

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 30



ИИРФИ

В.М.Фортус, Г.И.Фрейдман

ОДНОРЕЗОНАТОРНЫЙ
ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ СВЕТА

г. Горький
1 9 7 2

Теория параметрического усиления света в кристаллах с квадратичной нелинейностью разработана достаточно подробно (см. например [1,2]). В то же время в литературе по существу не рассматривались^{*)} вопросы связанные с усилением света регенеративными и сверхрегенеративными параметрическими усилителями. Интерес к этим вопросам связан не только с возможностью получения высоких коэффициентов усиления как на сигнальной, так и на преобразованной частоте, но с проблемой синхронизации частоты параметрических генераторов света внешним сигналом [5].

В настоящей работе рассматривается нелинейный режим работы однорезонаторного параметрического усилителя света. В приближении взаимодействия плоских волн для случая близких к единице коэффициентов отражения зеркал резонатора без учета волновой расстройки найдены стационарные состояния усилителя и исследована их устойчивость. Исследована, кроме того, устойчивость стационарных состояний однорезонаторного параметрического генератора света относительно возмущений близкой частоты.

§ 1. Исходные уравнения

Укороченные уравнения для взаимодействующих в нелинейном кристалле волн удобно записать, введя амплитуды E_i ($i=1,2,3$) нормированные так, что их квадраты модулей пропорциональны плотности потока квантов излучения соответствующей частоты. Кроме того, эти плотности удобно нормировать на плотность потока квантов излучения накачки на входе в кристалл. Тогда укороченные уравнения

^{*)} Авторам известны лишь две работы [3,4], в которых затрагиваются эти вопросы.

примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial z} + s_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} + \alpha_1 E_1 &= i \gamma_0 E_3 E_2^* \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} + s_2 \frac{\partial E_2}{\partial t} + \alpha_2 E_2 &= i \gamma_0 E_3 E_1^* \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} + s_3 \frac{\partial E_3}{\partial t} + \alpha_3 E_3 &= i \gamma_0 E_1 E_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $s_i = v_i^{-1}$ - величина лучевого вектора i -ой волны, обратно пропорциональная ее групповой скорости; α_i - коэффициенты затухания волн; $\gamma_0 = \bar{\chi} E_{30}$ - коэффициент взаимодействия волн, пропорциональный модулю амплитуды волны накачки E_{30} падающей на нелинейный кристалл.

Зеркала резонатора будем считать отражающими только волну частоты ω_2 (резонансная волна) с коэффициентами отражения близкими к единице. Для простоты будем также считать зеркала непоглощающими, так что граничные условия на правом и левом зеркалах можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_{-2}(l_+; t) &= -\sqrt{R_+} E_2(l_+; t) e^{2i k_2^0 l_+} \\ E_2(l_-; t) &= i \sqrt{1-R_-} e_{20}(t) E_{-2}(l_-; t) e^{2i k_2^0 l_-} \end{aligned} \quad (1.2a)$$

Здесь R_{\pm} - коэффициенты отражения выходного и входного зеркал; $k_2^0 l_{\pm}$ - набег фазы волны с частотой синхронизма ω_2^0 от входа в кристалл ($z=0$) до выходного ($z=l_+$) и входного ($z=-l_-$) зеркал; $e_{20}(t)$ - амплитуда волны сигнала, падающего на зеркало при $z=-l_-$; $E_{-2}(z; t)$ - амплитуда волны, бегущей в ($-z$) направлении. Учитывая, что в нелинейном кристалле с накачкой взаимодействует только волна, бегущая в прямом направлении, граничные условия (1.2) легко записать в виде соотношения между амплитудой $E_2(0; t) = E_2(t)$ на входе и амплитудой $E_2(d; t)$ на выходе нелинейного кристалла:

$$E_2(t) = e^{-i \Delta_2} R E_2(d; T - \Delta t) + i(1-R_-)^{1/2} e_{20}(t) \quad (1.26)$$

Здесь величину $R = (R_+, R_-)$ будем называть коэффициентом передачи; величина $\Delta_2 = 2[K_2^0(l_+ + l_-) - \pi m_0]$ связана с расстройкой $\Delta\omega_{20}$ частот синхронизма ω_2^0 от ближайшей к ней собственной частоты резонатора ω_{20} соотношением $\Delta_2 = 2\delta\omega_{20}S_2(l_+ + l_-)$; $T/2$ - время пробега резонансной волны от входного до выходного зеркала; $\Delta t = S_2 d$ - время ее пробега через кристалл.

§ 2. Стационарные состояния параметрического усилителя и генератора

Рассмотрение стационарных состояний параметрического усилителя и генератора проведем для простейшего случая, когда частоты $\omega_{1,2}$ возбуждаемых волн отличаются от частот синхронизма $\omega_{1,2}^0$ на величину много меньшую ширины полосы синхронизма $2\delta\Omega = 4\gamma_0/|S_1 - S_2|$ [2]. В этом случае зависимость амплитуды возбуждаемых волн от частоты резонансной волны ω_2 определяется в основном разностью $\Delta\Omega_m = \omega_2 - \omega_{2m}$ между частотой сигнала $\omega_2 = \omega_2^0 + \Omega$ и ближайшей к ω_2 собственной частотой ω_{2m} моды резонатора. Поэтому при определении амплитуд стационарных состояний, в уравнениях (1.1) можно пренебречь расстройкой синхронизма ($\Delta k = (S_1 - S_2)\Omega$). В этом приближении амплитуды стационарных состояний можно искать в виде

$$E_{1,2}(t; z) = u_{1,2}(z) \exp[\pm i\Omega_m(t - \bar{z})] \quad (2.1)$$

$$E_3(t; z) = u_3(z)$$

$$\text{где } \bar{z} = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

+) Следует заметить, что, хотя на величину амплитуд стационарных состояний отброшенные величины влияют слабо, при рассмотрении устойчивости стационарных состояний генератора такое приближение может оказаться справедливым только для частоты ω_2 стационарного колебания ближайшей к частоте синхронизма ω_2^0 .

