


Министерство высшего и среднего специального образования  
РСФСР  
Ордена Трудового Красного Знамени  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

Препринт № 34



НИИФФИ

Г.И.Григорьев

ПРЕЛОМЛЕНИЕ  
АТМОСФЕРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН  
НА ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ РАЗРЫВЕ

г. Горький,  
1972

## А н н о т а ц и я

Найдены коэффициенты отражения и прохождения атмосферных гравитационных волн при падении их на тангенциальный разрыв в неоднородной среде. Рассмотрены различные предельные случаи. Вычислены значения коэффициента отражения  $|R|$  при числе Маха  $M = 0,5$  и изменении угла падения  $\vartheta_1$  в пределах  $-\pi/2 < \vartheta_1 < \pi/2$ . Оценивается влияние неустойчивости тангенциального разрыва в этой задаче.

В ряде работ [1-5] рассматривалось отражение звуковых волн от границы раздела двух сред, перемещающихся относительно друг друга. При этом вопрос об устойчивости тангенциального разрыва или вообще не принимался во внимание, или трактовался неправильно.

В настоящей работе этот вопрос решается заново. Кроме того, здесь рассмотрение проводится для атмосферных гравитационных волн, которые переходят в звуковые в коротковолновом пределе  $\lambda \ll H$  ( $g \rightarrow 0$ ).

Далее будем предполагать, что плоскослоистая изотермическая атмосфера находится в однородном поле тяжести (с ускорением  $\vec{g}$ ). В этом случае невозмущенные значения давления  $p_0$  и плотности  $\rho_0$  по обе стороны от границы, совпадающей с плоскостью  $x = 0$  (в декартовой системе координат  $x, y, z$ ), даются формулами  $\rho_{0j}/\rho_{00}^{(j)} = p_{0j}/p_{00}^{(j)} = \exp(-z/H_j)$ . Индексом  $j = 1, 2$  отмечены величины, относящиеся соответственно к средам I и II (см. рис. 1).

Возмущения волнового типа определяются из линеаризованной системы уравнений гидродинамики

$$\rho_{0j} \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_j \nabla) \vec{v}_j \right] = -\nabla p_j + \rho_{0j} \vec{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + (\vec{v}_j \nabla) \rho_j + (\vec{v}_j \nabla) \rho_{0j} + \rho_{0j} \operatorname{div} \vec{v}_j = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + (\vec{v}_j \nabla) \rho_j + (\vec{v}_j \nabla) \rho_{0j} = \quad (3)$$

$$= c_j^2 \left[ \frac{\partial p_j}{\partial t} + (\vec{v}_j \nabla) p_j + (\vec{v}_j \nabla) p_{0j} \right].$$

Здесь  $\vec{g}$  — ускорение силы тяжести, перпендикулярное границе;  $c_j$  — скорость звука;  $\vec{v}_j = (v_j, 0, 0)$  — постоян-

ная скорость, параллельная границе;  $\bar{V}_j$  - переменная компонента скорости;  $H_j$  - шкала высоты однородной атмосферы.

Нетрудно установить, что в безграничной атмосфере волновые возмущения типа  $p_j \sim \exp(i\omega t - ik_{x_j} x - ik_{z_j} z - z/2H)$ , удовлетворяющие системе (1)-(3), подчиняются дисперсионному соотношению

$$\Omega_j^4 - \Omega_j^2 \omega_{A_j}^2 (1 + 4k_j^2 H_j^2) + 4k_j^2 H_j^2 \omega_{g_j}^2 \bar{\omega}_{A_j}^2 \sin^2 \theta_j = 0, \quad (4)$$

в котором  $k_j = \sqrt{k_{x_j}^2 + k_{z_j}^2}$  - волновое число,  $\theta_j$  - угол между волновым вектором  $\bar{k}$  и осью  $z$ ,  $\Omega_j = \omega - (k_j \bar{v}_j)$  - частота с учетом доплеровского смещения,  $\omega_{g_j}^2 = (\gamma - 1)g^2/c_j^2$ ,  $\omega_{A_j}^2 = c_j^2/4H_j^2$ .

