,. \qquad (2.9)$$

Если $v_{R_2}\equiv \operatorname{vrai}\inf_{|r_1|<R_2} v_{ij}(|r_1|)>0$ для любого $R_2$, то выбирая $R$ так, что $R^a>b_{ij}\,v_{R_2(\varepsilon_1)}^{-1}\rho^{-a}$ получим, что при $|r|_1>R$ (2.8) верно и при $|r_{ij}|<R_2(\varepsilon_1)$. Если $v_{R_2}=0$ при некотором $R_2$, то вместо (2.9) используем нера - венство $v_{ij}(|r_{ij}|)\geq 0$. Поэтому

$$W_\gamma=\frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in T_\gamma^a} v_{ij}(|r_{ij}|)\geq\rho^{-a}|r|_1^{-a}(e_\gamma^p-n_\gamma^2\varepsilon_1)\,.$$

Отсюда и из (2.8) следует, что

$$\frac{1}{2}\sum_{N_\alpha,N_\beta\in Z_p,\,\alpha\neq\beta} I_{\alpha\beta}(r)+\frac{1}{2}\sum_{N_\gamma\in Z_p\cap\mathcal{G}} W_\gamma\geq e_p(\rho|r|_1)^{-a}\cdot 2^{-1},$$

если $\varepsilon_1$ достаточно мало.

Для завершения доказательства остается оценить снизу функции $v_{ij}$, для которых $a_{ij}>a(p)$. Если $(i,j)\in N_\alpha\times N_\beta$ то для $r\in\mathcal{M}_p\setminus S_R$ в силу леммы 2.2 $v_{ij}(r_{ij})\geq -c(d_k|r|_1)^{-a-\delta}$, где $\delta>0$, $c=\max\{|B_{ij}|\}$. Если $i,j\in N_\gamma$, $N_\gamma\in Z_p\cap\mathcal{G}$, то $v_{ij}(|r_{ij}|)\geq 0^{(ij)}$. Поэтому при достаточно больших $R$

$$I_{Z_p}+W_{Z_p}\geq\frac{e_p}{4(\rho|r|_1)^a}\geq\frac{\gamma}{|r|_1^{a_0}}\,,$$

где

$$\gamma=4^{-1}\rho^{-a}\min_{Z_p\in\mathcal{O}(\mathfrak{S})}\{e_p\}\,.$$

## 3. Доказательство теоремы 1.1.

3.1. Согласно [5], предельный спектр оператора $H_0^\sigma$ состоит из всех точек луча $[\mu^\sigma, +\infty)$. Поэтому для доказательства теоремы 1.1. достаточно указать такое конечномерное подпространства $F^\sigma \subset \mathcal{G}^\sigma$, что для любой функции $\psi \in \mathcal{D}(H_0^\sigma)$, ортогональной к $F^\sigma$, выполняется неравенство:

$$(H_0^\sigma \psi, \psi) \geq \mu^\sigma \|\psi\|^2 .$$

Мы построим разложение единицы на $R_0$, с помощью которого квадратичная форма оператора $H_0^\sigma$ на функции $\psi \in \mathcal{D}(H_0^\sigma)$ представляется в виде суммы квадратичных форм на гладких функциях с носителями в множествах трех типов:

1. Ограниченная область $S_R$

П. Множества $\mathcal{M}_p \setminus S_R$, отвечающие распадениям $Z_p \in \mathcal{O}(\sigma)$

Ш. Множество $R_0 \setminus (\bigcup_{Z_p \in \mathcal{O}(\sigma)} \mathcal{M}_p \cup S_R)$

Квадратичная форма для множеств типа П оценивается с помощью леммы 2.3. Для множеств Щ оценка проводится с помощью теоремы об аппроксимации ( [5] и приложение П). В области $S_R$ оператор $H_0^\sigma$ сравнивается с оператором $-\Delta_0$. Линейная оболочка конечного числа собственных функций оператора $-\Delta_0$ (с граничными условиями Дирихле на $\partial S_R$ ) служит основой для построения искомого подпространства $F^\sigma$.

