

Министерство высшего и среднего специального образования  
РСФСР  
Ордена Трудового Красного Знамени  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

Препринт № 32

Л.А.Островский

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

г.Горький,  
1973

# НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА <sup>+</sup>)

## В в е д е н и е

Механика сплошной среды и, в частности, нелинейная акустика, принадлежит к тем "старинным" областям физики, где теория нелинейных волн давно уже вошла во все учебники. Когда-то термин "нелинейная акустика" имел свой буквальный смысл, т.е. относился к звуковым волнам конечной амплитуды в слышимом интервале частот. Первыми "приборами" для наблюдения нелинейных эффектов были музыкальные инструменты (в особенности орган), мощные сирены и свистки и, наконец, сам слуховой аппарат человека. Первые сознательные эксперименты по регистрации таких эффектов (восприятие комбинационных тонов) провели, по-видимому, Зорге и Тартини еще в середине 18-го века. Этими вопросами занимались, например, Юнг и Гельмгольц. Однако настоящая теория нелинейных волн в сжимаемой среде началась с работ Пуассона (1808), Ирришоу (1859) и, в особенности, Римана (1867), который дал общее решение задачи об одномерном движении идеального сжимаемого газа. В последующие годы наибольшее внимание уделялось динамике сверхзвуковых потоков, и, в особенности, теории сильных ударных волн, в акустике же развивались в основном "линейные" направления. Лишь в последние десятилетия наметился новый прогресс в нелинейной акустике — в связи с появлением мощных излучателей звука и освоением ультразвукового и даже гиперзвукового (до 1 ГГц и более) диапазонов. Ясно, что здесь мы выходим за рамки частот, слышимых человеком (и даже, например, дельфином), но характер волновых процессов побуждает по-прежнему говорить о нелинейной акустике. Под этим термином, по-видимому, целесообразно подразумевать раздел механики сплошных сред, относящийся к колебаниям и волнам малой, но конечной амплитуды в том

---

<sup>+</sup>) Прочитано на Республиканской школе по нелинейным колебаниям в распределенных системах (Горьковская обл., март 1972).

смысле, что число Маха  $M = U_m/c$ , где  $U_m$  — амплитуда скорости частиц, а  $c$  — скорость звука, мало в сравнении с единицей (слабая нелинейность), но исследуемые эффекты связаны именно с конечностью этой величины.

Сейчас имеется уже довольно большая литература по вопросам нелинейной акустики. Основные результаты, полученные до 1965–66 г.г., собраны в монографии [1] (см. также [2]). Вместе с тем ряд разделов теории по причинам, указанным ниже, разработан еще довольно слабо. Мы обсудим здесь (насколько это можно сделать в рамках одной лекции) несколько "старых" и (большей частью) новых задач нелинейной акустики жидкости и газа, которые на наш взгляд, актуальны с точки зрения общей теории нелинейных волн. Особенности твердых тел будут рассмотрены в следующей лекции.

### Нелинейность, диссипация и дисперсия в звуковых волнах

В нелинейной акустике используется, в сущности, та же система уравнений, что и вообще в динамике сжимаемых сред. Эта система состоит из уравнений неразрывности, движения (Навье–Стокса) и уравнения баланса тепла. Их можно найти в любом учебнике (см., например, [3]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] + \nabla p = \eta \Delta v + \left( \zeta + \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} \quad (2)$$

$$\rho T \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \nabla S \right) = - \operatorname{div} Q + \zeta (\nabla \vec{v})^2 + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right)^2 \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\vec{v}$  — скорость частиц среды,  $S$  — энтропия,  $T$  — температура,  $\zeta$ ,  $\eta$  — коэффициент вязкости,  $Q$  — поток тепла;