Для двух полуограниченных сред, находящихся в соприкосновении, решения указанного типа должны удовлетворять граничным условиям. В рассматриваемой задаче граничными условиями служат непрерывность вертикального смещения  $\zeta$  и полного давления  $p_j = g\rho_{0j} \zeta_j$

$$\zeta_1 = \zeta_2, \quad \rho_1 + g\rho_{00}^{(1)} \zeta_1 = \rho_2 + g\rho_{00}^{(2)} \zeta_2. \quad (5)$$

Однако, прежде чем переходить к вычислению коэффициентов отражения  $R$  и прохождения  $T$ , обсудим кратко вопрос о роли поверхностных волн, приводящих к неустойчивости тангенциального разрыва.

С этой целью определим возмущения, производимые в средах I и II гармоническим источником массы  $q$ , расположенным вблизи границы  $q = Q \delta(z + z_0) e^{i\omega t} \frac{\delta(z)}{2\pi z}$  +). В этом случае возмущения давления  $p_j = \Psi_j \exp(-z/2H_j)$  можно

+) Методика вычислений в этом разделе аналогична примененной в [6,7] для определения переходного излучения звуковых волн. Поэтому мы подробно ее не обсуждаем.

определить из уравнений

$$\frac{1}{c_j^2} \frac{d^4 \psi_j}{dt^4} - \frac{d^2}{dt^2} (\Delta - 1/4 H_j^2) \psi_j - \omega_{gj}^2 \Delta_{\perp} \psi_j =$$

$$- \exp(z/2H) (\omega_{gj}^2 + d^2/dt^2) \frac{dq}{dt}, \quad (6)$$

в которых  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{U}_j \nabla)$ ,  $\Delta_{\perp}$  - оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В пересчете на величину  $\psi$  в предположении  $\rho_{00}^{(1)} = \rho_{00}^{(2)}$  граничные условия (5) эквивалентны двум равенствам

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\psi_1}{2H_1} + \frac{g \psi_1}{c_1^2}}{\Omega_1^2 - \omega_g^2} = \frac{\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\psi_2}{2H} + \frac{g \psi_2}{c_2^2}}{\Omega_2^2 - \omega_g^2} \quad (7)$$

При записи (7) учтена связь между величинами  $\rho_j$  и  $\xi_j$ , определяемая из (1)-(3) соотношением  $\rho_j = \rho_{0j} \Omega_j^2 \frac{g \xi_j - c_j^2 \partial \xi_j / \partial z}{\Omega_j^2 - c_j^2 k^2}$

Вводя цилиндрические координаты  $(z, \theta, \varphi)$  и применяя к уравнению (6) преобразование Фурье-Бесселя

$$\bar{\psi} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z \psi(z, z, t) J_0(kz) e^{-i \alpha z} dz dz, \quad (8)$$

получим

$$\bar{\psi}_j = \frac{i \Omega_j Q (\omega_{gj}^2 / \Omega_j^2 - 1) \exp(-i \alpha z_0 + i \omega t)}{\Omega_j^2 / c_j^2 - k^2 - 1/4 H_j^2 + \omega_{gj}^2 k^2 / \Omega_j^2 - \alpha^2} \quad (9)$$

Полное решение  $\bar{\psi}_j^{(n)}$  уравнения (6) определяется суммой вышущенного (9) и той части решения соответствующего однородного уравнения, которая отвечает уходящи: от источ-

ника волнам

$$\bar{\Psi}_j^{(n)} = \frac{i \Omega_j Q (\omega_{gj}^2 / \Omega_j^2 - 1) \exp(-i \alpha z_0 + i \omega t)}{\Omega_j^2 / c_j^2 - k^2 - \alpha^2 - 1/4 H_j^2 + \omega_{gj}^2 k^2 / \Omega_j^2} +$$

$$+ A_j e^{i \mu_j z + i \omega t}; \quad \mu_j = \pm \sqrt{\Omega_j^2 / c_j^2 - k^2 - 1/4 H_j^2 + \omega_{gj}^2 k^2 / \Omega_j^2}.$$
(10)