3.2. Пусть для $\psi \in C_0^2(R_0) \cap \mathcal{G}^\sigma$ и измеримого множества $\Omega \subseteq R_0$

$$L[\psi]_\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_0 \psi|^2 \, d\Omega + \int_\Omega V\,|\psi|^2 \, d\Omega$$

$$L[\psi] = L[\psi]_{R_0} = (H_0^\sigma \psi, \psi), \quad V = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{n} v_{ij}(|r_i - r_j|)$$

С помощью формулы Грина для области $\Omega \in R_0$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и функций $\varphi \in C_0^2(R_0)$, $w \in C^2(\bar{\Omega})$, таких, что $w(r)\psi(r) = 0$ для $r \in \partial\Omega$, нетрудно установить тождество

$$\int_\Omega w^2|\nabla_0\varphi|^2 d\Omega = \int_\Omega \{|\nabla_0(\varphi w)|^2 + |\varphi|^2 w\Delta_0 w\} d\Omega \ . \tag{3.1}$$

3.3. Введем функции $g^{(+)}(x), g^{(-)}(x) \in C^2$, $0 \le g^{(+)} \le 1$, $0 \le g^{(-)} \le 1$

$$g^{(+)}(x) = 0, x \le 1 \ , \ g^{(+)}(x) = 1, \ \ x \ge (1+\delta) \ ;$$

$$g^{(-)}(x) = 0, \ x \ge 1, \ g^{(-)}(x) = 1 \ , \ x \le (1-\delta) \ , \text{ где } 0 < \delta < 1 \ .$$

Очевидно, $g(x) = g^{(+)}(x) + g^{(-)}x \in C^2$ Пусть $g^{(+)}$ и $g^{(-)}$ таковы, что $f(x) = \sqrt{1-g^2(x)} \in C^2$ [3] . Положим

$$g_R^{(\pm)}(r) = g^{(\pm)}\left(\frac{|r|_1}{R}\right) \ , \ f_R(r) = f\left(\frac{|r|_1}{R}\right), \ g_R = g_R^{(+)} + g_R^{(-)} \ .$$

Очевидно $g_R^{(\pm)}, f_R \in C^2(R_0)$ и $g_R^{(+)2} + g_R^{(-)2} + f_R^2 = 1.$

Применяя тождество (3.1) с $w = g_R^{(\pm)}$ и $w = f_R$, $\varphi = \psi$ получим

$$L[\psi] = L[g_R^{(-)}\psi] + L[g_R^{(+)}\psi] + L[f_R\psi] + \frac{1}{2}\int|\psi|^2(g_R\Delta_0 g_R + \tag{3.2}$$

$$+ f_R\Delta_0 f_R)d\Omega \ .$$

Далее оцениваем слагаемые в правой части (3.2). Величина $L[g_R^{(+)}\psi]$ оценивается в п.п. 3.4–3.7, остальные величины–в п. 3.8.

3.4. Для $z_p \in A_k$ введем области $\mathcal{K}'_p$ , $\mathcal{K}''_p$ с помощью (2.1) и констант $C'_k$ , $C''_k$ таких, что $C'_k < C_k < C''_k$. Нетрудно проверить, что для множеств

$$\mathcal{M}''_p = \mathcal{K}''_p \setminus \bigcup_{z_q \in A_s, s<p} \mathcal{K}'_q$$

выполняются утверждением лемм 2.2 и 2.3 при некотором выборе $C'_k$, $C_k$ , $C''_k$ . Определим функции $w_k^{(+)}(x), w_k^{(-)}(x) \in C^2$, $0 \le w_k^{(+)} \le 1$, $0 \le w_k^{(-)} \le 1$

$$w_k^{(+)}(x) = 0, \ x \ge (1+C_k^2)^{-1/2}, \ w_k^{(+)}(x) = 1 \ , \ x < (1+C'^2_k)^{-1/2} \ ,$$

$$w_k^{(-)}(x)=0,\ x\leq(1+c_k^2)^{-1/2},\ w_k^{(-)}(x)=1,\ x>(1+c_k'^2)^{-1/2}.$$

Очевидно $w_k(x)=w_k^{(-)}(x)+w_k^{(+)}(x)\in C^2$. Пусть $w_k^{(+)}$ и $w_k^{(-)}$ таковы, что $y_k(x)=\sqrt{1-w_k^2(x)}\in C^2$.

