

Министерство высшего и среднего специального образования  
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

Препринт № 36

Е.В.Суворов, Ю.В.Чугунов

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ  
В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

г. Горький,  
1972

## А н н о т а ц и я

В работе рассмотрены особенности движения и излучения релятивистских частиц, связанные с учетом силы радиационного трения в сильном магнитном поле и исследовано кинетическое уравнение, определяющее релаксацию функции распределения под действием радиационного торможения. Найдена универсальная одномерная функция распределения, к которой в сильном магнитном поле релаксирует любое изотропное ультрарелятивистское распределение. Сделаны оценки, показывающие, что в условиях пульсаров одновременная функция распределения электронов, по-видимому, формируется под действием радиационных потерь, в то время как для ионов столь же эффективной может быть одномеризация, связанная с сохранением адиабатического инварианта.

The paper considers peculiarities of motion and radiation, associated with an account of the strength of radiation friction in a strong magnetic field. The kinetic equation is investigated determining the relaxation of distribution function under the action of radiation deceleration. The universal one-dimensional function of distribution is obtained, to which in a strong magnetic field any isotropic ultrarelativistic distribution relaxes. Estimations are made showing that for pulses the one-dimensional function of electron distribution is apparently formed under the action of radiation losses, whereas for ions the same effectiveness has a one-dimensional function, associated with conservation of adiabatic invariant.

В последнее время в литературе (Sen Gupta, 1970; Shen, 1970; Каплан, Цытович, 1972) обсуждается круг задач, связанный с учетом воздействия силы радиационного трения на вид функции распределения релятивистских электронов в сильном магнитном поле. Одним из важных аспектов этой проблемы является вопрос об "одномеризации" функции распределения, обусловленной потерями энергии заряженных частиц на излучение. Особый интерес к подобного рода задачам объясняется, в частности, тем, что в магнитосфере пульсаров, где генерируется мощное электромагнитное излучение, весьма вероятно существование сильных магнитных полей ( $H$  до  $10^{12}$  эрстед) и ультрарелятивистских частиц (с энергиями  $\epsilon$  до  $10^4 m c^2$ ). В этих условиях радиационное торможение, которое пропорционально квадратам магнитного поля и энергии частиц, будет весьма эффективным и может сыграть важную роль в формировании функции распределения электронов.

В некоторых работах (см., например, Sen Gupta 1970; Каплан, Цытович, 1972) содержится утверждение, что частица в результате радиационных потерь теряет главным образом поперечную (по отношению к внешнему магнитному полю) часть своего импульса. Вследствие этого функция распределения электронов, оставаясь ультрарелятивистской, становится практически одномерной, т.е. без разброса по поперечным импульсам. Так, в статье Sen Gupta (1970) из постоянства продольной компоненты скорости при излучении делается вывод, что все радиационные потери связаны с уменьшением энергии поперечного движения. В монографии Каплана, Цытовича (1972) в качестве одномерной функции распределения, которая формируется под действием радиационных потерь, берется функция в виде  $f_{\epsilon} \sim (\epsilon + \epsilon_*)^{-\alpha}$ , где характерная энергия  $\epsilon_*$  значительно больше энергии покоя  $\epsilon_* \gg m c^2$ .

Подобные утверждения, однако, нуждаются в существенной коррекции. Хорошо известно (см. Ландау, Лифшиц, 1967; Гинзбург, Сыроватский, 1963), что при больших питч-углах ( $\theta \gg mc^2/\epsilon$ ) энергия ультрарелятивистской частицы уменьшается примерно вдвое за времена  $t_1 \sim t_0 mc^2/\epsilon$  (где  $t_0 = \frac{3m^2 c^5}{2R^4 H^2}$ ,  $H$  — напряженность магнитного поля,  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon/mc^2$  — отношение энергии электрона к его энергии покоя). Поэтому об ультрарелятивистской функции распределения, образующейся в результате радиационных потерь (типа  $f_\epsilon \sim (\epsilon + \epsilon_*)^{-\delta}$ ,  $\epsilon_* \gg mc^2$ ) можно говорить, рассматривая процесс релаксации исходного изотропного распределения лишь за времена  $t \gg t_1$ . Однако, за такие времена "одномеризация" произойти не может, так как частица остается ультрарелятивистской, и, следовательно, сила радиационного трения направлена против скорости электрона (Ландау, Лифшиц, 1967) и не может изменить его питч-угол. Это означает, в частности, что излучаемая энергия черпается как из поперечного так и из продольного движения частицы<sup>+</sup>). Последнее обстоятельство отмечалось также в работе Shen (1970). С другой стороны, при  $t \rightarrow \infty$  из-за радиационных потерь поперечная компонента импульса уменьшается до нуля, а энергия достигает конечного значения  $\epsilon_\infty = mc^2/\sqrt{1-\beta_z^2}$  (где  $\beta_z$  — есть отношение проекции скорости частицы на магнитное поле к скорости света)<sup>++</sup>). Движение частицы становится одномерным, однако происходит это за времена  $t > t_0 \gg t_1$ . Такие времена