обычно  $Q = -\kappa \nabla T$ , где  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности; сюда добавляются термодинамические уравнения состояния:  $p = p(p, S)$ ,  $T = T(p, S)$ , причем в большом числе случаев можно пользоваться политропным уравнением  $p_{\#} [(p/p_0)^{\gamma} - 1] + p_0$ . Для газа  $p_{\#} \approx 1 \text{ атм}$ ,  $1 < \gamma < \frac{5}{3}$  (адиабата Пуассона); для жидкости это уравнение часто также можно рассматривать как неплохую аппроксимацию свойств (формула Тэта) с  $\gamma \approx 4 + 12$ ,  $p_{\#} \approx 3000 \text{ атм}$ . Как уже говорилось, малой считается нелинейность, т.е. величины  $\bar{v}$ ,  $\rho' = p - p_0$ ,  $\rho'' = p - p_0$  достаточно малы, хотя и конечны. Заметим, что в газе нелинейность связана преимущественно с переносом вещества (член  $(\bar{v} \nabla) \bar{v}$  в (2)), в жидкости же преобладает нелинейность внутренних свойств (зависимость  $p = p(\rho)$ ) [4]. Кроме того, для акустических волн будем считать достаточно малой диссипацию, так что правая часть в (2) мала, а относительные изменения  $S$  малы по сравнению с изменениями давления. При этом мало затухание на длине волны. Поэтому, на первый взгляд, для большинства случаев можно пренебречь диссипацией, рассматривая лишь уравнения (1) и (2) без правой части и добавляя связь  $\nabla p = c^2 \nabla \rho$ , где  $c^2 \approx (\partial p / \partial \rho)_S \sim T$ . Получающиеся уравнения для  $\bar{v}$  и  $\rho$  квазилинейны и (это существенно) инвариантны по отношению к замене типа  $t = at'$ ,  $\bar{z} = a\bar{z}'$ , где  $a$  - любая константа. Это означает, что в исходной недиссипативной системе нет каких-либо независимых масштабов с размерностью времени или координаты (а лишь их отношения, т.е. скорости). Это свойство можно считать определением недиспергирующей системы (а все системы, лишенные его, рассматривать как диспергирующие). В линейном случае оно приводит к независимости скорости волн от частоты. Для нелинейных систем отсюда следует, что в них не могут существовать ни синусоидальные волны, ни вообще какие-либо волны непрерывного стационарного профиля, наличие которых связано с "равновесием" между действием нелинейности и дисперсии; всякая волна неограниченно деформируется вплоть до образования разрыва. Поэтому отсутствие

дисперсии скорее усложняет задачу, чем упрощает ее; так, здесь неприменимы обычные методы усреднения. Вместе с тем, характерные для газодинамики типы решений (например, автомоделные волны) также обычно непригодны для описания осцилляторных процессов. По той же причине становится принципиальным учет диссипации (которая, согласно сказанному, вносит определенную дисперсию).

Итак, в нелинейной акустике рассматриваются среды со слабой дисперсией, причем последняя имеет диссипативный характер (о возможности искусственного введения сильной дисперсии говорится ниже). Ввиду отмеченных выше трудностей в теоретической нелинейной акустике до сих пор имеются значительные пробелы, которые начали заполняться лишь сравнительно недавно.

### "Самовоздействие" бегущей волны. Простые волны и разрывы

Самой известной и хорошо изученной является задача об искажении бегущей плоской волны. Ее решение – простая (риманова) волна – приводится во всех книгах по газодинамике и мы лишь кратко опишем его основные особенности. Это решение выражается неявной функцией, которая при малой нелинейности имеет вид

$$v = \mathcal{F} \left( t - \frac{x}{c_0} + \frac{\delta+1}{2c_0^2} v x \right), \quad (4)$$

где  $\mathcal{F}$  – произвольная функция, причем  $\rho'$  и  $p'$  связаны с  $v$  однозначными соотношениями

$$\rho' \approx \frac{\rho_0}{c_0} v \left( 1 + \frac{3-\delta}{4} \frac{v}{c_0} \right), \quad p' \approx \rho_0 c_0 v \left( 1 + \frac{\delta+1}{4} \frac{v}{c_0} \right). \quad (5)$$

Далее обычно будем считать, что при  $x = 0$   $v$  изменяется синусоидально, т.е.  $F(\xi) = v_m \sin \omega \xi$ . Профиль такой волны искажается (рис. 1) вплоть до образования неоднозначности (опрокидывания). Точка опрокидывания является, очевидно, точкой перегиба в профиле и в ней, следовательно,  $\partial t / \partial v = 0$  и  $\partial^2 t / \partial v^2 = 0$ . Отсюда можно найти значения  $x = x_*$ ,  $t = t_*$  и  $v = v_*$  в этой точке; в частности, для синусоидальной при  $x = 0$  волны  $v_* = 0$ , и

$$x_* = \frac{\lambda}{(\gamma + 1)\pi M}, \quad (6)$$

где  $\lambda = 2\pi c / \omega$  — длина волны,  $M = v_m / c$  — число Маха в волне.

При  $x > x_*$  в решении появляются движущиеся разрывы — ударные волны, и уравнения нелинейной акустики должны быть дополнены граничными условиями на разрыве. Последние получаются из законов сохранения и показывают, в частности, что на таком скачке всегда имеет место диссипация энергии (скачок энтропии); существенно, однако, что изменение энтропии не зависит от конкретного механизма диссипации и пропорционально кубу скачка давления. Скорость слабого скачка  $u_p$  равна полусумме скоростей простой волны ( $u_n = c + \frac{\gamma+1}{2} v$ ) по обе стороны от него, т.е.

$$u_p = c + \frac{\gamma+1}{4} (v_1 + v_2), \quad (7)$$

где индексы 1 и 2 обозначают величины до и после скачка.