Для каждого распадения $z_p\in\mathcal{A}_k$ положим

$$u_p^{(\pm)}(r)=w_k^{(\pm)}\left(\frac{|P_c^{z_p}r|_1}{|r|_1}\right),\ v_p(r)=y_k\left(\frac{|P_c^{z_p}r|_1}{|r|_1}\right),\ u_p(r)=u_p^{(+)}(r)+u_p^{(-)}(r)$$

Очевидно $u_p^{(\pm)}(r),\ v_p(r)\in C^2(R_0)$ и $u_p^{(+)2}+u_p^{(-)2}+v_p^2\equiv 1$. Отметим, что носители функций $u_p^{(-)}$ и $v_p$ находятся в $\mathcal{K}_p''$, а носитель $u_p^{(+)}$ — в $R_0\setminus\mathcal{K}_p$.

3.5. Положим

$$\hat{u}_1=g_R^{(+)};\ \hat{u}_s=g_R^{(+)}\prod_{z_p\in\mathcal{A}_l,\,2\leq l\leq s}u_p^{(+)} \qquad \text{при } s\geq 2. \tag{3.3}$$

Тогда из определения функций $u_p^{(\pm)}(r)$, $v_p(r)$ и утверждения П-леммы 2.2 следует, что при $s\geq 2$

$$\begin{aligned}\hat{u}_{s-1}^2&=\hat{u}_{s-1}^2\prod_{z_p\in\mathcal{A}_s}(u_p^{(+)2}+u_p^{(-)2}+v_p^2)=\\&=\hat{u}_{s-1}^2\sum_{z_p\in\mathcal{A}_s}(u_p^{(-)2}+v_p^2)+\hat{u}_{s-1}^2\prod_{z_p\in\mathcal{A}_s}u_p^{(+)2}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Действительно, если $z_p,\ z_q\in\mathcal{A}_s,\ z_p\neq z_q$, то $\operatorname{supp}\hat{u}_{s-1}u_p^{(-)}\in\mathcal{M}_p''\setminus S_R$, $\operatorname{supp}\hat{u}_{s-1}u_q^{(-)}\in\mathcal{M}_q''\setminus S_R$, следовательно, $\hat{u}_{s-1}u_p^{(-)}u_q^{(-)}=0$. Аналогично $\hat{u}_{s-1}u_p^{(-)}v_q=0$, $\hat{u}_{s-1}v_pv_q=0$. Отсюда

$$\hat{u}_{s-1}^2u_p^{(-)2}u_q^{(+)2}=\hat{u}_{s-1}^2(1-u_q^{(-)2}-v_q^2)u_p^{(-)2}=\hat{u}_{s-1}^2u_p^{(-)2},$$

$$\hat{u}_{s-1}^2v_p^2u_q^{(+)2}=\hat{u}_{s-1}^2v_p^2 \qquad \text{и т.д.}$$

Поэтому для $r\in\operatorname{supp}\hat{u}_{s-1}$

$$\sum_{z_p\in\mathcal{A}_s}(u_p^{(-)2}+v_p^2)+\prod_{z_p\in\mathcal{A}}u_p^{(+)2}\equiv 1. \tag{3.5}$$

3.6. Рассмотрим величину $L[\hat{U}_{s-1}\psi]$. В силу (3.5) имеем $L[\hat{U}_{s-1}\psi] \equiv$

$$\equiv \int \Big(\sum_{z_p \in A_s} (u_p^{(-)2} + v_p^2) + \prod_{z_p \in A_s} u_p^{(+)2}\Big)\Big(\frac{1}{2}|\nabla_0 \hat{U}_{s-1}\psi|^2 + V|\hat{U}_{s-1}\psi|^2\Big)\, d\Omega .$$