<sup>+</sup>) Несмотря на сохранение продольной скорости  $U_z$ , продольный импульс  $P_z$  изменяется вследствие уменьшения массы частицы.

<sup>++</sup>) Заметим, что если начальный угол  $\theta_0 \gg mc^2/\epsilon_0$ , то в процессе излучения частица теряет существенную часть своей энергии ( $\epsilon_0 \gg \epsilon_\infty$ ). Поэтому из квазиизотропной начальной функции распределения не может образоваться одномерное распределение типа  $f_\epsilon \sim (\epsilon + \epsilon_*)^{-\delta}$  слабо спадающее вплоть до ультрарелятивистских энергия  $\epsilon_* \gg mc^2$ .

$t \sim t_0$  являются характерными для процесса формирования одномерной функции распределения. Таким образом, движение ультрарелятивистской частицы с большим начальным питч-углом  $\theta_0 \gg \pi c^2 / \epsilon_0$  имеет два характерных этапа: при малых временах  $t_1 = t \ll t_0$  существенно меняется энергия частицы и не меняется ее питч-угол; при больших временах  $t \gg t_0$  энергия частицы приближается к своему конечному значению  $\epsilon_\infty$  и начинает уменьшаться питч-угол — движение становится одномерным. Поэтому для исследования процесса "одномеризации" необходимо рассмотреть релаксацию исходной изотропной (или квазиизотропной) функции распределения за времена  $t \gg t_0$ .

Поскольку решение кинетического уравнения методом характеристик определяется интегралами движения отдельной частицы, мы рассмотрим вначале движение частицы под действием силы радиационного торможения во внешнем магнитном поле, а затем перейдем к исследованию релаксации функции распределения.

Результаты, полученные ниже для релаксации функции распределения, относятся к достаточно разреженной плазме. Лишь в этом случае можно пренебречь влиянием коллективных эффектов, которые связаны с воздействием самосогласованных полей, возникающих при различных неустойчивостях, а также влиянием среды на спонтанное излучение частицы.

1. Сила радиационного трения в однородном магнитном поле  $H_0$ , направленном вдоль оси  $Z$ , равна (Ландау, Лифшиц, 1967)<sup>+</sup>:

<sup>+</sup>Выражение для радиационной силы (1) получено методом возмущений в предположении, что в системе отсчета, связанной с частицей, она мала по сравнению с внешней силой. Однако, в лабораторной системе это условие выглядит менее жестко и, в частности, не исключает того, что радиационная сила может быть порядка и даже больше внешней силы  $F$  ( $\frac{F}{c} \ll F/(mc^2)$  при движении частицы перпендикулярно внешней силе). Последнее обстоятельство отражает анизотропию релятивистской массы ( $m_{||} > m_{\perp}$ ) и тот факт, что при больших энергиях ( $\epsilon \gg mc^2$ ) сила радиационного трения антипараллельна скорости, а внешняя сила может иметь составляющую, ортогональную к ней.

$$\vec{f}_z = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^5} v \left\{ -\frac{\vec{v}}{v} \left( \frac{\epsilon}{mc^2} \right)^2 (1 - \beta_z^2) + \frac{\vec{H}}{H} \cos \theta \right\}, \quad (1)$$

где  $e$ ,  $m$ ,  $v$ ,  $\epsilon$  - соответственно заряд, масса покоя, скорость и энергия частицы,  $c$  - скорость света в вакууме,  $\beta_z = \frac{v}{c} \cos \theta$ . В синхротронном пределе, когда  $(\epsilon/mc^2)^2 (1 - \beta_z^2) \gg 1$  радиационная сила направлена против скорости и, следовательно, угол  $\theta$  между скоростью электрона и  $\vec{H}$  (питч-угол) не меняется. В дипольном приближении  $(\epsilon/mc^2)^2 (1 - \beta_z^2) \approx 1$  заметную роль играет перпендикулярная к скорости составляющая радиационной силы, уменьшающая величину питч-угла.