Наличие скачков параметра приводит к отражениям, усложняющим движение в непрерывной области. Однако для слабых волн ( $M \ll 1$ ) отраженная волна имеет порядок  $M^3$ . (запомним, что неподвижный скачок порядка  $M$  дает отраженную волну порядка  $M^2$ , но в данном случае  $u_p$  и  $u_n$  отличаются лишь на величину порядка  $M$ , что еще уменьшает отражения — при  $u_p = u_n$  отражений не бы-

ло бы вовсе). Поэтому волна за скачком остается простой с точностью до величин порядка  $M^3$ , и скачок просто "съедает" неоднозначную часть этой волны. При этом из (7) следует простой рецепт определения положения разрыва в каждый момент: площади отсекаемых участков простой волны перед и за разрывом должны быть равны ( $\Delta_1 = \Delta_2$  на рис. 1). На очень больших расстояниях волна приобретает пилообразный профиль (рис. 1в), причем амплитуда скачка ( $v_p = v_2 - v_1$ ) затухает по закону

$$v_p \approx \frac{2C_0\pi}{(\gamma+1)kx} \quad (8)$$

т.е. затухание неэкспоненциально. Интересно отметить, что  $v_s$  вообще не зависит от начальной амплитуды  $v_m$ , т.е. среда действует как своеобразный ограничитель мощности; так, в воде на расстояние в  $100\lambda$  можно передать не более  $100 \text{ вт/см}^2$  [1].

Для сравнения приведем аналогичный результат для одиночного импульса сжатия, который соответствует полупериоду уже рассмотренной синусоиды при  $0 < t < T_u = \pi/\omega$ . Ясно, что до образования разрыва ничего нового нет - импульс деформируется как "кусочек" простой волны вплоть до точки (б). Однако далее возникающий разрыв будет развиваться по-другому, т.к. для него в (7)  $v_2 = 0$ , и скорость его больше, чем в знакопеременной волне. В результате импульс, превращаясь в треугольник, неограниченно растягивается и диссипирует медленнее - не  $\sim 1/x$ , как в (8), а  $\sim 1/\sqrt{x}$  [5].

Отметим, еще, что в последнее время был проведен учет поправок третьего порядка в подобных задачах [6]. При этом уже необходимо учитывать отражение волны от разрывов, а также появление некоторых постоянных смещений уровня волны.

### Уравнение Бюргерса

Чтобы отказаться от "разрывного" приближения, необходимо учесть вязкость и теплопроводность в исходной

системе. Если эти факторы достаточно малы (точнее, мало затухание на длине волны), то для одной бегущей волны, переходя к переменным  $x' = x$  и  $\tau = t - x/c$  и учитывая, что зависимость всех величин от  $x'$  гораздо медленнее, чем от  $\tau$ , можно прийти к одному уравнению второго порядка.

$$c_0 \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\gamma+1}{2c_0} v \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\nu}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0 \quad (9)$$

называемому уравнением Бюргерса. Здесь  $\nu = (\frac{4}{3}\eta + \zeta)/2\rho_0$  (при  $\alpha = 0$ ) - коэффициент диссипации.

Отметим прежде всего, что (9) имеет стационарное решение вида

$$\frac{v-v_2}{v-v_1} = \exp\left[-\frac{(\gamma+1)c_0}{4\nu}(v_2-v_1)\xi'\right], \quad (10)$$

где  $\xi' = \tau - x'/(u_p - c)$ , а  $u_p$  - скорость волны. Это решение описывает переход между двумя различными значениями  $v = v_1$  и  $v = v_2$ , а  $u_p$  удовлетворяет (7). Таким образом, имеем стационарную ударную волну, ширина которой  $\delta$  - порядка  $\nu(v_2 - v_1)$ .

Уравнение Бюргерса - одно из немногих уравнений нелинейных волн, для которого известно общее решение [7].

Заменой  $v = \frac{4\nu}{(\gamma+1)c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \Phi$  оно сводится к линейному уравнению теплопроводности:  $\Phi_{x'} - (\nu/c^3)\Phi_{\tau\tau} = 0$ , решение которого хорошо известно. Результат (при синусоидальном граничном условии) существенно зависит от акустического числа Рейнольдса  $Re = v_m \lambda / \nu$ . Если  $Re \ll 1$ , то волна экспоненциально затухает, оставаясь практически синусоидальной - нелинейность не успевает проявиться на интервале затухания. Если же  $Re \gg 1$ , то сначала волна близка к римановой (4) и на расстоянии  $x_*$  (см.(6)) образуется крутой участок, который близок к стационарной ударной волне (10), так что общий профиль приближается к пилообразному, затухая как  $x^{-1}$ . Однако на еще больших расстояниях волна снова становится синусоидальной



с частотой  $\omega$  (высшие гармоники затухают быстрее), и затухание экспоненциально (рис. 2г). На этом этапе фактически уже  $R_e < 1$ ; при этом амплитуда волны не зависит от  $V_m$ . Таким образом, важная задача об искажении бегущей плоской волны наибольшей амплитуды в диссипативной среде решается полностью.