Применяя тождество (3.1) для $w = u_p^{(\pm)}$, $v_p$, $\varphi = \hat{U}_{s-1}\psi$, с помощью (3.3), (3.4) получим

$$L[\hat{U}_{s-1}\psi] = \sum_{z_p \in A_s} \left(L[u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi] + L[v_p \hat{U}_{s-1}\psi]\right) + \tag{3.6}$$
$$+ L[\hat{U}_s\psi] + \sum_{z_p \in A_s} \int |\hat{U}_{s-1}\psi|^2 \frac{1}{2}(u_p \Delta_0 u_p + v_p \Delta_0 v_p)\, d\Omega .$$

Используя (1.3), получим

$$L[u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi] = (H_0^{z_p} u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi,\ u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi) + \tag{3.7}$$
$$+ \frac{1}{2}\|\,|\nabla_c^{z_p} u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi|\,\|^2 + (I_{z_p} u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi,\ u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi) .$$

Заметим, что

$$\inf_{\varphi \in D(H_0^{G_p}(z_p)),\ \|\varphi\|=1} (H_0^{z_p}\varphi, \varphi) = \inf_{\varphi \in D(H_0^{G_p}(z_p)),\ \|\varphi\|=1} ((H_0^{z_p} - W_{z_p})\varphi, \varphi) . \tag{3.8}$$

Равенство (3.8) следует из того, что $W_{z_p} \geq 0$ и для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset D(H_0^{G_p}(z_p))$, минимизирующей форму $((H_0^{z_p} - W^{z_p})\varphi, \varphi)$, $(W_{z_p}\varphi_m, \varphi_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Пусть $z_q = g z_p$, где $g \in S(N)$. Тогда, если $z_p \in A_s$, то и $z_q \in A_s$. Отсюда следует, что если $\psi \in \mathcal{G}^{G}$, то и $\hat{U}_{s-1}\psi \in \mathcal{G}^{G}$. Поэтому симметрия функции $u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi$ и $v_p \hat{U}_{s-1}\psi$ относительно группы $G(z_p)$ та же, что и функции $\psi$.

Учитывая это, из (3.7), (3.8) и леммы 2.3 получим

$$L[u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi] \geq \mu^{G} \|\hat{U}_{s-1} u_p^{(-)}\psi\|^2 + \gamma \int \frac{|u_p^{(-)}\hat{U}_{s-1}\psi|^2}{|r|_1^{a_0}}\, d\Omega . \tag{3.9}$$

Аналогично

$$L[\hat{U}_{s-1}v_p\psi] \geq \mu^{\sigma}\|\hat{U}_{s-1}v_p\psi\|^2 + \gamma\int\frac{|v_p\hat{U}_{s-1}\psi|^2}{|r|_1^{a_0}}\,d\Omega\,. \tag{3.10}$$

Так как $v_p=\sqrt{1-u_p^2}$, то $u_p\Delta_0 u_p + v_p\Delta_0 v_p = -(|\nabla_0 u_p|^2+|\nabla_0 v_p|^2)$. Используя равенства $\nabla_0|r|_1 = r|r|_1^{-1}$, $\nabla_0|P_c^{z_p}r|_1 = (P_c^{z_p}r)|P_c^{z_p}r|_1^{-1}$, получим

$$u_p\Delta_0 u_p + v_p\Delta_0 v_p \geq -((u_p')^2+(v_p')^2)\left|\nabla_0\frac{|P_c^{z_p}r|_1}{|r_1|}\right|_1^2 \geq -2\gamma_1|r|_1^{-2} \tag{3.11}$$