Движение частицы под действием силы (1), учитывая, что  $\beta_z = \text{const}$ , можно получить путем перехода из системы отсчета, в которой она движется поперек магнитного поля<sup>+)</sup> . При движении поперек  $\vec{H}$  энергия электрона меняется по закону (Ландау, Лифшиц, 1967):

$$\frac{\epsilon'(t')}{mc^2} = \text{cth} \left( \frac{t'}{t_0} + \text{const} \right), \quad (2)$$

где  $t_0 = 3m^3 c^5 / 2e^4 H^2$ , а константа определяется значением энергии при  $t = 0$ . Учитывая, что при переходе в лабораторную систему координат энергия электрона и время преобразуются по закону  $\epsilon' = \epsilon \sqrt{1 - \beta_z^2}$ ,  $t' = t \sqrt{1 - \beta_z^2}$ , получаем

$$\epsilon(t) = \epsilon_\infty \text{cth} \left( \frac{t}{t_0} \sqrt{1 - \beta_z^2} + \text{const} \right). \quad (3)$$

<sup>+)</sup>  Тот факт, что  $\beta_z = \text{const}$ , также легко получается путем перехода в новую систему отсчета. В самом деле, в системе координат, где  $\beta_z = 0$ , частица движется перпендикулярно магнитному полю и проекция радиационной силы на магнитное поле равна нулю. Следовательно, в этой системе отсчета составляющая скорости  $v_z$  остается равной нулю во все моменты времени, а в любой другой системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью вдоль  $z$ ,  $v_z = \text{const}$ .

Здесь  $\varepsilon_{\infty} = \varepsilon(t \rightarrow \infty) = mc^2 / \sqrt{1 - \beta_z^2}$ .

В ультрарелятивистском пределе при  $t \ll t_0 / \sqrt{1 - \beta_z^2}$  выражение (3) для энергии существенно упрощается, и можно найти траекторию движения пластицы. Учитывая, что в этом пределе частота вращения электрона во внешнем поле линейно меняется со временем  $\dot{\varphi} = \omega_H mc^2 / \varepsilon(t) \approx \omega_H \left[ \frac{t}{t_0} (1 - \beta_z^2) + \text{const} \right]$  ( $\omega_H = eH / mc$  - гирочастота электрона), нетрудно показать, что в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, частица движется по спирали Корню

$$x \approx c \sqrt{2t_0 / \omega_H} \int_0^{\tau} \cos \tau^2 d\tau, \\ y \approx c \sqrt{2t_0 / \omega_H} \int_0^{\tau} \sin \tau^2 d\tau$$

с характерным масштабом  $^+) c \sqrt{2t_0 / \omega_H}$  со скоростью  $v_1 \approx c \sin \theta$ , развертка траектории вдоль оси  $z$  происходит со скоростью  $v_z \approx c \cos \theta$ .

Отметим некоторые особенности синхротронного излучения ультрарелятивистской частицы, связанные с учетом силы радиационного торможения. Нетрудно показать, что локальные возмущения траектории частицы, вызванные радиационной силой, малы; поэтому в каждый момент времени излучение частицы с возмущенной траектории такое же, как и излучение частицы с равной энергией с невозмущенной траектории. Это - естественное следствие метода возмущений, использованного при получении радиационной силы. Однако, на движение в целом радиационная сила оказывает существенное влияние (в плоскости  $\perp H$  вместо окружности частица движется по спирали Корню). Такой характер движения накладывает отпечаток и на излучение частицы. В некотором фиксированном направлении излучение состоит из отдельных узких импульсов. Форма, частотный спектр и диаграмма направленности каждого импульса

<sup>\*)</sup> Под характерным масштабом на плоскости  $\perp H$  мы понимаем расстояние от точки, где частица имела бесконечную энергию, до точки остановки.

такие же как у частицы с энергией, соответствующей моменту излучения, и движущейся по невозмущенной траектории. Однако из-за потерь энергии период следования импульсов меняется со временем (уменьшается), меняется и их форма. Если частица за один оборот по спирали теряет заметную часть своей энергии, то частотный спектр и диаграмма направленности двух соседних импульсов излучения существенно различны. Несмотря на это излучение ансамбля частиц с заданным энергетическим спектром +) остается таким же, как и без учета реакции излучения +).