### Цилиндрические и сферические нелинейные волны

Задачи с цилиндрической или сферической симметрией существенно сложнее "плоских" — уже потому, что на оси или в центре симметрии амплитуда волны в линейном приближении расходится, и нелинейность, в сущности, нельзя считать малой повсюду. Относительно просты задачи о поведении волны на больших расстояниях от оси или центра (при  $z \gg \lambda$ ), где кривизна фронта волны мала, и можно пользоваться "плоскими" решениями, исправленными с учетом расходимости или сходимости волны (отметим, что такой подход впервые предложил Ландау [8]). Это исправление для слабых волн можно проделать следующим образом (рассматриваем для определенности сферический случай). Вдоль каждой из характеристик сохраняется теперь не  $V$ , а  $\xi = V^2$ , как в линейном случае. Тогда интегрируя уравнение характеристики  $dz/dt = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{V}{z}$ , получим

$$v = v^{-1} \mathcal{F} \left( t - \frac{z}{c_0} + \frac{\gamma+1}{2c_0^2} \frac{v}{z} \ln z \right), \quad (11)$$

где  $\mathcal{F}$  — снова произвольная функция. Если при некотором  $z = z_0$  задан синусоидальный источник с амплитудой  $V_m$ , то, как легко получить из (11), радиус образования разрыва равен

$$z_* = z_0 e^{R_* / z_0}, \quad (12)$$

где  $R_* = \lambda c_0 / (\gamma+1) \pi V_m$  — согласно (6), это — расстояние образования разрыва в однородной среде при тех же граничных условиях. Таким образом, в расходящейся волне

$\gamma_*$  может быть существенно больше  $R_N$  - из-за уменьшения амплитуды волны нелинейные искажения проявляются слабее. Наоборот, в сходящейся волне (для нее следует положить  $R_N < 0$ ) разрыв образуется скорее, чем в плоской.

На больших расстояниях, когда профиль волны становится треугольным, для амплитуды скачка вместо (8) имеем

$$v_p = \frac{2c_0}{(\gamma+1)kz_0} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) \right]^{-1}, \quad (13)$$

т.е. волна снова "забывает" о своей начальной амплитуде  $v_m$ .

Эти решения могут быть дополнены учетом вязкости и теплопроводности, так что при больших  $z$  получается некоторое обобщение уравнения Бюргера (9), позволяющее, как и выше, выделить различные характерные этапы искажения волны вплоть до ее "возвращения" к синусоидальной форме [10].

Нетрудно рассмотреть и распространение одиночного сферического импульса [8,9]. Необходимо, однако, иметь в виду, что уже в линейной случае такой импульс не может быть однополярным - давление в нем обязательно меняет знак, так что  $\int p' dt = 0$ . Это обстоятельство (замеченное Ландау) связано с тем, что в сферической волне потенциал вида  $f(t - z/c)/z$  не может изменяться между двумя постоянными значениями, одно из которых отлично от нуля. Отсюда следует, что при учете малой нелинейности в импульсе образуется не менее двух разрывов, так что получается "N-волна" (рис.2). Это обстоятельство существенно, во всяком случае, для области вблизи центра, где протяженность волны сравнима с  $z$ . Поведение волны вблизи центра в условиях, соответствующих нелинейной акустике, вообще исследовано мало; имеющиеся результаты относительно сходящихся волн [11] основаны на довольно грубых приближениях.

Проблемы нелинейного распространения сферических волн представляют интерес, например, для расчета мощных концентраторов, фокусирующих ультразвук в центре сферического излучателя [1], а также для теории роста и захлопывания кавитационных пузырьков в жидкости (проблема кавитации вообще имеет довольно близкое отношение к нелинейной акустике) [1,11]. Наконец, подобные задачи возникают при анализе звукового поля в волновой зоне мощных излучателей, где волна является квазисферической, но с некоторым угловым распределением интенсивности. Если все существенные нелинейные искажения волны происходят в волновой зоне, то для каждого направления, по-существу, верны формулы типа (11)–(13), где, однако  $U_m$ ,  $U_p$  зависят от направления. Интересно отметить, что, в соответствии с (13), на больших расстояниях угловая зависимость исчезает, так что диаграмма направленности излучателя становится практически изотропной [12].

### Нелинейная геометрическая акустика и "квазиакустика"

Простое решение, приведенное выше для сферической волны, по-существу, опиралось лишь на то обстоятельство, что параметры волны мало изменяются на масштабе порядка ее длины. Поэтому аналогичная методика эффективно "работает" и в более сложных случаях, когда параметры среды произвольно, но достаточно плавно изменяются в пространстве или даже во времени. Тогда в линейном приближении справедлива обычная или "временная" геометрическая акустика и распространение волны происходит по лучам типа  $d\vec{r}/dt = c(\vec{r}, t) \cdot (\vec{r}/r)$ . При малой нелинейности можно ввести аналогичные лучи, мало отличающиеся от "линейных", однако при распространении вдоль луча (точнее, лучевой трубки) существенно сказываются нелинейные искажения волны [13]. Для неподвижной неоднородной среды эти искажения описываются формулой [13,14].