где

$$\gamma_1 = 2\max\left((u_p')^2+(v_p')^2\right).$$

Далее

$$\gamma_2, \gamma_3, \ldots > 0$$

Из (3.6) в силу (3.4), (3.9)-(3.11) следует оценка

$$L[\hat{U}_{s-1}\psi] \geq \mu^{\sigma}(\|\hat{U}_{s-1}\psi\|^2 - \|\hat{U}_s\psi\|^2) + L[\hat{U}_s\psi] + \\ +\gamma\int\frac{|\hat{U}_{s-1}\psi|^2-|\hat{U}_s\psi|^2}{|r|_1^{a_0}}\,d\Omega - \gamma_2\int\frac{|g_R^{(+)}\psi|^2}{|r|_1^2}\,d\Omega\,. \tag{3.12}$$

Пусть $s_0=\max\{s\,;A_s\neq\Phi\}$ и $\hat{U}=\hat{U}_{s_0}$. Последовательно применяя неравенство (3.12) с $s=2,\ldots,s_0$ получим

$$L[g_R^{(+)}\psi] \geq \mu^{\sigma}(\|g_R^{(+)}\psi\|^2 - \|\hat{U}\psi\|^2) + L[\hat{U}\psi] + \\ +\gamma\int\frac{|g_R^{(+)}\psi|^2-|\hat{U}\psi|^2}{|r|_1^{a_0}}\,d\Omega - \gamma_3\int\frac{|g_R^{(+)}\psi|^2}{|r|_1^2}\,d\Omega\,. \tag{3.13}$$

3.7. В силу свойств $v_{ij}$ для любой функции $\varphi\in C_0^2(R_0)$ справедливо неравенство [4]

$$L[\varphi] \geq \gamma_4\||\nabla_0\varphi|\|^2 - \gamma_5\gamma_4^{-1}\|\varphi\|^2\,. \tag{3.14}$$

Пусть $B=\{\varphi\,;\ \varphi\in C_0^2(R_0),\ \||\nabla_0\varphi|\|^2<\gamma_5\gamma_4^{-1},\ \|\varphi\|\}$ .
Применяя теорему об аппроксимации (Приложение 2) по произвольному $\varepsilon>0$ укажем $\bar{A}>0$ и для каждой функции $\varphi\in B$ числа $A_\varepsilon(\varphi)$, $0<A_\varepsilon(\varphi)<\bar{A}$ так, что

$$L[\varphi]\geq\sum_{z_p}\mu_p^{\sigma}\|\varphi\|^2_{\Omega_p(A_\varepsilon(\varphi))}-\varepsilon\|\varphi\|^2\ . \qquad (3.15)^{+)}$$

Если $\varphi\in C_0^2(R_0)$, $\varphi\bar{\in} B$, то (3.15) следует из (3.14). Положим в (3.15) $\varphi=\hat{U}\psi$. Выбирая $R$ согласно лемме 2.2. и учитывая, что тогда $\hat{U}\psi=0$ при $\tau\in\bigcup_{z_p\in\mathcal{O}(\sigma)}\mu_p$ получим

$$L[\hat{U}\psi]\geq\tilde{\mu}\|\hat{U}\psi\|^2-\varepsilon\|\hat{U}\psi\|^2 \qquad (3.16)$$

где $\tilde{\mu}=\min\{\mu_p^{\sigma}:z_p\bar{\in}\mathcal{O}(\sigma)]$. При $\varepsilon<\frac{\tilde{\mu}-\mu^{\sigma}}{2}$, $R^{-a_0}\gamma<\frac{\tilde{\mu}-\mu^{\sigma}}{2}$ из (3.13), (3.16) следует оценка

$$L[g_R^{(+)}\psi]\geq\mu^{\sigma}\|g_R^{(+)}\psi\|^2+\gamma\int\frac{|g_R^{(+)}\psi|^2}{|\tau|_1^{a_0}}\,d\Omega-\gamma_3\int\frac{|g_R^{(+)}\psi|^2}{|\tau|_1^2}\,d\Omega\ .$$