Обратим внимание также на размытие линий синхротронного излучения. Известно, что при движении электрона, например, поперек магнитного поля без учета силы реакции синхротронное излучение состоит из гармоник релятивистской гирочастоты  $\tilde{\omega}_H = \omega_H mc^2/\epsilon$ . Учет радиационных потерь приводит к тому, что частота вращения электрона в магнитном поле и излучаемые частоты меняются во времени  $t$ , следовательно, уширяются линии излучения. Нетрудно оценить, при каких полях и энергиях ширина линий превысит разрешение между ними и спектр излучения одной частицы станет сплошным ++). Изменение энергии частицы за один оборот составляет по порядку величины  $d\epsilon \sim \frac{1}{2} c/\tilde{\omega}_H$ ; такое изменение энергии приводит к уширению линии излучения  $d\omega/\omega \sim d\epsilon/\epsilon$ . Чтобы гармоники оставались разрешенными, необходимо выполнение условия  $d\omega \ll \tilde{\omega}_H$ . В районе максимума синхротронного излучения  $(\omega \sim (\epsilon/mc^2)^{3/2} \tilde{\omega}_H)$  с учетом выражения (1) для  $\frac{1}{2}$  это приводит к следующему неравенству

$$\left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right)^5 \ll \frac{e^3 H}{m^2 c^4}$$

+ ) Для поддержания заданного энергетического спектра необходима постоянная инжекция энергетических частиц в область излучения.

++ ) Кроме этого, к размытию линий излучения приводит неоднородность магнитного поля вдоль траектории, а при излучении системы частиц - их разброс по энергиям.



Для электрона в магнитном поле  $H \sim 13$  линии в максимуме синхротронного излучения перекрываются при энергиях  $\epsilon > 10^3 mc^2$ , а для полей  $H \sim 10^5$  э при  $\epsilon > 10 mc^2$ .

2. Рассмотрим теперь, как с течением времени из-за радиационных потерь меняется питч-угол отдельной частицы:

$$\cos \theta(t) = \frac{\beta_z}{\sqrt{1 - (mc^2/\epsilon(t))^2}} \quad (4)$$

Из формул (4) следует, что до тех пор, пока энергия частицы значительно превышает ее конечное значение  $\epsilon \gg \epsilon_\infty$ , питч-угол практически не меняется. Когда же энергия достигает своего конечного значения, питч-угол уменьшается до нуля.

В ряде предельных случаев выражение для питч-угла упрощается. Если в начальный момент релятивистская частица движется почти поперек  $H$  ( $\beta_z^2 \ll 1$ ), то

$$\cos^2 \theta(t) \approx \frac{\beta_z^2}{\beta_z^2 + 2 \exp[-t/t_0]} \quad (4a)$$

Выражение (4a) применимо во все моменты времени  $t > 0$ . Если же выполнено условие  $1 - \beta_z^2 \ll 1$ , приближенное выражение для питч-угла имеет вид

$$\theta^2(t) = (1 - \beta_z^2) \left\{ 1 - \left[ \frac{ct h(\sqrt{1 - \beta_z^2} t/t_0) + \epsilon_0/\epsilon_\infty}{(\epsilon_0/\epsilon_\infty) ct h(\sqrt{1 - \beta_z^2} t/t_0) + 1} \right]^2 \right\}, \quad (4б)$$

где  $\epsilon_0$  - энергия частицы при  $t = 0$ .

И, наконец, при очень малых начальных питч-углах  $\theta_0 \ll mc^2/\epsilon_0$  частица под действием радиационной силы уменьшает угол  $\theta$  до нуля, практически не меняя своей энергии - эффект

"радиационного сжатия" в терминологии, предложенной Капланом, Цытовичем (1972). Здесь

$$\theta(t) = \theta_0 \exp \left\{ -\frac{t}{t_0} \sqrt{1 - \beta_z^2} \right\}. \quad (4в)$$

Выражение (4в) получено из (4б) в приближении  $\epsilon_0 - \epsilon_\infty \ll 1$ .