Постоянные  $A_1$ ,  $A_2$  определяются из граничных условий (7). Выполняя указанные вычисления в предположении  $\Omega_1 = \omega$ ,  $\frac{\Omega_2}{\Psi_2^{(n)}} = \Omega - \omega - k V_0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $C_1 = C_2 = c$ ,  $H_1 = H_2 = H$  находим

$$\bar{\Psi}_2^{(n)} = i \alpha \Omega \left( \frac{\omega_g^2}{\Omega^2} - 1 \right) Q e^{i \omega t} \frac{\mu_1 [\beta \omega \left( \frac{\omega_g^2}{\omega^2} - 1 \right) - \alpha \Omega \left( \frac{\omega_g^2}{\Omega^2} - 1 \right)] - i \alpha k_0 \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\Omega}}{i \mu_1 + k_0 - \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\Omega^2 - \omega_g^2} (i \mu_2 - k_0)} Q e^{i \omega t}$$

$$\alpha = \frac{1}{\Omega^2 / c^2 - k^2 - \alpha^2 - 1/4 H^2 + \omega_g^2 k^2 / \Omega^2}, \quad k_0 = \frac{2 - \gamma}{2 \gamma H} \quad (11)$$

$$\beta = \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \alpha^2 - 1/4 H^2 + \omega_g^2 k^2 / \omega^2 \right]^{-1}$$

Для определения зависимости  $\Psi$  от координат ( $z$  и  $\xi$ ) нужно воспользоваться обратным преобразованием Фурье-Бесселя

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty k \bar{\Psi}(\alpha, k) J_0(kz) e^{i \alpha \xi} dk d\alpha. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что при вычислении интеграла (12) встретится полюс функции (11), отвечающий дисперсионному уравнению тангенциального разрыва

$$\begin{aligned}
 & \frac{k_0 + i \left[ \omega^2/c^2 - k^2 - 1/4H^2 + \omega_g^2 k^2/\omega^2 \right]^{1/2}}{\omega^2 - \omega_g^2} = \\
 & = \frac{-k_0 + i \left[ \frac{\Omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{1}{4H^2} + \omega_g^2 k^2/\Omega^2 \right]^{1/2}}{\Omega^2 - \omega_g^2} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Как известно [8], решением этого дисперсионного уравнения являются комплексные значения  $\omega$ . Среди них есть и такие, которые приводят к нарастанию возмущений во времени.

Таким образом, при наличии источника массы в неоднородной атмосфере вблизи тангенциального разрыва возбуждаются поверхностные волны, которые приводят к неустойчивости границы. Аналогичная картина будет, повидимому, и в том случае, если на такую границу приходит волновой сигнал, и решается задача с начальными условиями [9].

Поэтому при решении задачи об отражении гравитационных волн от тангенциального разрыва необходимо иметь в виду, что такая постановка вопроса возможна до времени  $\frac{1}{2}$  (отсчитываемого от момента прихода импульса к границе) не превосходящего характерного времени раскочки колебаний  $\tau$ . На этой стадии еще малы нелинейные эффекты и в силу принципа суперпозиции можно отдельно рассмотреть прохождение атмосферных гравитационных волн через тангенциальный разрыв.

Далее будем считать, что в среде I имеются две волны: падающая  $p_1 = \exp(i\omega t - ik_x x - ik_z z)$  и отраженная  $p_1' = R \exp(i\omega t - ik_x x + ik_z z)$ , а в полупространстве II - прошедшая  $p_2 = T \exp(i\omega t - ik_x x - ik_z z)$ . Два граничных условия (см. выше) позволяют определить коэффициенты отражения R и прохождения T

$$R = \frac{k_x^2 g(1-ab) - \Omega_1^2 \left( \frac{1}{2H_1} - ik_{z1} \right) + ab\Omega_2^2 \left( \frac{1}{2H_2} - ik_{z2} \right)}{k_x^2 g(ab-1) + \Omega_1^2 \left( \frac{1}{2H_1} + ik_{z1} \right) - ab\Omega_2^2 \left( \frac{1}{2H_2} - ik_{z2} \right)} \cdot \frac{k_0 - ik_{z1}}{k_0 + ik_{z1}} \quad (14)$$