Так как условию 1 теоремы 1.1. $a_0<2$, то при достаточно большом $R$

$$L[g_R^{(+)}\psi]\geq\mu^{\sigma}\|g_R^{(+)}\psi\|^2+\frac{\gamma}{2}\int\frac{|g_R^{(+)}\psi|^2}{|\tau|_1^{a_0}}\,d\Omega\ . \qquad (3.17)$$

3.8. Оператор $\Delta_0$, определенный на функциях $\varphi\in C_0^2(S_{R'})\cap\mathcal{Y}^{\sigma}$, где $R'=(1+\delta)R$, полуограничен снизу и его самосопряженное расширение имеет чисто дискретный спектр, накопляющийся к $+\infty$. Поэтому по произвольному $\gamma_6>0$ и $\gamma_4$, $\gamma_5$ из (3.14), можно указать такое конечномерное подпространство $B^{\sigma}\subset\mathcal{Y}^{\sigma}$, что для $\varphi\perp B^{\sigma}$, $\varphi\in C_0^2(S_{R'})\cap\mathcal{Y}^{\sigma}$ выполняется неравенство

$$(-\Delta_0\varphi,\varphi)_{S_{R'}}=\||\nabla_0\varphi|\|^2_{S_{R'}}\geq\frac{\mu^{\sigma}+\gamma_5+\gamma_6}{\gamma_4}\|\varphi\|^2_{S_{R'}}\ . \qquad (3.18)$$

Пусть $F^{\sigma}=g_R^{(-)}B^{\sigma}+f_RB^{\sigma}$. Тогда, если $\psi\in C_0^2(R_0)\cap\mathcal{Y}^{\sigma}$ и $\psi\perp F^{\sigma}$, то $f_R\psi$, $g_R^{(-)}\psi\perp B^{\sigma}$, $g_R^{(-)}\psi$, $f_R\psi\in C_0^2(S_{R'})\cap\mathcal{Y}^{\sigma}$ и в силу (3.14) (3.18)

---

+) Здесь теорема об аппроксимации применена к функции $\varphi\|\varphi\|^{-1}\in B_c$ (Приложение П).

$$L[g_R^{(-)}\psi]+L[f_R\psi]\geq(\mu^\sigma+\gamma_6)(\|g_R^{(-)}\psi\|^2+\|f_R\psi\|^2). \quad (3.19)$$

Как и ранее, получим

$$\frac{1}{2}\int|\psi|^2(f_R\Delta_0 f_R+g_R\Delta_0 g_R)d\Omega\geq-\gamma_7\int\limits_{|r|_1\geq(1-\delta)R}\frac{|\psi|^2}{|r|_1^{-2}}\,d\Omega\,. \quad (3.20)$$

Выбирая сначала $R$ так, что $R^{2-a_0}>4\gamma_7\gamma_6^{-1}$, а затем $\gamma_6$ так, что $\gamma_6>2\gamma_7(1-\delta)^{-2}R^{-2}$, из (3.2) в силу (3.17), (3.19), (3.20) получим для $\psi\in C_0^2(R_0)\cap\mathcal{G}^\sigma$, $\psi\perp F^\sigma$

$$L[\psi]\geq\mu^\sigma\|\psi\|^2+J[\psi]\quad,$$

где

$$J[\psi]=\frac{1}{2}\gamma_6(\|g_R^{(-)}\psi\|^2+\|f_R\psi\|^2)+\frac{\gamma}{4}\int\frac{|g_R^{(+)}\psi|^2}{|r|_1^{a_0}}d\Omega\,.$$

Следовательно, при $\psi\perp F^\sigma$, $\psi\in C_0^2(R_0)\cap\mathcal{G}^\sigma$:

$$L[\psi]>\mu^\sigma\|\psi\|^2\,.$$

Теорема 1.1. доказана.

3.9. Замечание 1. Число $\mu^\sigma$ не может быть собственным значением бесконечной кратности оператора $H_0^\sigma$.

Действительно, $J[\psi]>0$ при $\|\psi\|\neq0$ .

Замечание 2. Дискретный спектр оператора $H_0^\sigma$, $\sigma=(k,\ell,\omega)$, пуст, если $\ell$ достаточно велико. При этом число $\mu^\sigma$ не может быть собственным значением $H_0^\sigma$.