Таким образом, одномеризация движения частиц ( $\theta \rightarrow 0$ ) происходит при любых начальных питч-углах; эффект же "радиационного сжатия" (уменьшение питч-угла без изменения энергии частиц) имеет место лишь в том случае, если начальные питч-углы малы  $\theta_0 \ll mc^2/\epsilon_0$ . Времена "радиационного сжатия" составляют по порядку величины  $t = t_0 \epsilon_0 / mc^2$ . За это время частицы с большими начальными питч-углами  $\theta_0 \gg mc^2/\epsilon_0$  успевают релаксировать полностью: их энергия достигает конечного значения, а движение становится одномерным.

3. Рассмотрим релаксацию релятивистской функции распределения заряженных частиц, которая, вообще говоря, может быть неоднородной вдоль направления внешнего магнитного поля  $\vec{H}$ . Кинетическое уравнение для функции распределения по импульсам  $F(\vec{p}, z, t)$  с учетом силы радиационного трения имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_z \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \left( \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}] + \vec{f}_z \right) F \right\} = 0. \quad (5)$$

При наличии аксиальной симметрии в переменных  $p_z, p_\perp$  с учетом выражения (1) для  $\vec{f}_z$  получаем<sup>\*)</sup>

$$mc \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \frac{\partial F}{\partial t} + p_z mc^2 \frac{\partial F}{\partial z} - \left( \frac{1}{t_0} \right) \left\{ p_z p_\perp^2 \frac{dF}{dp_z} + p_\perp (p_\perp^2 + m^2 c^2) \frac{dF}{dp_\perp} + 2(2p_\perp^2 + m^2 c^2) F \right\} = 0. \quad (6)$$

<sup>\*)</sup> Соответствующее уравнение для ультрарелятивистского случая ( $p_z, p_\perp \gg mc$ ) приведено в работе Цытовича и др., 1970.

Решение уравнения (6) удобно представить в виде

$$F = \frac{m^2 c^2 + p_z^2}{p_z^4 p_1^2} \Phi, \quad (7)$$

где  $\Phi$  удовлетворяет уравнению

$$mc\sqrt{p^2 + m^2 c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p_z mc^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_z} - \frac{1}{t_0} \left[ p_z p_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_z} + p_1 (m^2 c^2 + p_1^2) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} \right] = 0.$$

и является произвольной функцией трех интегралов движения

$$\Phi = \Phi(x_0, p_{z0}, p_{10})$$

$$x_0 = x - \frac{p_z}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} ct,$$

$$p_{z0} = \frac{p_z mc}{\sqrt{m^2 c^2 + p_1^2}} \frac{\exp\{-2\sqrt{(m^2 c^2 + p_1^2)/(m^2 c^2 + p^2)} t/t_0\} + p_1^2 / (\sqrt{m^2 c^2 + p_1^2} + mc)^2}{\exp\{-2\sqrt{(m^2 c^2 + p_1^2)/(m^2 c^2 + p^2)} t/t_0\} - p_1^2 / (\sqrt{m^2 c^2 + p_1^2} + mc)^2} (8)$$

$$p_{10} = \frac{2mc p_1}{\sqrt{m^2 c^2 + p_1^2} + mc} \frac{\exp\{-\sqrt{(m^2 c^2 + p_1^2)/(m^2 c^2 + p^2)} t/t_0\}}{\exp\{-2\sqrt{(m^2 c^2 + p_1^2)/(m^2 c^2 + p^2)} t/t_0\} - p_1^2 / (\sqrt{m^2 c^2 + p_1^2} + mc)^2}.$$

Обратимся вначале к однородной задаче. Пусть в начальный момент во всем пространстве задано некоторое изотропное распределение, например, релятивистская равновесная функция

$$F(\rho, t=0) = \frac{N}{4\pi (mc)^3 (\mathcal{E}T/mc^2) K_2(mc^2/\mathcal{E}T)}, \quad (9)$$

где  $\mathcal{E}T$  — температура в энергетических единицах,  $N$  — концентрация частиц,  $K_2(x)$  — функция Макдональда. Мы будем считать что в начальный момент почти все частицы ультра-релятивистские, т.е.  $\mathcal{E}T/mc^2 \gg 1$ .