$$T = (1+R)\sqrt{a} . \quad (15)$$

В (14)-(15) введены обозначения  $a = \rho_{00}^{(2)}/\rho_{00}^{(1)}$ ,  $k_x = \frac{2-\lambda}{2\lambda H}$ ,  $b = \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{\Omega_1^2 - k_x^2 c_1^2}{\Omega_2^2 - k_x^2 c_2^2}$ . Выражения (14), (15) можно преобразовать, введя в них углы падения  $\theta_1$  и преломления  $\theta_2$ .

Связь между  $\theta_1$  и  $\theta_2$  находится из условия сохранения тангенциальной компоненты волнового вектора  $k_x$  при прохождении и отражении волны на границе. Учитывая это обстоятельство и полагая все параметры (за исключением  $v_j$ ) сред I и II одинаковыми, из дисперсионных уравнений (4) получим

$$\sin^2 \theta_2 = \frac{4k_1^2 H^2 \sin^2 \theta_1}{(\Omega^2/\omega_A^2 - 1) + 4k_1^2 H^2 \sin^2 \theta_1 \omega_g^2/\Omega^2} , \quad (16)$$

где  $\frac{\Omega}{\omega_A} = \frac{\omega}{\omega_A} - 2k_1 H M \sin \theta_1$ ,  $M = v/c$  - число Маха. При малых углах падения ( $\theta_1 \rightarrow 0$ ) формулу (16) для медленных волн можно преобразовать к виду  $\sin^2 \theta_2 \approx 4k_1^2 H^2 \sin^2 \theta_1 \left[ \frac{0,83}{\{0,9(1 + 4k_1^2 H^2)^{-1/2} \pm M\}^2 - 1} \right]^{-1}$ . Знак "+" здесь соответствует углам  $-\pi/2 < \theta_1 < 0$ , знак "-" углам  $0 < \theta_1 < \pi/2$ .

Зависимость угла преломления  $\theta_2$  от угла падения  $\theta_1$  для акустических (кривая с индексом 1) и внутренних гравитационных волн (помечена индексом 2) иллюстрирует рис. 2. На следующем рисунке приведены значения  $|R|$  для углов падения  $\theta_1$  в интервале  $-\pi/2 < \theta_1 < \pi/2$  при  $M=0,5$ . Отметим тот факт, что при падении на тангенциальный разрыв волны определенного типа возможна трансформация ее в другой тип в движущейся среде. Этот переход сопровождается значениями  $R > 1$  (мелкий пунктир). Однако, если потребовать, чтобы энергия прошедшей волны оттекала от



границы, коэффициент отражения всюду не превышает 1 (сплошная и пунктирная кривые на рис. 3).

В ряде предельных случаев выражение (14) для коэффициента отражения  $R$  можно упростить. Так при нормальном падении ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ) имеем

$$R = - \frac{\alpha \beta (1/2H_2 - ik_1 c_1/c_2) - (1/2H_1 - ik_1)}{\alpha \beta (1/2H_2 - ik_1 c_1/c_2) - (1/2H_1 + ik_1)} \quad (17)$$

Видно, что  $|R|$  в (17) не превышает 1.

В коротковолновом пределе  $k_1 H \gg 1$  закон преломления (16) и формулы для  $R$  и  $T$  с точностью до  $(k_1 H)^{-1}$  совпадают с полученными ранее для звуковых волн [4,5]. Заметим также, что при  $U_0 = 0$  получающиеся из (14), (15) формулы согласуются с имеющимися в [10].