Поскольку коэффициенты отражения зеркал для резонансной волны с частотой ω_2 близки к единице, ее амплитуду $U_2(z)$ внутри нелинейного кристалла в нулевом приближении можно считать равной амплитуде U_{20} на входе в кристалл. Это позволяет получить простые выражения для амплитуды волны накачки и нерезонансной волны:

$$U_3(z) = \cos \Lambda_0 z; \quad U_1(z) = i \frac{U_{20}^*}{|U_{20}|} \sin \Lambda_0 z. \quad (2.2)$$

Здесь $\Lambda_0 = \gamma_0 |U_{20}|$ — величина обратная расстоянию эффективного взаимодействия излучения накачки и холостой волны в поле U_{20} резонансной волны. Подставляя (2.2) в уравнение для амплитуды резонансной волны найдем, что в первом приближении по коэффициенту усиления $(\gamma_0 d)^2 / 2 \ll 1$ ее изменение вдоль z определяется выражением:

$$U_2(z) = U_{20} \left[1 + \frac{(\gamma_0 z)^2}{2} \frac{\sin^2 \Lambda_0 z}{(\Lambda_0 z)^2} \right] = U_{20} V_2(z) \quad (2.3)$$

Из граничных условий (1.2), или (1.2а) и соотношения (2.3) получим уравнение, определяющее амплитуду U_{20} :

$$U_{20} = \frac{i\sqrt{1-R} e_{20}}{1-\sqrt{R} V_2(d) \exp(-i\Delta)} = e_{20} \frac{i\sqrt{1-R} \exp(i\Delta)}{(1-\sqrt{R}) \left(\frac{\exp(i\Delta) - \sqrt{R}}{1-\sqrt{R}} - \frac{\rho \sin^2 x}{P_n x^2} \right)} \quad (2.4)$$

где $\Delta = \Delta \Omega_m T$ — расстройка от резонанса; $\frac{\rho}{P_n} = \frac{(\gamma_0 d)^2 \sqrt{R}}{2(1-\sqrt{R})}$ — отношение мощности накачки ρ к ее пороговому значению; $x = \gamma_0 d |U_{20}|$. Если сигнал на входе в усилитель равен нулю ($e_{20} = 0$), то амплитуда автоколебаний определяется, как видно из (2.4) или (1.2а) и (2.3) известным [6] уравнением:

$$1 = \frac{\rho}{P_n} \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (2.5)$$

Рассматривая работу параметрического усилителя в регенеративном и сверхрегенеративном режимах интересной найти зависимость коэффициента усиления $G_2 = \frac{(1-R_-)(1-R_+)}{|e_{20}|^2}$ прошедшего через усилитель сигнала и коэффициента преобразования сигнала на частоте ω_2 в излучение разностной частоты ($\omega_1 = \omega_n - \omega_2$) $G_1 = (|U_1(d)|/|e_{20}|)^2$ от отношения P/P_n , расстройки от резонанса в единицах ширины линии резонатора $\Delta_R = \Delta/(1-\sqrt{R})$ и величины сигнала. Величину сигнала при этом удобно характеризовать отношением потока числа квантов сигнала n_{20} к пороговому потоку числа квантов излучения накачки n_{3n} . Из (2.4) следует, что указанные выше зависимости определяются соотношениями:

$$G_2 = \frac{(1-R_-)(1-R_+)}{(1-\sqrt{R})^2} G ; G_1 = 2G \left(\frac{1-R_-}{1-\sqrt{R}} \right) \frac{P}{P_n} \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (2.6)$$

$$x = \sqrt{2 \bar{n}_{20} G} ; G = \left\{ \left[1 - \frac{P}{P_n} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right]^2 + \Delta_R^2 \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

где $\bar{n}_{20} = \frac{n_{20}}{n_{3n}} \left(\frac{1-R_-}{1-\sqrt{R}} \right)$ — относительная величина потока числа квантов сигнала.

Как видно из (2.6), в общем случае коэффициенты усиления и преобразования зависят от соотношения коэффициентов отражения входного R_- и выходного R_+ зеркал. Величина G очевидно имеет смысл коэффициента усиления при одинаковых коэффициентах отражения ($R_- = R_+ = \sqrt{R}$).

Зависимость коэффициента усиления G от расстройки Δ_R при различных значениях P/P_n и относительной величины сигнала \bar{n}_{20} легко построить из уравнений (2.7) (см. рис. 1). Нетрудно видеть, что при мощности излучения накачки меньшей пороговой ($P/P_n < 1$) и малой величине \bar{n}_{20} зависимость $G(\Delta_R)$ совпадает с обычной резонансной кривой, ширина которой в $(1-P/P_n)$ раз меньше ширины линии резонатора. При этом максимальное значе-

ние коэффициента усиления равно $\left(1 - \frac{P}{P_n} \frac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{-2}$. С увеличением интенсивности сигнала резонансная кривая несколько деформируется не меняя качественно своей формы. Не останавливаясь на этом случае подробно, заметим лишь, что при $P/P_n < 1$ с увеличением интенсивности сигнала резонансная кривая расширяется, а максимальное значение коэффициента усиления уменьшается (см. рис. 1а).

В суперрегеративном режиме ($P/P_n > 1$) характер резонансной кривой качественно меняется. Анализ зависимости (2.7) (см. рис. 1б) показывает, что при достаточно малой величине сигнала резонансная кривая в некоторой области расстройек Δ_R неоднозначна. Точки, в которых касательная к резонансной кривой вертикальна, лежат в плоскости ($\Delta_R; x^2 = 2\bar{n}_{20}G$) на кривой (1) (см. рис. 1б), определяемой уравнением:

$$\Delta_R^2 = \left[\frac{P}{P_n} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 - \left(1 - \frac{P}{P_n} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

Учитывая (2.8) и (2.7), можно вычислить как максимальное значение сигнала, при котором резонансная кривая еще остается неоднозначной, так и область значений P/P_n и \bar{n}_{20} , в которой резонансная кривая неоднозначна уже при нулевой расстройке. Не останавливаясь подробно на анализе разницы между тремя стационарными состояниями, заметим лишь, что в двух нижних стационарных состояниях при нулевой расстройке фаза поля в резонаторе сдвинута на π относительно фазы поля в верхнем стационарном состоянии.