Как и в [3] утверждение следует из очевидного соотношения

$$\inf_{\varphi}(-\Delta_0\varphi,\varphi)\xrightarrow{\ }+\infty \quad \text{при } \ell\to+\infty,$$
$$\|\varphi\|=1,\quad \varphi\in C_0^2(S_{R'})\cap\mathfrak{H}^{\sigma}.$$

П р и л о ж е н и е 1.

1.1. Рассмотрим оператор энергии относительного движения системы $n$ частиц с зарядами $e_1,\dots,e_n$

$$H_0=-\frac{1}{2}\Delta_0+\sum_{i<j}^{1,n} e_i e_j\, v(r_{ij}).$$

Функция $v(r_1)$ удовлетворяет условиям
a) $v(r_1)\in\mathcal{L}^2_{loc}$, в) $v(r_1)\to 0$ при $|r_1|\to\infty$, c) $v(r_1)\geq 0$.
Установим некоторые свойства собственных значений и нижней грани оператора $H_0$, как функций от величин $e_i$.

1.2. Пусть $A$ и $B$ – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, с общей областью определения $D$, всюду плотной в $\mathfrak{H}$. Пусть $x\in[x_1,x_2]$

$$\mu(x)=\inf_{\psi\in D,\|\psi\|=1}((A+xB)\psi,\psi).$$

Лемма 1.1. Если для $x\in[x_1,x_2]$ оператор $(A+xB)$ ограничен снизу, то $\mu(x)$ выпукла вверх на $[x_1,x_2]$, и, следовательно, непрерывна.

Доказательство.

Так как $A$ и $B$ определены на $D$, то

$$\mu(x)=\inf_{\psi\in D,\|\psi\|=1}\{(A\psi,\psi)+x(B\psi,\psi)\}.$$

Так как $\mu(x)$ ограничена, то $-\mu(x)$ выпукла вниз как верхняя огибающая семейства выпуклых вниз функций [7].

1.3. Пусть $H_0(e^0)$ имеет дискретное собственное значение $\lambda^0$. Из неравенства подчиненности для $v_{ij}$

[4],[8], следует, что $H_0(\ell)$ имеет собственное значение $\lambda(\ell)$ в некоторой окрестности $U$ точки $\ell^0$ и $\lambda(\ell)$ – аналитическая функция при $\ell \in U$.

<u>Лемма 1.2.</u> Для любой ветви $\lambda(\ell)$ имеют место неравенства $\left(\ell_i \frac{\partial\lambda}{\partial\ell_i}\right)\Big|_{\ell_i=\ell_i^0}<0$, если $\ell_i^0 \neq 0$, $i=1,\dots,n$.

<u>Доказательство</u>: Согласно [8]

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\ell_i}\Big|_{\ell_i=\ell_i^0}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \ell_j^0 (v(r_{ij})\varphi_0,\varphi_0),$$

где $\varphi_0$ – любая нормированная собственная функция оператора $H_0(\ell^0)$, отвечающая осбственному значению $\lambda(\ell^0)=\lambda^0$. В силу (1.3)

$$\lambda^0=(H_0(\ell^0)\varphi_0,\varphi_0)=(H_0^{Z_p}\varphi_0,\varphi_0)+(H_C^{Z_p}\varphi_0,\varphi_0)+(I_{Z_p}\varphi_0,\varphi_0).$$

Отсюда при $Z_p=\{N\setminus\{i\},\{i\}\}$ получим

$$\lambda^0 \geqslant \mu+\ell_i^0\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \ell_j^0(v(r_{ij})\varphi_0,\varphi_0),$$

где $\mu>\lambda^0$. Поэтому

$$\ell_i^0\frac{\partial\lambda}{\partial\ell_i}\Big|_{\ell_i=\ell_i^0}<0.$$

1.4. Пусть $\mu(\ell)$ – нижняя грань оператора $H_0(\ell)$ в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0)$.