$$v = q(\ell) \mp \left\{ t - \int_0^{\ell} \frac{d\ell'}{c_0(\ell')} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{v}{q(\ell)} \int \frac{q(\ell') d\ell'}{c_0^2(\ell')} \right\}, \quad (14)$$

где  $\ell$  - расстояние вдоль луча,  $q(\ell) \sim \sqrt{c_0/\rho_0 \Delta}$ ,  $\Delta$  - сечение лучевой трубки. Это решение (квазипростая волна) дает возможность как и выше, проследить за образованием и дальнейшим затуханием разрыва. Один из практически интересных примеров - одномерная задача о распространении плоской волны вверх или вниз в изотермической атмосфере, находящейся в поле тяжести (плотность меняется как  $e^{-x/h}$ ,  $h = \text{const}$ ) [14,15,20]. При этом в линейном приближении амплитуда  $v$  меняется как  $e^{x/2h}$ . Поэтому при распространении вниз амплитуда столь быстро падает, что при достаточно малом  $v_m$  разрыв вообще не возникает - нелинейность быстро исчезает. Наоборот, при распространении вверх нелинейность (число Маха) растет, и разрыв образуется существенно быстрее, чем в однородной среде. Далее диссипация разрыва настолько интенсивна, что знакопеременной волне его амплитуда перестает расти и стремится к постоянному значению  $v_{\infty} \approx c_0^2/(\gamma+1)\omega h$ , опять-таки не зависящему от  $v_m$  [15].

Заметим еще, что в нестационарной среде, когда  $c_0$  в каждой точке зависит от времени [14], энергия волны изменяется уже до образования разрыва за счет работы сил, изменяющих параметры среды.

Существенный интерес представляют также задачи о дифракции акустических волн конечной амплитуды. Такие задачи, как правило, весьма сложны, поскольку даже линейная теория дифракции волн сложной несинусоидальной формы почти не развита. Несколько проще обстоит дело с учетом дифракции в звуковых пучках с узким угловым спектром (параксиальные пучки). Поскольку такой пучок распространяется преимущественно в одном направлении (ось  $x$ ), то, вводя переменную  $\xi = t - x/c$ , можно считать, что производные величин в волне по переменным

$y$  и  $z$  - малые порядка  $\frac{\kappa y, z}{k} \sim \alpha$ , где  $\alpha$  - угловой разброс волновых чисел, а производные по  $x' = x$  при  $\xi = \text{const}$  - порядка  $1 - \frac{\kappa z}{k} \sim \alpha^2$ . В результате исходные уравнения акустики приводятся к виду [16,17]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial x'} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u + \frac{\gamma+1}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( v \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\nu}{c_0^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}, \quad (15)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , а параметр  $\nu$  (тот же, что и в (9)) определяет диссипацию. Это уравнение получено в том же приближении, что и хорошо известное теперь параболическое уравнение квазиоптики (здесь лучше сказать "квазиакустики") и переходит в него для случая гармонических волновых пучков в линейной среде. Однако в нелинейном случае, ввиду существенной несинусоидальности волны в акустике (малая дисперсия) такого перехода сделать нельзя (в отличие, например, от оптики, где нелинейные волны могут быть близки к синусоидальным из-за сильной дисперсии).

В одномерном случае ( $\Delta_{\perp} = 0$ ) из (15) получается уравнение Бюргера (9). Отметим, что если уточнить уравнения (9) и (15), добавляя в них члены следующих порядков малости, то эти члены содержат более высокие производные, чем оставленные в (15) [18], т.е. в следующих приближениях порядок уравнений повышается.

Решений конкретных задач, даже в рамках уравнения (15), в настоящее время мало. Удастся рассмотреть, в частности, распространение квазипростой волны без учета дифракции и диссипации, но с учетом влияния нелинейности на направление луча [18]. При этом импульс сжатия сокращается во времени и расширяется в поперечном направлении, а импульс разрежения, наоборот, удлиняется по времени и сужается в пространстве. Аналогичная задача решена для сферического случая [19].

## Взаимодействие акустических волн

Для нелинейных взаимодействий плоских волн в акустике определяющую роль снова играет отсутствие дисперсии. Наиболее эффективными (накапливающимися) являются, как известно, резонансные взаимодействия, при которых выполняются законы сохранения для энергий и импульса соответствующих квантов (фононов). При квадратичной нелинейности, обычной в акустике, наиболее сильно проявляются процессы типа