Более существенным является то обстоятельство, что, как будет показано в § 2, верхняя часть кривой вертикальных касательных (2.8) совпадает с одной ветвью границы устойчивости (второй ветвью является прямая $\left(1 - \frac{P}{P_n} \frac{\sin 2x}{2x}\right) = 0$ (прямая 2 на рис. 1б)). Таким образом, реализуемыми являются лишь состояния соответствующие верхним частям

резонансных кривых до первой точки с вертикальной касательной.

Ширина полосы захвата Δ_R и значение максимального коэффициента усиления G_{\max} при заданном превышении над порогом зависит от интенсивности сигнала. В общем случае эту зависимость можно получить лишь численными расчетами (см. рис. 2). Однако при достаточно малом уровне сигнала ($\bar{n}_{20} \ll 1$), как нетрудно показать из (2.7) (см. также рис. 2), справедливы следующие простые приближенные формулы;

$$\Delta_R = G_{\max}^{-1/2}; \quad G_{\max} = \chi_{\max}^2 (P/P_n) \cdot (2\bar{n}_{20})^{-1} \quad (2.9)$$

Здесь $\chi_{\max} \left(\frac{P}{P_n} \right)$ (см. рис. 2б) определяется из уравнения (2.5).

Из (2.9) видно, что, как и следовало ожидать, ширина полосы захвата параметрического генератора сужается при уменьшении уровня сигнала, а значение максимального коэффициента усиления увеличивается. При этом коэффициент преобразования равен удвоенному коэффициенту усиления, а поле на выходе усилителя остается постоянным, равным примерно полю на выходе генератора с таким же превышением над порогом. Это, естественно, перестает быть справедливым при мощности накачки равной пороговому значению, когда для коэффициента усиления справедливо приближенное выражение $G = \frac{1}{\sqrt{2\bar{n}_{20}}} \left[\sqrt{1 + \frac{\Delta_R^2}{3\bar{n}_{20}}} - \frac{\Delta_R}{2\sqrt{2\bar{n}_{20}}} \right]$. В этом случае коэффициент усиления также увеличивается при уменьшении сигнала, но медленнее, так что интенсивность усиливаемого поля на выходе не постоянна, а пропорциональна (при $\Delta_R = 0$) корню квадратному из интенсивности входного сигнала.

§ 3. Устойчивость стационарных состояний

При исследовании устойчивости стационарных состояний выделим амплитудные и фазовые возмущения, т.е. считая возмущения фаз малыми будем искать амплитуды полных

ϵ_i в виде:

$$E_1 = u_1(z) [1 + b_1(z, t) + i\psi_1(z, t)] \exp[i\Omega(t - \bar{s}z)] \quad (3.1)$$

$$u_2 = u_2(z) [1 + b_2(z, t) + i\psi_2(z, t)] \exp[-i\Omega(t - \bar{s}z)]$$

$$E_3 = u_3(z) [1 + b_3(z, t) + i\psi_3(z, t)]$$

При нахождении изменений возмущений амплитуд и фаз в нелинейном кристалле удобно ввести комплексные амплитуды возмущений $a_i(z, t)$:

$$a_1(z, t) = u_1(z) [b_1(z, t) + i\psi_1(z, t)] \exp[i\Omega(t - \bar{s}z)] \quad (3.2)$$

$$a_2(z, t) = u_2(z) [b_2(z, t) + i\psi_2(z, t)] \exp[-i\Omega(t - \bar{s}z)]$$

$$a_3(z, t) = u_3(z) [b_3(z, t) + i\psi_3(z, t)]$$

Для этих комплексных амплитуд уравнения, как нетрудно видеть из (3.2), (1.1), имеет вид^{†)}

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} + s_1 \frac{\partial a_1}{\partial t} + \alpha_1 a_1 - i\gamma_0 u_2^*(z) a_3 = i\gamma_0 u_3(z) a_3^*$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} + s_3 \frac{\partial a_3}{\partial t} + \alpha_3 a_3 - i\gamma_0 u_2(z) a_1 = i\gamma_0 u_1(z) a_2 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial z} + s_2 \frac{\partial a_2}{\partial t} + \alpha_2 a_2 = i\gamma_0 [u_3(z) a_1^* + a_3 u_1^*(z)]$$

В общем виде эти уравнения с переменными коэффициентами решить не удастся. Приближенные же решения (3.3) легко в принципе найти, воспользовавшись тем, что при близких к единице значениях коэффициентов отражения R_{\pm} зеркал резонатора для второй (резонансной) волны ее амплитуда $u_2(z)$ в стационарном состоянии мало меняется вдоль z ($u_2(z) = u_{20} (1 + \frac{(\bar{s}z)^2 \sin^2 x}{2x^2}) \approx u_{20}$), а амплитуда возмущения этой волны $a_2(z, t)$ мало отличается от свободной

^{†)} Если как и при нахождении стационарных состояний пренебречь слагаемыми $(\bar{s} - s_{1,2}) \Omega_0$.

волны $(a_2(z,t) = a_2(t - z v_2^{-1}) + \Delta a_2(z,t))$, где $|\Delta a_2(z,t)| \ll |a_2|$.

Пренебрегая в нулевом (по коэффициенту усиления $(\sigma_0 d)^2/2$) приближении разницей между U_{20} и $U_2(z)$, а также величиной $\Delta a_2(z,t)$, из (3.3а) (3.3б) легко выразить возмущения $a_1(z,t)$; $a_3(z,t)$ через основную часть возмущения резонансной волны (см. приложение), и затем из (3.3в) найти поправку $\Delta a_2(z,p)$ первого приближения. При этом (см. приложение) для изображения $\Delta a_2(z,p) = \int_0^\infty dt e^{pt} \Delta a_2(z,t)$ получается следующее выражение:

$$\Delta a_2(z,p) = [a_2(p) I_1(p,z) + a_2^*(p) I_2(p,z)] \left(\frac{\sigma_0 d}{z}\right)^2 e^{i q_2 d} \quad (3.4)$$

Здесь $a_2(p) = \int_0^\infty dt e^{pt} a_2(t)$; $q_2 = i(s_{2p} + \alpha_2)$, а зависимости $I_1(p,z)$, $I_2(p,z)$ определяются довольно громоздкими выражениями (п.4).