Из (7) и (8) находим, что временная эволюция начального распределения происходит следующим образом

$$F(\rho_z, \rho_\perp, t) = \frac{N}{4\pi (mc)^3} \frac{mc^2}{\mathcal{E}T} K_2^{-1}\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}T}\right) \frac{\rho_{z0}^2 \rho_{\perp 0}^2}{\rho_z^2 \rho_\perp^2} \exp\left\{-\frac{c\sqrt{m^2c^2 + \rho^2}}{\mathcal{E}T} \frac{\rho_{z0}}{\rho_z}\right\}$$

при:  $\exp\left\{-\sqrt{\frac{m^2c^2 + \rho_\perp^2}{m^2c^2 + \rho^2}} \frac{t}{t_0}\right\} > \frac{\rho_\perp}{\sqrt{m^2c^2 + \rho_\perp^2} + mc}$ , (10)

$$F(\rho_z, \rho_\perp, t) = 0$$

$$\text{при: } \exp\left\{-\sqrt{\frac{m^2c^2 + \rho_\perp^2}{m^2c^2 + \rho^2}} \frac{t}{t_0}\right\} < \frac{\rho_\perp}{\sqrt{m^2c^2 + \rho_\perp^2} + mc},$$

где в качестве  $\rho_{z0}$  и  $\rho_{\perp 0}$  следует использовать выражения (8). Тот факт, что в некоторой области значений  $\rho_z$ ,  $\rho_\perp$  функция распределения равна нулю, имеет простой физический смысл. В начальной функции распределения (9) есть все энергии вплоть до  $\mathcal{E} = \infty$ . Характер же радиационных потерь таков, что бесконечная энергия высвечивается за конечное время (эффект Померанчука). Это приводит к тому, что спустя конечное время энергия частиц не может превышать некоторого критического значения, зависящего от питч-угла, что отражено в функции распределения (10).

При рассмотрении релаксации удобно выделить два временных интервала: малые времена  $t \ll t_0$ , когда движение каждой частицы происходит с сохранением питч-угла и большие времена  $t \geq t_0$ , когда питч-углы меняются.

а) При временах  $t \ll t_0$ , когда можно считать  $\rho_x$ ,  $\rho_y \gg mc$ , а энергию  $\varepsilon \approx \rho c$ , т.е. на ультрарелятивистской стадии эволюции, релаксация происходит по более простому закону, который соответствует учету только первого члена  $\sim \varepsilon^2$  в выражении (1) для радиационной силы (синхротронный предел)

$$F(\rho, \theta, t) = \begin{cases} \frac{N_0}{8\pi(\hbar T/c)^3} \frac{1}{(1-\varepsilon/\varepsilon_{кр})^4} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\hbar T(1-\varepsilon/\varepsilon_{кр})}\right\} & \varepsilon < \varepsilon_{кр} \\ 0 & \varepsilon > \varepsilon_{кр} \end{cases} \quad (11)$$

$$а \quad \varepsilon_{кр} = mc^2 t_0 / t \sin \theta .$$

Из (11) видно, что с течением времени изотропная вначале функция распределения становится анизотропной. Однако, данное обстоятельство не означает одномеризации функции распределения. Релаксация идет таким образом, что величина  $N(\theta) = \int_0^{\infty} F(\rho, \theta, t) \rho^2 d\rho = \frac{N}{4\pi}$  не зависит от угла  $\theta$ , так же, как и для изотропной функции распределения. Это есть следствие того, что на ультрарелятивистской стадии релаксацииpitch-угол каждой частицы не меняется (одной из характеристик кинетического уравнения является  $\rho_x/\rho_y = c$ ). На рис. 1 качественно приведен вид энергетических спектров  $N(\varepsilon)$  для различных значений pitch-углов в некоторый момент времени  $t \ll t_0$ . Энергетический спектр при  $\theta = 0$  не зависит от времени. Энергетические спектры для углов  $\theta \neq 0$  обрезаны по энергии сверху  $\varepsilon < \varepsilon_{кр}$ , и имеют резкий максимум вблизи  $\varepsilon = \varepsilon_{кр}$ . С увеличением времени при фиксированном  $\theta$  значение  $\varepsilon_{кр}$  убывает, а энергетический спектр деформируется, сжимаясь по оси абсцисс и вытягиваясь по оси ординат, что показано на рис. 1 штриховыми линиями. Ясно, что хотя частицы с большими энергиями ( $\varepsilon \sim \hbar T$ ) действительно движутся под малыми углами к магнитному полю, основная часть имеет меньшие энергии  $\varepsilon \sim mc^2 t_0/t \gg mc^2$  и pitch-углы этих частиц  $\theta \sim 1$ .