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3, \quad (16)$$

где  $\omega$  и  $\vec{k}$  — частоты и волновые числа взаимодействующих волн. Поскольку для всех волн, ввиду отсутствия дисперсии,  $\omega_i = c|k_i|$ , то, как легко видеть, (16) может выполняться только при  $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_2 \parallel \vec{k}_3$ , т.е. для волн, распространяющихся в одном направлении — резонансными являются лишь одномерные взаимодействия. Однако для таких взаимодействий обычно нельзя ограничиться тремя избранными частотами: поскольку все их гармоники и вообще все комбинационные частоты распространяются синхронно с первоначальными, для них также выполняются резонансные условия типа (16) и они, вообще говоря, нарастают. Так, если в среде возбуждается гармоническая волна с частотой  $\omega_1$ , то появляется гармоника  $\omega_2 = 2\omega_1$ , затем  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$  и т.д., т.е. в волне накапливаются нелинейные искажения. Это и есть простая волна (4), рассматривавшаяся ранее как целое (с позицией самовоздействия). Ее фурье-разложение дает представление о взаимном обмене энергией между гармониками. Такое разложение для простой волны известно (формула Бесселя-Фубини [1]) — амплитуды фурье-гармоник функции равны

$$u_n(\sigma) = \frac{2u_m}{n\sigma} J_n(n\sigma), \quad 0 < \sigma < 1, \quad (17a)$$

где  $\xi = x/\lambda_n$ ,  $\lambda_n$  - координата образования разрыва, определяемая из (6),  $J_n$  - функции Бесселя. Это разложение верно при  $\xi < 1$ , т.е. до точки образования разрыва. Заметим, что при  $\xi = 1$  амплитуда первой гармоники волны уменьшается лишь на 20%. Удастся написать соответствующее разложение также с учетом поправок порядка  $U_m^2$  [22].

Сравнительно недавно удалось написать аналогичный ряд и для  $\xi > 1$ , а именно [21].

$$U_n(\xi) = \frac{2 U_m}{n\pi} \left[ \sin z_0 + \frac{1}{\xi} \int_{z_0}^{\pi} \cos n(\xi \sin z - z) dz \right], \quad (176)$$

где  $z_0$  - решение уравнения  $z_0 = \xi \sin z_0$ ; можно показать, что  $\sin z_0 = U_p/U_m$ , где  $U_p$  - амплитуда разрыва при данном  $\xi$ . В частности, при  $z \rightarrow \infty$  отсюда имеем  $U_n \sim 1/n$ , что отвечает пилообразному профилю. Качественный ход гармонических компонент волны показан на рис. 3.

При взаимодействии плоских волн под углом может возникнуть лишь слабое (порядка  $M^2$ ) нерезонансное поле на разностной и суммарной частотах, которое может быть найдено методом возмущений. Определенный интерес представляет задача о взаимодействии пучков конечной ширины, когда поле комбинационной частоты излучается из области пересечения пучков (расселение звука на звуке, модуляция звука звуком). Эти эффекты, вызвавшие некоторое время назад довольно оживленную дискуссию из-за сложности расчета излученного поля, могут быть использованы для создания своеобразных приемных акустических систем, в частности антенн [23,24]. Заслуживает упоминания также задача о рассеянии звука на вихревых волнах, возможных в вязкой среде [25].

Дисперсия в акустике. Параметрическое  
усиление и генерация

Таким образом, в обычных условиях из-за отсутствия дисперсии в жидкостях и газах либо вообще нет резонансного взаимодействия волн, либо взаимодействуют сразу много частот. Поэтому серьезные трудности вызывает осуществление большого класса эффектов, связанных с взаимодействием некоторых избранных частот, столь характерным, скажем, для нелинейной оптики. К ним относится, в частности, параметрическое усиление звука — в безграничной среде энергия накачки растрачивается на возбуждение непухных гармоник, что ведет к существенным потерям<sup>+</sup>), так что о большинстве экспериментов по параметрическому усилению и генерации волн в жидкости [26,27] мало что можно сказать кроме констатации эффекта. Поэтому весьма актуальным является вопрос о "дисперсионной нелинейной акустике", т.е. о создании дисперсии, нарушающей соотношения (16) для всех частот, кроме некоторых избранных. Долгое время дисперсия учитывалась лишь для релаксирующих сред, в которых те или иные молекулярные степени свободы возбуждаются с малым запаздыванием  $\tau$  [1]. Однако это запаздывание приводит в первую очередь к потерям, (порядка  $1/\omega\tau$ ) и лишь в следующем приближении — к дисперсии фазовой скорости (порядка  $1/\omega^2\tau^2$ ). Поэтому целесообразно вводить ту или иную искусственную дисперсию. Это возможно, например, при наличии в жидкости пузырьков воздуха, которые ведут себя как акустические осцилляторы с некоторой резонансной частотой, определяемой их размерами, и создают частотную зависимость свойств [30] (правда, эта зависимость,

<sup>+</sup>) В твердом теле ситуация несколько лучше (хотя дисперсия также мала) из-за наличия различных типов волн, позволяющих осуществить взаимодействие под углом [28].