Соотношение (3.4) позволяет значения возмущений $a_2(d;t)$ на выходе нелинейного кристалла выразить через значения возмущений $a_2'(t)$; $\varphi_2(t)$ на его входе, и, с помощью граничных условий на зеркалах, получить уравнения для амплитудных и фазовых возмущений $a_2'(t)$ и $\varphi_2(t)$ резонансной волны на входе в нелинейный кристалл.

В общем случае исследовать эти уравнения не удается. Поэтому ограничимся рассмотрением достаточно медленных возмущений, характерные частоты которых много меньше $\Delta \omega_1 = (s_{13} d)^{-1}$; $\Delta \omega_2 = [(s_{12} + s_{23}) d]^{-1}$; $(s_{ij} = s_i - s_j)$. В этом случае значения возмущений на выходе кристалла, выражаются (см. приложение) через значения возмущений на входе с помощью соотношений

$$a_2'(d;t+\delta t) = a_2'(t) + \left(\frac{\sigma_0 d}{2}\right)^2 \left\{ [A - \kappa \eta] a_2'(t) - c \frac{d^2 a_2'(t)}{dt^2} - \beta \frac{da_2'(t)}{dt} - \kappa \zeta \varphi_2(t) \right\} \quad (3.5)$$

$$\varphi_2(d;t+\delta t) = \varphi_2(t) - \left(\frac{\sigma_0 d}{2}\right)^2 \left\{ \kappa(1-\eta) \varphi_2(t) + c \frac{d^2 \varphi_2(t)}{dt^2} + \beta \frac{d\varphi_2(t)}{dt} + \kappa \zeta a_2'(t) \right\}$$

Здесь $\Delta t = S_2 d$ - групповое время пробега волны через кристалл, коэффициенты A и K определяются значением амплитуды u_{20} в стационарном состоянии ($x = \gamma_0 d |u_{20}|$):

$$A = 2 \frac{\sin 2x}{2x}; \quad K = 2 \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\sin 2x}{2x} \right); \quad (3.6a)$$

$$\eta = \operatorname{Re} \left(\frac{u_{20}^2}{|u_{20}|^2} \right); \quad \zeta = \operatorname{Im} \left(\frac{u_{20}^2}{|u_{20}|^2} \right).$$

Коэффициенты B и C зависят, кроме того, от соотношений групповых расстройок $[(S_{12} + S_{32})d]$ и $(S_{12}d)$ и определяются формулами

$$B = \frac{S_{13}d}{2} \left[B_2 + \frac{(S_{12} + S_{32})}{S_{13}} (B_1 - L\eta) \right] \quad (3.6b)$$

$$C = \left(\frac{S_{13}d}{2} \right)^2 \left[C_3 + (M_2 + M_3)\eta + \frac{S_{12} + S_{32}}{S_{13}} C_1 + \left(\frac{S_{12} + S_{32}}{S_{13}} \right)^2 (C_2 + M_1\eta) \right]$$

где функции амплитуды стационарного состояния $B_i; C_i; M_i$ и L приведены в Приложении. Учитывая соотношение (3.5), полученное из граничных условий на зеркалах, соотношение (1.2a) и уравнение стационарного состояния (2.4) легко получить уравнения для амплитудных и фазовых возмущений на входе в кристалл:

$$\begin{aligned} a_2'(t+\tau) \cos \Delta + \varphi_2'(t+\tau) \sin \Delta &= \sqrt{R} \left\{ a_2'(t) \left[1 + \left(\frac{\gamma_0 d}{2} \right)^2 (A - K\eta) \right] - \right. \\ &- \left. \left(\frac{\gamma_0 d}{2} \right)^2 \left[C_1 \frac{d^2 a_2'}{dt^2} + B \frac{da_2'}{dt} \right] - \left(\frac{\gamma_0 d}{2} \right)^2 K \zeta \varphi_2'(t) \right\} \quad (3.7) \\ \varphi_2(t+\tau) \cos \Delta - a_2'(t) \sin \Delta &= \sqrt{R} V_2(d) \left\{ \varphi_2'(t) \left[1 - \left(\frac{\gamma_0 d}{2} \right)^2 K(1-\eta) \right] + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\gamma_0 d}{2} \right)^2 \left(B \frac{d\varphi_2'}{dt} + C \frac{d^2 \varphi_2'}{dt^2} \right) - \left(\frac{\gamma_0 d}{2} \right)^2 K \zeta a_2'(t) \right\}. \end{aligned}$$

Не останавливаясь подробно на анализе общих свойств решений уравнений (3.7) для возмущений, отметим, что, как видно из рассмотренных ниже случаев, спектр поля возмущения резонансной волны, соответствующего собственным решениям (3.7), при малых отклонениях частот возмущений от частот синхронизма состоит из двух линий, расположенных симметрично относительно частоты поля стационарного колебания. Это значит, что при малых отклонениях частот возмущений от частот синхронизма, слабые поля мод резонатора с частотами, расположенными симметрично относительно частоты стационарного колебания оказываются связанными.