б) В дальнейшем, при  $t \gg t_0$  существенную роль начинает играть второй член в радиационной силе (1), связанный с дипольным излучением, при этом меняютсяpitch-углы отдельных частиц, что, по существу, означает начало "одномеризации" функции распределения. Релаксация здесь носит довольно сложный характер, однако ясно, что со временем функция распределения приближается к одномерной, делаясь все более узкой по  $p_{\perp}$ . Легко найти вид одномерной функции распределения, асимптотически устанавливающейся при  $t \gg t_0$ , интегрированием (11) по поперечным импульсам. Следует только учесть, что при  $t \rightarrow \infty$   $p_{\perp}$  становится много меньше  $mc$ , при этом величина  $\epsilon =$

$$= \exp \left\{ -\sqrt{\frac{m^2 c^2 + p_{\perp}^2}{m^2 c^2 + p_z^2}} \frac{t}{t_0} \right\} \text{ много меньше единицы и не зависит от } p_{\perp}. \text{ Тогда имеем}$$

$$F(p_z, t \rightarrow \infty) = 2\pi \int_0^{\infty} p_{\perp} F(p_z, p_{\perp}, t) dp_{\perp} = 2\pi \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \frac{N_0}{4\pi (mc)^3} \frac{mc^2}{\hbar T} \times$$

$$\times K_2^{-1} \left( \frac{mc^2}{\hbar T} \right) \frac{(\epsilon^2 + p_z^2 / 4m^2 c^2)^2 \epsilon^2}{(\epsilon^2 - p_{\perp}^2 / 4m^2 c^2)^4} \exp \left\{ -\frac{c\sqrt{m^2 c^2 + p_z^2}}{\hbar T} \frac{\epsilon^2 + p_z^2 / 4m^2 c^2}{\epsilon^2 - p_{\perp}^2 / 4m^2 c^2} \right\}$$

Подинтегральное выражение при  $\epsilon \rightarrow 0$  обладает свойством дельта-функции  $\delta(p_{\perp})$  в том смысле, что результат интегрирования не зависит от  $\epsilon$ , хотя интервал интегрирования стремится к нулю. В итоге получаем

$$F(p_{\perp}, p_z, t \rightarrow \infty) = \frac{N}{2} K_2^{-1} \left( \frac{mc^2}{\hbar T} \right) \exp \left( -\frac{c\sqrt{m^2 c^2 + p_z^2}}{\hbar T} \right) \frac{1}{\sqrt{m^2 c^2 + p_z^2}} \times$$

$$\times \left[ 1 + 2 \frac{\hbar T}{c} \frac{1}{\sqrt{m^2 c^2 + p_z^2}} + 2 \left( \frac{\hbar T}{c} \right)^2 \frac{1}{m^2 c^2 + p_z^2} \right] \frac{\delta(p_{\perp})}{2\pi p_{\perp}} \quad (12)$$

Учитывая высокую температуру начального распределения ( $kT \gg mc^2$ ), одномерное распределение (12) в области импульсов  $p_x \ll kT/c$  можно аппроксимировать формулой:

$$F(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \frac{N}{2m_c} \left(1 + \frac{p_{\perp}^2}{m^2 c^2}\right)^{-3/2} \frac{\delta(p_{\perp})}{2\pi p_{\perp}}. \quad (13)$$

К одномерной функции распределения (13) релаксирует не только ультрарелятивистское распределение (9), но также любая изотропная функция распределения со средней энергией  $\epsilon \gg mc^2$ . Вид одномерного распределения легко получить из следующих простых соображений. Изотропное ультрарелятивистское начальное распределение представляет собой в пространстве скоростей дельта-функцию  $\delta(v-c)$ . При этом распределение по продольным скоростям  $N(v_x)$  является ступенькой

$$N(v_x) = 2\pi \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} F(\vec{v}) = \begin{cases} \frac{N}{2c} & |v_x| < c \\ 0 & |v_x| > c \end{cases} \quad (14)$$

Ясно, что это  $N(v_x)$  сохраняется в процессе релаксации из-за радиационных потерь, поскольку продольные скорости частиц не меняются. В результате релаксации поперечные импульсы обращаются в нуль, а связь  $v_x$  с продольным импульсом  $p_x$  определяется соотношением  $v_x = c p_x / \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2}$ .