Без учета сжимаемости ( $c_1, c_2 \rightarrow \infty$ ) из (14), (16) получаем

$$R = - \frac{(\Omega^2 - \omega^2) - 2ik_1 H [\Omega^2 \operatorname{ctg} \theta_2 \sin \theta_1 - \omega^2 \cos \theta_1]}{(\Omega^2 - \omega^2) - 2ik_1 H [\Omega^2 \operatorname{ctg} \theta_2 \sin \theta_1 + \omega^2 \cos \theta_1]} \quad (18)$$

$$\sin^2 \theta_2 = 4k_1^2 H^2 \sin^2 \theta_1 \left\{ \frac{1}{\left[ \frac{1}{\sqrt{1+4k_1^2 H^2}} - \frac{v_0}{2\sqrt{gH}} \right]^2 - 1} \right\}^{-1} \quad (19)$$

При взаимодействии с двумя тангенциальными разрывами, ограничивающими слой толщиной  $d$ , гравитационные волны отражаются от него с коэффициентом

$$R = \frac{i\alpha_1 k_1 (n-m) + 4k_2^2 [ik_2(n+m) - ik_3(n-m)/\beta_1 + k_0(n-m)(\frac{1}{\beta_1} - 1)]^{-1} - k_0(a_1-1)(n-m) + ik_2(n+m)}{i\alpha_1 k_1 (n-m) - 4k_2^2 [ik_2(n+m) - ik_3(n-m)/\beta_1 + k_0(n-m)(\frac{1}{\beta_1} - 1)]^{-1} + k_0(a_1-1) - ik_2(n+m)} \quad (20)$$

где  $a_1 = \frac{\Omega_2^2 - \omega_g^2}{\Omega_1^2 - \omega_g^2}$  ;  $b_1 = \frac{\Omega_3^2 - \omega_g^2}{\Omega_2^2 - \omega_g^2}$  ;  $m = \exp(ik_2 d) = n^{-1}$  ;  
 $k_1, k_2, k_3$  — волновые числа в трех областях.

Если размер слоя  $d \rightarrow 0$  , выражение (20) для  $R$  переходит в

$$R = - \frac{k_0(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + i[k_2(\Omega_1^2 - \omega_g^2) - k_1(\Omega_3^2 - \omega_g^2)]}{k_0(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + i[k_3(\Omega_1^2 - \omega_g^2) + k_1(\Omega_3^2 - \omega_g^2)]} \quad (21)$$

эквивалентное (14) при  $n_1 = n_2 = n$  ,  $c_1 = c_2 = c$  ,  $a = 1$  .

Автор выражает благодарность В.П.Докучаеву за постановку задачи и интерес к работе и В.Я.Эйдману за полезные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J.B.Keller, Reflection of sound by a moving medium,  
J.Acoust.Soc.Am., 27, n. 6, 1044 (1955).
2. J.W.Miles, On the reflection of sound at an interface of relative motion,  
J.Acoust.Soc.Am., 29, n. 2, 226 (1957).
3. H.S.Ribner, Reflection transmission and amplification of sound by a moving medium,  
J.Acoust.Soc.Am., 29, n. 4, 435 (1957).
4. C.Yeh, A further note on the reflection and transmission of sound waves by a moving fluid layer,  
J.Acoust.Soc.Am., 43, n. 6, 1454 (1968).
5. P.M.Morse, K.V.Ingard, Theoretical acoustic. McGraw-Hill. Book Comp. N.Y. 1968.
6. В.П.Докучаев, К теории излучения звуковых волн при движении малых тел в газообразных средах, ЖЭТФ, 43, вып. 2(8), 595 (1962).
7. С.М.Файнштейн, Об усилении звуковых волн потоком нейтронных частиц при переходном излучении в неоднородной газообразной среде, Акуст ж., 14, вып. 2, 282 (1968).
8. Г.И.Григорьев, В.П.Докучаев, Нестойчивость тангенциального разрыва в изотермической атмосфере, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, № 10, 1093 (1971).

9. В.Л.Гинзбург, В.Я.Эйдман, О реакции излучения в случае сред с отрицательным поглощением, ЖЭТФ, 43, вып. 5 (11), 1885 (1962).
10. I.Tolstoy, The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation, Rev.Modern Phys., 35, n.I(1963).

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Преломление и отражение волны на тангенциальном разрыве в неоднородной среде.