Исследование устойчивости стационарных состояний усилителя. При частоте сигнала ω_2 близкой к частоте синхронизма ω_2^0 , устойчивость стационарного состояния усилителя определяется в основном разностью $\Delta\Omega_m = \omega_2 - \omega_{2m}$ между частотой сигнала и ближайшей моды резонатора и слабо зависит от групповых расстроек. Поэтому достаточно ограничиться анализом решений уравнений (3.7) при $S_{ij} = 0$. Инкременты $\delta = \rho'$ и собственные частоты возмущений $\Omega_n = \rho''$ определяются в этом приближении выражениями:

$$\Omega_n = \frac{2\pi n}{T} + \text{Im} \rho_n; \quad \delta_n = \text{Re} \rho_n. \quad (3.8)$$

$$\rho_n^{(1,2)} = -(1 - \sqrt{R}) \left[\left(1 - \frac{P}{P_n} \frac{\sin 2x}{2x} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{P}{P_n} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^2 (1 - x \cot x)^2 - \Delta_R^2} \right]$$

Из (3.8) нетрудно показать, что граница области устойчивости на плоскости $(\Delta_R; X^2)$ для всех частот возмущений в рассматриваемом приближении одинакова и образована верхней ветвью линии вертикальных касательных резонансных кривых (2.8) и прямой $\left(1 - \frac{P}{P_n} \frac{\sin 2x}{2x} \right) = 0$. При этом неустойчивая область лежит ниже границы устойчивости (см. рис. 16).

Таким образом, при расстройке Δ_R , превышающей ширину полосы захвата Δ_R (см. формулу (2.9) и рис. 16) стационарное состояние усилителя становится в рассмотренном приближении неустойчивым относительно сразу всех мод. Учет групповых расстроек снимет, естественно, это вырождение и ограничит полосу частот неустойчивых мод. Кроме того ширина полосы захвата Δ_R должна, строго говоря, зависеть от расстройки $\Omega = \omega_2 - \omega_2^0$ частоты сигнала ω_2 от частоты синхронизма ω_2^0 . Однако при расстройке Ω меньше ширины полосы синхронизма и не слишком слабом сигнале ширину полосы захвата можно с достаточной точностью определить из полученных выше выражений (например (2.9)).

Исследование устойчивости стационарных состояний автоколебаний. При исследовании устойчивости стационарных состояний генератора учет групповых расстроек S_{ij} становится принципиальным. Поэтому, поскольку амплитуды стационарных состояний определены нами при $S_{ij} = 0$, проведенное ниже рассмотрение применимо только для стационарного колебания генератора, частота которого отстоит от частоты синхронизма меньше чем на половину расстояния между модами резонатора.

Как нетрудно видеть из (3.5) амплитудные и фазовые возмущения стационарного состояния генератора независимы. При этом амплитудные возмущения затухающие, а их декремент можно с точностью до слагаемых $(\Omega_n S_{12} d)$ считать независимыми от частот амплитудных возмущений Ω_n

$$d_a T = 2(1 - \sqrt{R}) \left[1 - \frac{P}{P_n} \frac{\sin 2x}{2x} \right] \quad (3.9)$$

Декремент фазовых возмущений пропорционален квадрату частоты возмущения $\Omega_n \approx \frac{2\pi d}{T}$, а его знак зависит от превышения над порогом и отношения групповых расстроек $\xi = S_{32} / S_{12}$

$$d_{\varphi} T = \left(\frac{\sigma_0 d}{2} \right)^2 \Omega_n^2 c \left(\frac{P}{P_n}; \frac{S_{32}}{S_{12}} \right) \quad (3.10)$$

Области устойчивости определяются, как следует из (3.10) и (П. 5) неравенством: $F_1(P/P_n) \geq F_2(\xi)$

$$F_1\left(\frac{P}{P_n}\right) = 2 \frac{P_n}{P} \frac{(1 - \sqrt{P/P_n} \cos \alpha)}{1 - P_n/P}; \quad F_2(\xi) = -\frac{1}{4} \frac{4\xi + (1 + \xi)^2}{1 - \xi} \quad (3.11)$$

Из вида зависимостей $F_1(P/P_n)$ и $F_2(\xi)$ (см.рис. 3) видно следующее:

1. Неустойчивость на частотах близких к частоте автоколебаний может возникнуть только если превышение над порогом (P/P_n) больше 14.

2. Эта неустойчивость может возникнуть если только отношение $\xi = S_{32}/S_{12}$ лежит в интервале

$$-5,83 < \xi_{\min}(P/P_n) < \xi < \xi_{\max}(P/P_n) < -0,17. \quad (3.12)$$

3. Зависимость ξ_{\max} и ξ_{\min} от превышения над порогом легко определить из графиков приведенных на рис.3.

В заключение отметим, что при частоте генерации близкой к половине частоты накачки при взаимодействии $00e$ расстройка $(S_{13} \Omega d)$ для генерации суммарной частоты $\omega_3 = 2\omega_{20} + \Omega$ может быть много больше расстройки $(S_{12} \Omega d)$, определяющей полосу эффективного взаимодействия возмущений с накачкой. При этом, как показано в работе [6], возможна неустойчивость с частотами, для которых первая расстройка велика, так что поле возмущения, резонансной волны складываясь с нерезонансным полем $u_1(z)$ стационарного колебания практически не возбуждает колебаний на суммарной частоте $(\omega_3^0 + \Omega)$.

П р и л о ж е н и е

Решения уравнений для возмущений амплитуд поля будем искать приближенно, считая амплитуду стационарно о колебания резонансной волны независимой от Z ($U_2(z) = U_{20}$), а возмущение поля резонансной волны $a_2(t; z)$ отличающимся от свободного решения (3.3а) $a_2(t - S_2 z)$ лишь малой добавкой $\Delta a_2(t; z)$ ($a_2(t, z) = a_2(t - S_2 z) + \Delta a_2(t, z)$);

$$|\Delta a_2(t, z)| \ll |a_2(t - S_2 z)|.$$

Пренебрегая в уравнениях для возмущения поля накачки и нерезонансной волны малыми величинами, получим для этих возмущений в нулевом приближении^{*)} уравнения с постоянными коэффициентами, правые части которых пропорциональны $a_2(t - S_2 z)$:

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} + S_1 \frac{\partial a_1}{\partial t} + \alpha_1 a_1 - i\gamma_0 U_{20}^* a_3 = i\gamma_0 U_3(z) a_2^*(t - S_2 z) \quad (\text{П.1})$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} + S_3 \frac{\partial a_3}{\partial t} + \alpha_3 a_3 - i\gamma_0 U_{20} a_1 = i\gamma_0 U_1(z) a_2(t - S_2 z)$$

Решения уравнений (П.1) найдем применяя преобразование Лапласа. При этом для изображений $a_1^*(z, p)$; $a_3(z, p)$ получим выражения:

$$a_1^*(p, z) = \int_0^z dz_1 e^{-iz_1 \Delta z} \left\{ f_1^*(p, z_1) \left[\cos \Lambda \Delta z - \frac{i \Delta Q_{13}}{\Lambda} \sin \Lambda \Delta z \right] - \right. \\ \left. - i f_3^*(p, z_1) \frac{U_{20}^*}{|U_{20}|} \sin \Lambda \Delta z \right\} \quad (\text{П.2а})$$

$$a_3(z, p) = \int_0^z dz_1 e^{-iz_1 \Delta z} \left\{ f_3(p, z_1) \left[\cos \Lambda \Delta z + \frac{i \Delta Q_{13}}{\Lambda} \sin \Lambda \Delta z \right] - \right. \\ \left. - i f_1(p, z_1) \frac{U_{20}}{|U_{20}|} \sin \Lambda \Delta z \right\} . \quad (\text{П.2б})$$

^{*)} Поскольку выражения для возмущений a_1 и a_3 в более высоких приближениях нам не понадобятся, для нулевых приближений не будем вводить отдельных обозначений.

Здесь $f_1^*(p, z) = -i \int_0^{\infty} dt e^{pt} u_3^*(z) a_2(t - S_2 z)$; $f_2(p, z) = i \int_0^{\infty} dt e^{pt} u_1(z) a_2(t - S_2 z)$;

$$\bar{\alpha} = (q_1 + q_3)/2; -iq_i(p) = S_i p + \alpha_i; \Lambda = \sqrt{\Lambda_0^2 + \Delta q_{13}^2}; \Delta q_{13} = (q_1 - q_3)/2; \Delta z = z - z_1.$$

Подставляя найденные выражения в правую часть уравнения для амплитуды возмущения резонансной волны, выразим изображение этой поправки на выходе кристалла через изображение амплитуды $a_2(t)$ нулевого приближения:

$$\Delta a_2(\alpha, p) = [a_2(p) I_1(p) + a_2^*(p) I_2(p)] \left(\frac{\delta_0 d}{2} \right)^2 e^{iq_2 d}, \quad (\text{П.3})$$

Здесь функции $I_1(p)$ и $I_2(p)$ определяются выражениями:

$$I_1(p) d^2 = \left\{ \frac{1}{i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0} - \frac{e^{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})} \right) + \frac{1}{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{-2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0} - \frac{e^{-i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})} \right) + \frac{1}{i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0} - \frac{e^{i(\Lambda_0 + \Lambda + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda_0 + \Lambda + \bar{\alpha})} \right) + \frac{1}{i(\Lambda + \Lambda_0 + \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{-2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0} + \frac{e^{i(\Lambda - \Lambda_0 + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda - \Lambda_0 + \bar{\alpha})} \right) + \frac{\Delta q_{13}}{\Lambda} \left[\frac{1}{i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})} \left(-d + \frac{e^{-i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})d} - 1}{-i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})} \right) + \frac{1}{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})} \left(d - \frac{e^{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})} \right) + \frac{1}{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})} \left(d - \frac{e^{i(\Lambda_0 + \Lambda + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda_0 + \Lambda + \bar{\alpha})} \right) - \frac{1}{i(\Lambda_0 + \Lambda + \bar{\alpha})} \left(d - \frac{e^{i(\Lambda + \Lambda_0 + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda + \Lambda_0 + \bar{\alpha})} \right) \right] \right\} \quad (\text{П.4})$$

$$I_2(p) d^2 = - \frac{u_{20}^2}{|u_{20}|^2} \left\{ \frac{1}{i(\Lambda + \Lambda_0 - \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0 d} - \frac{e^{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda_0 - \Lambda + \bar{\alpha})} \right) + \frac{1}{i(\Lambda - \Lambda_0 - \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{-2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0} + \frac{e^{i(\bar{\alpha} - \Lambda - \Lambda_0)d} - 1}{i(\bar{\alpha} - \Lambda - \Lambda_0)} \right) + \frac{1}{i(\Lambda - \Lambda_0 + \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0 d} - \frac{e^{i(\Lambda + \Lambda_0 + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda + \Lambda_0 + \bar{\alpha})} \right) + \frac{1}{i(\Lambda + \Lambda_0 + \bar{\alpha})} \left(\frac{e^{-2i\Lambda_0 d} - 1}{2i\Lambda_0} + \frac{e^{i(\Lambda - \Lambda_0 + \bar{\alpha})d} - 1}{i(\Lambda - \Lambda_0 + \bar{\alpha})} \right) \right\},$$

где

$$\bar{\alpha} = \alpha - q_2$$

Для медленных процессов $a_2(p)$ и $a_2^*(p)$ быстро убывают при увеличении $|p|$, поэтому функции $I_1(p)$ и $I_2(p)$ можно разложить в ряд по p и произведя обратное преобразование Лапласа получить выражение (3.5), в котором добавка к свободному решению выражена через амплитуду нулевого приближения и две ее первых производных по времени. Коэффициенты, входящие в (3.5) определяются соотношениями:

$$B_1 = \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{1}{x^2} \left(\cos^2 x - \frac{\sin 2x}{2x} \right); \quad B_2 = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{\sin 2x}{2x} \right);$$

$$C_1 = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right); \quad C_2 = -\frac{1}{3} \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{1}{2x^2} \left(\frac{\sin 2x}{2x} - \cos^2 x \right);$$

$$C_3 = \frac{1}{4x^2} \left(\cos^2 x - \frac{\sin 2x}{2x} \right); \quad L = \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\sin 2x}{2x} \right) = K/2;$$

$$M_1 = \frac{1}{3} \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin^2 x}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\sin 2x}{2x} \right);$$

$$M_2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\sin 2x}{2x} \right) \right]; \quad M_3 = -\frac{1}{2x^2} K.$$

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1 а. Зависимость χ^2 от Δ_R^2 ; n_{20} при $P/P_n = 0,9$.
1 - $2n_{20} = 10^{-2}$; 2 - $2n_{20} = 10^{-1}$; 3 - $2n_{20} = 3 \cdot 10^{-1}$;
4 - кривая, проходящая через середины кривых 1, 2, 3.