не очень благоприятна для параметрического усиления, поскольку синхронизма нет ни на каких частотах). Другая возможность связана с использованием акустических волноводов [33] — дисперсия в них связана с влиянием границ. Как известно, дисперсионное уравнение для данного типа волны (моды) в волноводе имеет вид  $\omega^2 = c^2(k^2 + \kappa^2)$ , где  $\kappa$  — поперечное волновое число, определяемое размерами сечения волновода и типом волны. Выбирая для взаимодействующих волн моды с разными  $\kappa$ , можно удовлетворить условиям синхронизма. Так, для вырожденного усиления с  $\omega_2 = 2\omega_1$  это условие выполнено при  $\kappa_2 = 2\kappa_1$ . При этом гармоники накачки либо вообще не находятся в синхронизме (как в круглом волноводе), либо значительно ослаблены даже в случае синхронизма, поскольку из-за различия в поперечной структуре мод их взаимодействие слабее (некоторые волны вообще не взаимодействуют из-за ортогональности их поперечных структур даже при выполнении условий (16)). В подобной системе недавно была получена параметрическая генерация ультразвука на субгармонике, амплитуда которой была сравнима с амплитудой накачки [34].

Отметим еще, что для волн в неоднородной атмосфере есть возможность взаимодействий типа (16) под углом за счет пространственной дисперсии, вносимой неоднородностью [35].

### Стоячие волны конечной амплитуды

Краевые задачи нелинейной акустики рассматривались в основном на одномерном примере — продольные колебания в резонаторе (трубе) с отражающими концами. Заметим прежде всего, что, как показал еще Риман, одномерные уравнения газодинамики без учета потерь допускают точное общее решение [3]. Идея решения заключается в том, что, умножая исходную систему уравнений на якобиан  $J = \partial(x, t) / \partial(\rho, u)$ , мы меняем местами

зависимые и независимые переменные, а поскольку исходные уравнения квазилинейны, то уравнения для  $x$  и  $t$  (или, точнее, для некоторой функции от  $x, t$ ) получаются линейными с переменными коэффициентами (преобразование Лежандра). Для зависимостей  $p(\rho)$ , отвечающих идеальным газам, эти уравнения удается проинтегрировать в произвольных функциях. Заметим, что простая волна является здесь особым решением, поскольку в ней  $\rho$  и  $u$  независимы, и  $I=0$ .

Для задач нелинейной акустики это общее решение, однако, пока не было использовано: во-первых, нахождение произвольных функций в решении, удовлетворяющем периодическим начальным или граничным условиям, само по себе является весьма сложной задачей; во-вторых, после образования разрыва все эти решения теряют силу. Поэтому общепринятым методом решения краевых задач является метод возмущений — отыскивается малая поправка  $\rho''$  к линейному решению  $\rho'$  в виде гармонической стоячей волны [36,37]. Эта поправка удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \rho''}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho''}{\partial x^2} = \frac{\gamma+1}{2\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho'^2). \quad (19)$$

Однако, без учета потерь  $\rho''$  остается малым во все моменты времени лишь при условии, что спектр собственных частот неэквидистантен. Если же эти частоты являются целыми кратными низшей из них ( $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ ), то вторая и высшие гармоники попадают в резонанс и поэтому неограниченно (секулярно) растут. Обычный пример — резонатор с твердыми стенками, когда граничные условия имеют вид  $v(0,t) = v(L,t) = 0$ . В этом случае линейные собственные колебания имеют вид  $\rho' = a \cos kx \cos \omega t$ , где  $\omega = n\pi c/L$ ,  $k = \omega/c_0$ , и нелинейная поправка, удовлетворяющая (19) и начальному условию  $\rho''(t=0) = 0$ , равна

$$\rho'' = -\frac{(\gamma+1)a^2}{8c_0^2 \rho_0} (1 - \cos 2\omega t + \omega t \sin 2\omega t) \cos 2kx. \quad (20)$$

При  $\omega t \ll 1/M$ , где  $M$  - число Маха, это решение теряет силу. На рис. 4а показан начальный этап искажения колебаний в таком резонаторе [36]. Что касается вынужденных колебаний в трубе с жесткими стенками, одна из которых периодически колеблется, то таким же образом можно получить, что в установившемся режиме амплитуда второй гармоники неограниченно растет с приближением к каждому резонансу. Правда, если учесть потери, то  $\rho''$  может остаться малым, но лишь при  $Re = (kx_0)kLQ \ll 1$ , где  $x_0$  - амплитуда колебаний стенки, а  $Q$  - добротность резонатора [38].

Укажем теперь другой подход к таким задачам, пригодный и при сильных отражениях волны. <sup>[48]</sup> Представим волну в резонаторе в виде суперпозиции двух бегущих навстречу римановых волн

$$v = \mathcal{F}(x - c_0 t - \frac{\delta+1}{2} t \cdot \mathcal{F}_1) + \mathcal{F}_2(x + c_0 t - \frac{\delta+1}{2} t \cdot \mathcal{F}_2), \quad (21)$$

где  $\mathcal{F}_{1,2}$  - некоторые функции. Мы, таким образом, пренебрегли нелинейным взаимодействием встречных волн, которое, ввиду его несинхронного характера в среднем за период приводит лишь к малым поправкам в решении. Добавляя сюда условие на разрывах, легко учесть диссипацию последних.