Учитывая эту связь, находим

$$N(p_x) = N(v_x) \frac{dv_x}{dp_x} = \frac{N_0}{2m_c} \left(1 + \frac{p_x^2}{m^2 c^2}\right)^{-3/2}, \quad (15)$$

т.е. получаем одномерное распределение (13). Так же, как и в случае (13), выражение (14) справедливо для достаточно малых импульсов  $p_z < \epsilon/c$ , где  $\epsilon$  - средняя начального изотропного распределения.

Таким образом, одномерное распределение (13) является универсальным в том смысле, что за время  $t \gg t_0$  к нему релаксирует любое изотропное ультрарелятивистское распределение. Это распределение можно принять за основу при исследовании дисперсионных характеристик электромагнитных волн в релятивистской плазме в сильном магнитном поле.

Отметим также, что приведенные выше интегралы движения (характеристики кинетического уравнения) позволяют исследовать ряд других задач, неоднородных в пространстве и нестационарных во времени. В частности, решенная выше задача о временной релаксации однородного в пространстве распределения легко обобщается на случай стационарной инжекции в полупространство  $z > 0$  путем замены  $t \rightarrow \sqrt{(m^2 c^2 + p^2)/c^2}$ .

Что же касается применения полученных результатов к физическим процессам, происходящим вблизи поверхности пульсара, то здесь необходимо заметить следующее. В настоящий момент, по сути дела, неизвестны условия ускорения и генерации релятивистских частиц в магнитосфере пульсаров. Однако, если предположить, что релятивистские частицы генерируются вблизи поверхности нейтронной звезды и затем транспортируются во внешние слои магнитосферы, то при образовании одномерного распределения будут конкурировать два механизма. Первый из них обсуждается в настоящей работе, второй механизм связан с прижиманием вектора скорости частиц к силовой линии магнитного поля из-за сохранения адиабатического инварианта. Для электронов характерные расстояния, на котором происходит одномеризация из-за радиационных потерь,  $R_r = ct_0 \approx 10^{-5} (10^{12}/\mu^2 g) \text{ см}$ . Характерные масштабы одномеризации из-за выхода частиц в область более слабого магнитного поля (сохранение адиабатического инварианта) сравнимы с размерами нейтронной звезды, т.е.  $R_{di} \sim 10^6 \text{ см}$ . Из сопоставления этих



масштабов следует, что если магнитное поле в области генерации релятивистских частиц больше  $10^8$  эрстед, определяющим является радиационное сжатие; при меньших полях более эффективна одномеризация, связанная с сохранением адиабатического инварианта. Однако, эти два механизма приводят к существенно разным одномерным функциям распределения. Процесс радиационного сжатия идет с потерей значительной части энергии первоначального изотропного распределения. Одномеризация же, связанная с сохранением адиабатического инварианта, не меняет энергии частиц.

Для ионов из-за их большой массы масштабы радиационного сжатия значительно больше, чем для электронов, в то время как второй механизм (сохранение адиабатического инварианта) одинаково эффективен для электронов и ионов. Механизм радиационного сжатия для ионов является определяющим при полях  $H > 10^{12}$  эрстед.

Авторы признательны А.А.Андронову и В.В.Железнякову за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л.Гинзбург, С.И.Сыроватский, Происхождение космических лучей, изд. АН СССР Москва, 1963.
2. С.А.Каплан, В.Н.Цытович, Плазменная астрофизика, изд. Наука, Москва, 1972.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, Москва, 1967.
4. Sen Gupta N.D., Phys.Letters, 32A, 103, 1970.
5. Shen C.S., Phys.Letters, 33A, 322, 1970.
6. Tsytovich V.N., Buckee J.W. and ter Haar D., 1970, Preprint 26/70, Oxford; Phys. Letters, 32A, 471.

## ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Энергетические спектры  $N(\epsilon)$  для различных значений pitch-углов в некоторый момент времени  $t_1 < t < t_0$ . Штриховыми линиями показаны энергетические спектры для тех же значений угла  $\theta$  спустя некоторое время. Штрих-пунктирная линия  $N \sim \epsilon^{-4}$  определяет рост максимума  $N(\epsilon)$  с уменьшением  $\epsilon_{кр}$ . (Начальная изотропная функция распределения имеет вид (9)).

$$N(\xi, \theta) \theta \pi \kappa T N_0^{-1} (\kappa T / mc^2)^2$$

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

$$mc^2 \ll \xi_{kp}(\frac{\pi}{2}) < \xi_{kp}(\theta_2) < \xi_{kp}(\theta_1) \ll \kappa T$$