Рис. 1 б. Зависимость χ^2 от Δ_R^2 ; n_{20} при $P/P_n = 2$.
а - $2n_{20} = 10^{-3}$; б - $2n_{20} = 10^{-2}$; в - $2n_{20} = 10^{-1}$;
г - $2n_{20} = 3 \cdot 10^{-1}$. Пунктиром показаны кривые а и б
в масштабе 100 и 10.

Рис. 2 а. Зависимость ширины захвата $\bar{\Delta}_R$ от интенсивности сигнала n_{20} при $P/P_n = 2$
1 - численный расчет; 2 - приближенное значение (2.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А.Ахманов, Р.Е.Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, Изд. ВИНТИ, М., 1964.
2. М.М.Сүшик, В.М.Фортус, Г.И.Фрейдман, Изв.высш.уч. зав. - Радиофизика 13, 631 (1970).
3. С.А.Ахманов, В.Г.Дмитриев, Тезисы докладов У конференции по нелинейной оптике, Кишинев, 1970.
4. В.В.Фадеев, диссертация, МГУ, 1967.
5. J.E.Bjorkholm, H.G.Danielmeyer, Appl. Phys.Lett., 15, 171 (1969).
6. L.V.Kreuzer, Proc.of conf.on lasers and optoelectron., England, April, 1969.
7. А.Е.Каплан, Ю.А.Кравцов, В.А.Рылов, Параметрические генераторы и делители частоты, изд. Сов.радио, М., 1966.