Рис. 2. Зависимость угла преломления  $\vartheta_2$  от угла падения  $\vartheta_1$  для акустических (1) и внутренних (2) гравитационных волн при условиях  $2k_1H = 1$ ,  $\psi_1 = 0$ ,  $M = v_2/c_s = 0,5$ .

Рис. 3. Изменение модуля коэффициента отражения  $|R|$  в зависимости от угла падения  $\vartheta_1$  для акустических (1) и внутренних (2) гравитационных волн.

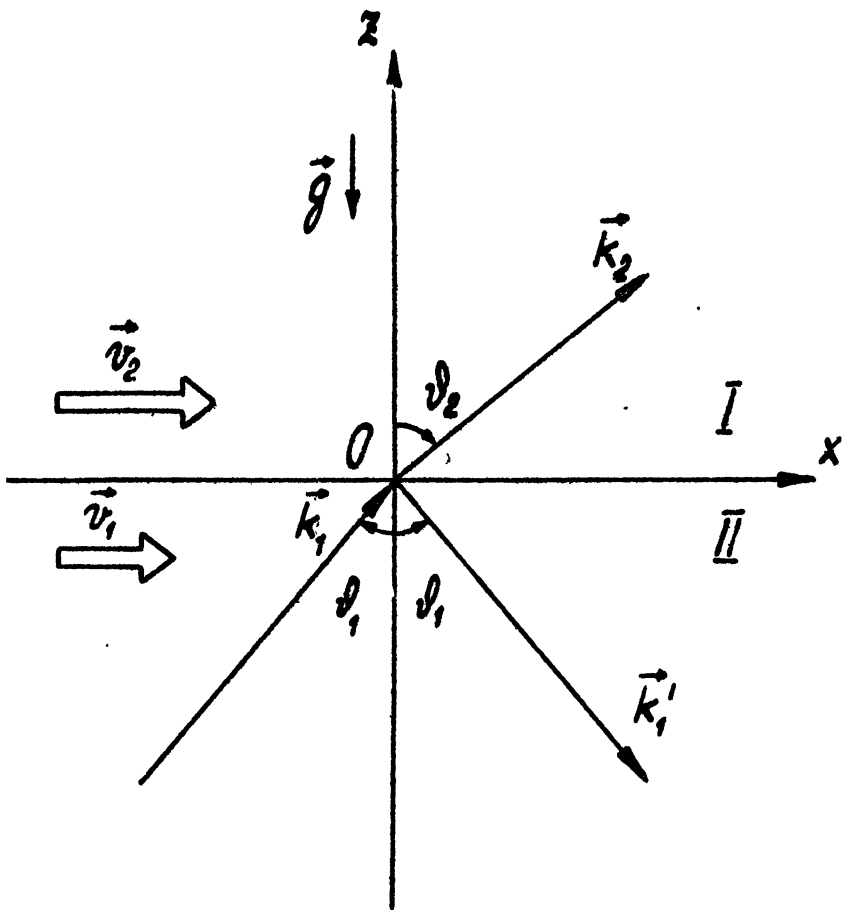


Рис. 1

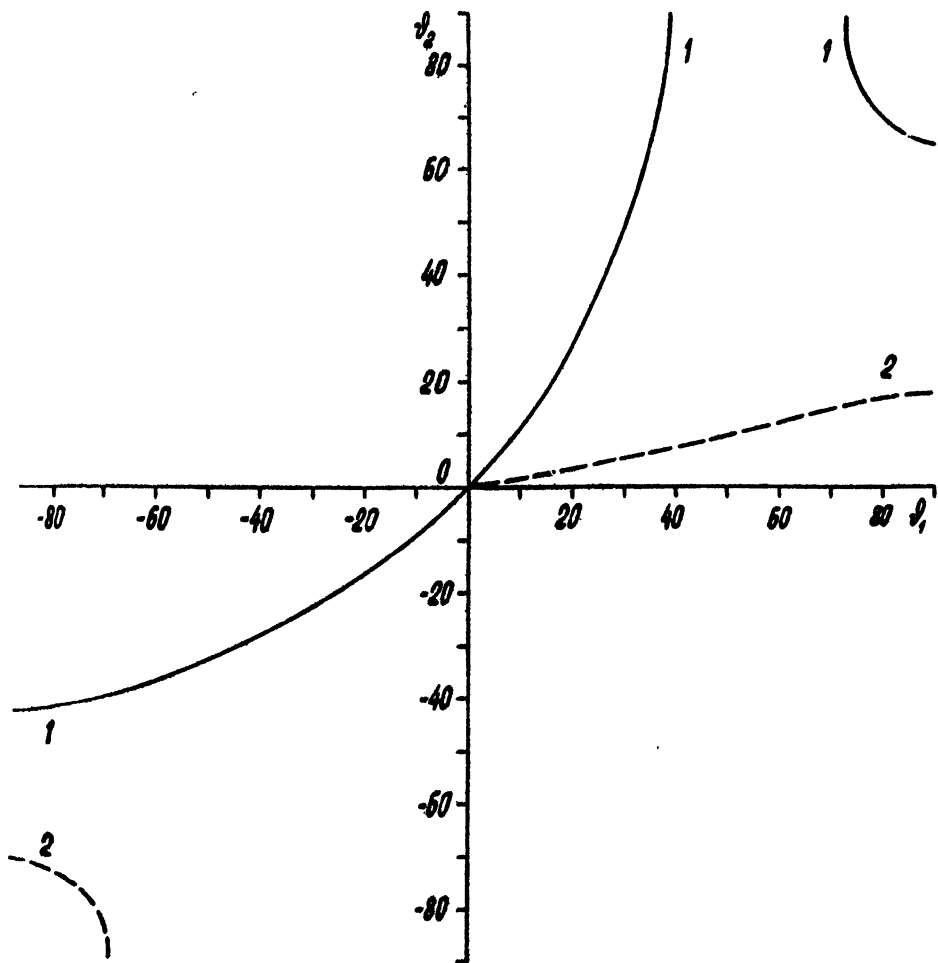


Рис. 2

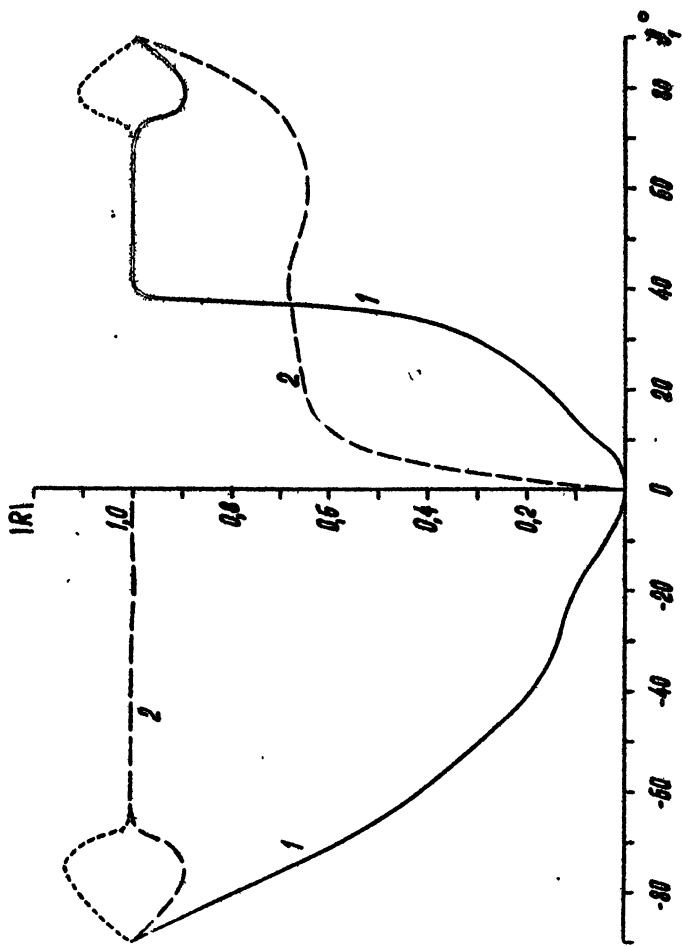


Fig. 3