<u>Лемма 1.3.</u> Функция $\mu(\ell_i)=\mu(\ell_1^0,\dots\ell_{i-1}^0,\ell_i,\ell_{i+1}^0,\dots)$ не возрастает (не убывает) при $\ell_i>0$ $(\ell_i<0)$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\ell_i>0$. Если $n=1$, то $\mu(\ell_i)=0$. Допустим, что лемма верна для всех $n<n_0$. В силу леммы 1.1. функция $\mu(\ell_i)$ выпукла вверх и поэтому достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\ell_i^1$, $\ell_i^1<\varepsilon$, такое, что $\mu(\ell_i)$ не возрастает в точке $\ell_i^1$. Пусть оператор $H_0(\ell_i)$ не имеет дискретного спектра для всех $\ell_i\in(0,\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon>0$. Тогда

$$\mu(\ell_i)=\min_{Z_p}\left\{\sum_{N_\alpha\in Z_p}\mu_\alpha\right\},$$

где $\mu_\alpha$ – нижняя грань оператора $H_0(N_\alpha)$, которая не возрастает по предложению индукции. В противном случае найдется последовательность $\{\ell_i^{(k)}\}, \ell_i^{(k)} \to 0$, $k \to \infty$, такая, что $H_0(\ell_i^{(k)})$ имеет непустой дискретный спектр. Тогда $\mu(\ell_i^{(k)})$ является собственным значением оператора $H_0(\ell_i^{(k)})$ и убывает в точках $\ell_i^{(k)}$ в силу леммы 1.2.

## Приложение П.

Сформулируем теорему об аппроксимации, которая используется в п. 3.7.

Пусть $B_c = \{\psi, \psi \in C_0^2(R_0) \cap \mathcal{Z}^6, \; \| |\nabla_0 \psi|_1 \|^2 + \|\psi\|^2 < C\}$

Теорема П.1. Для любых $\varepsilon > 0$, $A_0 > 0$, можно указать число $\bar{A} > A_0$, для каждой функции $\psi \in B_c$ числа $A(\psi)$, $A_0 < A(\psi) < \bar{A}$, и функции $\psi_{Z_p} \in C_0^2(R_0)$ для всех $Z_p$ так, что

1. $|(H_0^{Z_p}\psi_{Z_p}, \psi_{Z_p})|_{R_0 \setminus \Omega_p(A(\psi))} + \|\psi_{Z_p}\|^2_{R_0 \setminus \Omega_p(A(\psi))} < \varepsilon$

2. $\psi_{Z_p} = \psi, \; r \in \Omega_p(A(\psi))$.

3. Функции $\psi_{Z_p}$ и $\psi$ обладают одинаковой симметрией относительно группы $G(Z_p)$.

Данная теорема доказывается аналогично теореме 1 [5]. При этом вместо функционала $J(\psi, \Omega)$ ([5], стр. 81) следует использовать функционал

$$J_1(\psi, \Omega) = \| |\nabla_0 \psi|_1 \|^2_\Omega + \|\psi\|^2_\Omega .$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. J.Uchiyama, Publ.of the Res.Inst.for Math.Sciences, Kyoto Univ.,ser.A,vol.5, n.1, 1969.
2. J.Uchiyama, Publ.of the Res.Inst.for Math.Sciences, Kyoto Univ.,ser.A, vol.6,n.1,1970.
3. Г.М.Жислин, ТМФ. т.УП, № 3, 1970.
4. K.Jörgens, Universität Heidelberg, preprint, 1964.
5. А.Г.Сигалов, И.М.Сигал, ТМФ, Т. У, № 1, 1970.
6. B.Simon, HPA, 1970, 43, n.6-7,607-630.
7. Н.Бурбаки, Теория функций вещественной переменной, "Наука", М., 1965.
8. Ф.Рисс и С.-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М.
9. Г.М.Жислин, А.Г.Сигалов, Изв. АН СССР, Сер. матем. т.29 (1965), 835-860.