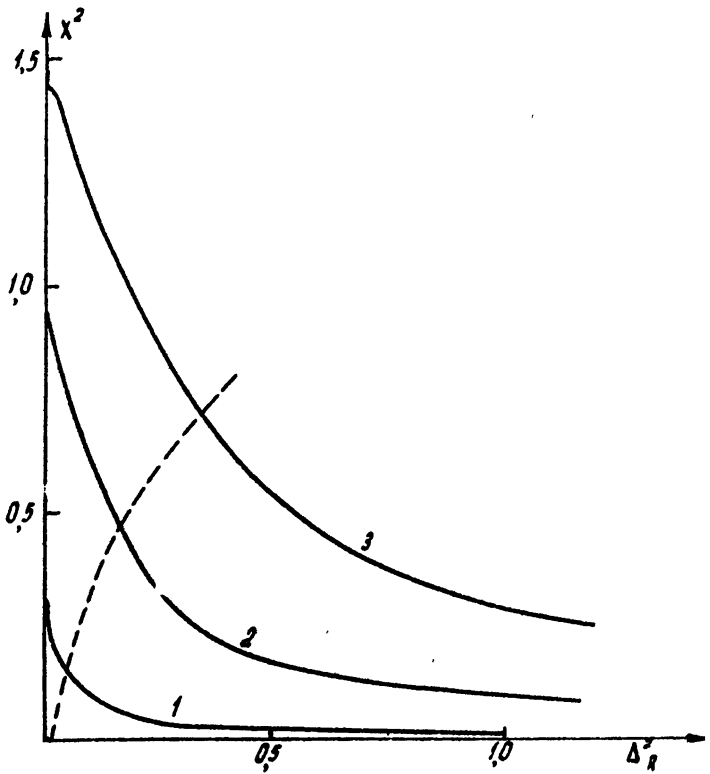


Рис. 1а

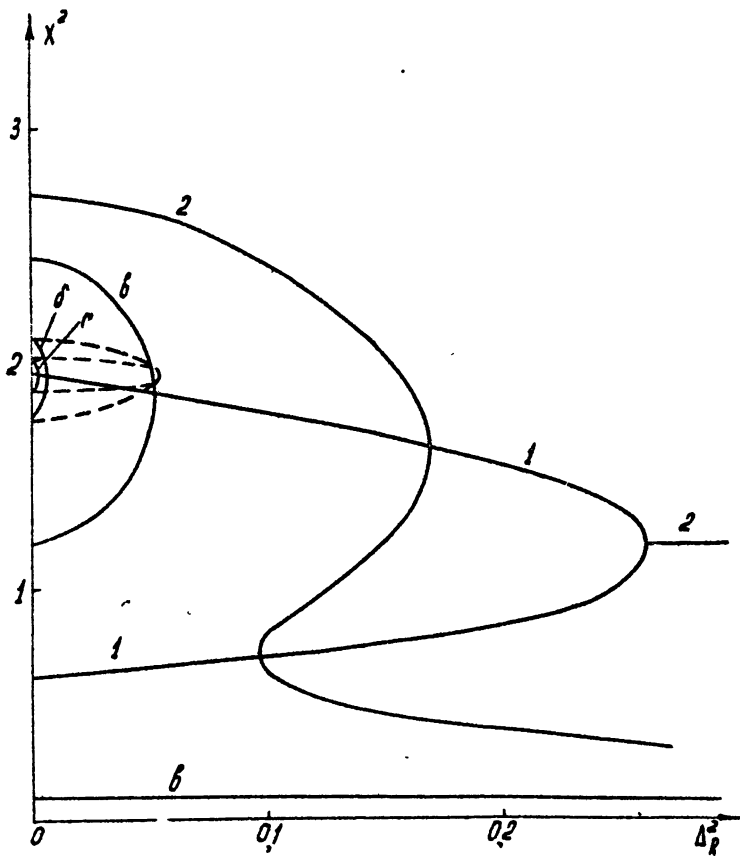


Рис. 18

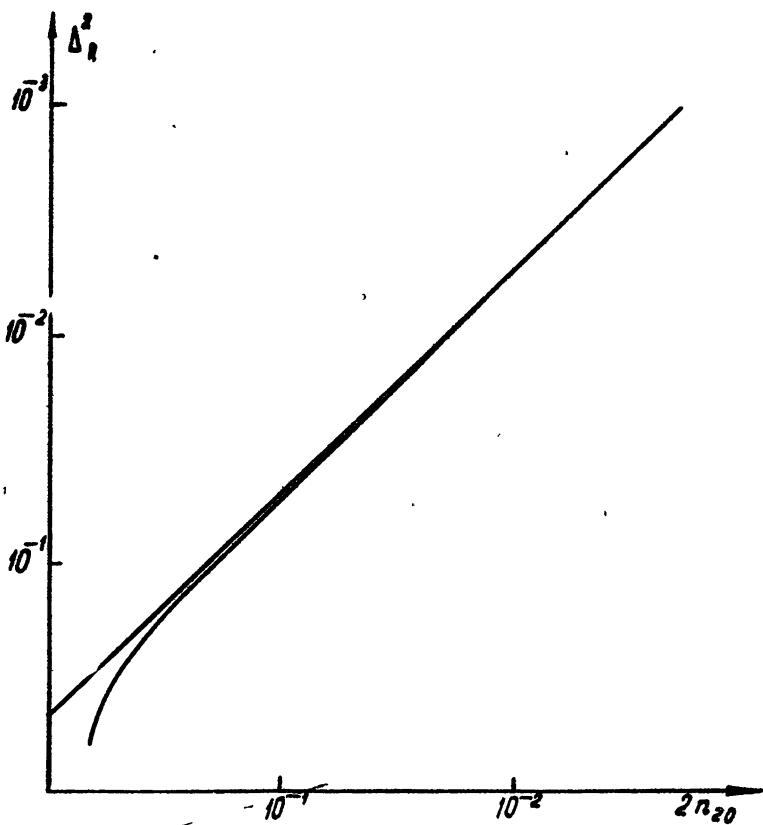


Рис. 2а

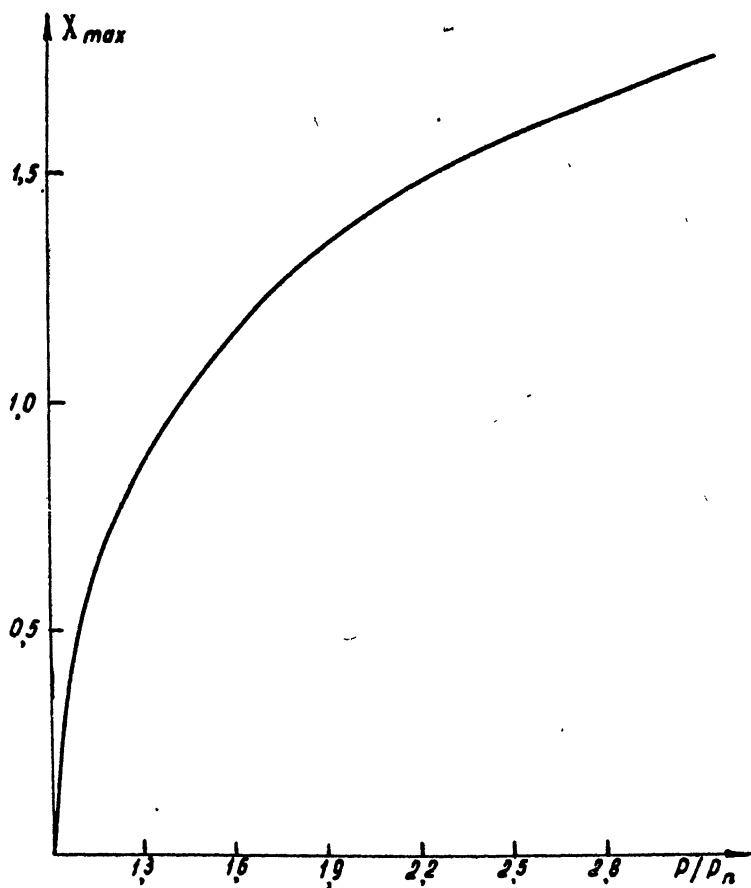


Рис. 26

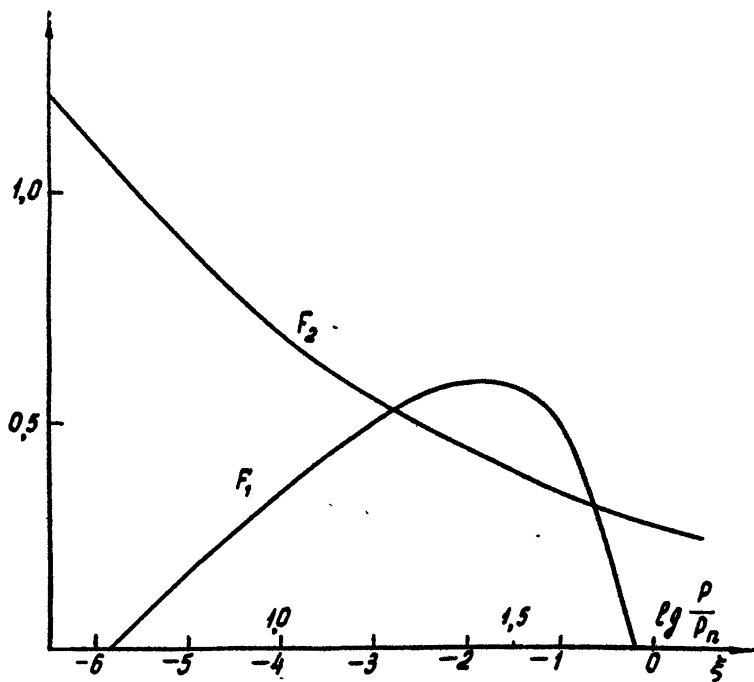


Рис. 3