Для резонатора с жесткими стенками при начальных условиях  $\rho'(0, x) = 0$ ,  $v(0, x) = v_0 \sin \frac{n\pi}{L} x$ , очевидно,  $\mathcal{F}_1(\xi) = \mathcal{F}_2(\xi) = (v_0/2) \sin \frac{n\pi}{L} \xi$ . Каждая из бегущих волн  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  уже описывалась выше (с заменой  $t \rightarrow x$ ); складывая их, нетрудно получить представление обо всем процессе. Так, при больших  $t$  амплитуды обеих пилообразных волн затухают как  $t^{-1}$  (ср. (8)). Вид колебаний в резонаторе на этом этапе представлен на рис. 4б, в. В данной точке функция  $\rho'(t)$  имеет пилообразный профиль, а  $v(t)$  - вид прямоугольных импульсов.

Таким же путем можно получить резонансную кривую вынужденных колебаний системы при  $Re \gg 1$ , если учесть, что на колеблющейся стенке амплитуды всех гармоник, кроме первой, равны нулю. В результате получим

$$M_{\pm}^2 = \sqrt{\frac{\pi^2 M_{\beta x}^2}{4 \beta^2} + \frac{\Delta^4}{4 \beta^4}} - \frac{\Delta^2}{2 \beta^2}, \quad (22)$$

где  $M_{\beta x} = \omega x_0 / c$ ,  $M_{\pm} = v_p / c$ , а  $2 v_p$  — амплитуда разрыва в резонаторе,  $\Delta = 4\pi\sqrt{2}(\omega - \omega_n)L/c$ ,  $\beta = n\pi(\gamma + 1)$ ,  $n$  — номер резонансной моды. Отсюда следует, что в резонансе  $v_p \sim \sqrt{x_0/n}$ , а ширина резонансной кривой  $\Delta\omega \sim \sqrt{n}x_0$ .

Отметим еще случай открытых концов трубы, когда  $p'(0,t) = p'(L,t) = 0$ . Спектр частот такого резонатора также эквидистантен, но решение уравнения (19) для возмущения с  $p''(x,0) = 0$  дает в этом случае решение, ограниченное для всех  $t$  [37]. Причина этого ясна: правая часть (19) пропорциональна  $\partial f / \partial x$ , где  $f \sim \partial p'^2 / \partial x$  — сила, действующая на поле частоты  $2\omega$ . Работа этой силы равна  $t \int_0^L \overline{f u''} dx$ ; легко видеть, что структура  $v''$  на второй гармонике такова, что этот интеграл равен нулю — сила ортогональна скорости (но для третьей гармоники это уже не так). Ход процесса снова наглядно виден из "концепции простых волн" (21): при отражении от свободной границы  $p'$  меняет знак, поэтому участки сжатия в простой волне становятся участками разрежения и наоборот. Поэтому нелинейные искажения не накапливаются — если они малы на одном пробеге волной расстояния  $L$ , то они малы всегда. Если же разрыв успевает возникнуть на длине  $L$  (что возможно лишь при  $L \gg \lambda$ , т.е. для моды с высоким номером), то при свободных колебаниях волна начнет затухать, но при некоторой амплитуде разрыв исчезнет и затухание прекратится, а волна будет иметь треугольный профиль с конечной шириной фронтов.

Усредненное воздействие звуковых волн на среду  
(детектирование)

В заключение мы кратко обсудим вопрос о том, как акустические волны изменяют усредненные параметры среды. В линейной акустике все величины, относящиеся к волне, одновременно синусоидальны и средних не имеют. Кроме того, из линейных уравнений формально следуют законы сохранения типа

$$\frac{\partial \bar{q}_n}{\partial x} + \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

где для бегущей волны  $\bar{q}_n = c_0 \rho_0 \bar{v}^2$ ,  $\bar{E}_n = \rho_0 \bar{v}^2$ , а черта обозначает усреднение по  $t$  или  $x$ . Естественно считать  $\bar{E}_n$  и  $\bar{q}_n$  средними плотностями энергии и потока энергии, связанными с звуковой волной. Однако, как известно [39,42], ситуация не так проста. Поскольку эти величины квадратичны по  $v$ , то нелинейность может дать поправки того же порядка  $v^2$ . Вообще, учет нелинейности равносильен учету движения среды ( $M = v/c_0$  конечно), а в движущихся средах не всегда очевидно, какую часть энергии отнести к волне. Как известно, например, для плазмы, в таких средах волна может даже иметь отрицательную энергию.

Чтобы решить этот вопрос здесь, следует записать известные точные выражения для  $q$  и  $E$  [3] и вычесть из  $E$  невозмущенное значение. В результате получим, что с волной связаны следующие значения

$$E = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2 \rho'^2}{2\rho_0} + \frac{c_0^2}{\beta - 1} \rho', \quad q = \rho' v + \left( \frac{c_0^2}{\beta} - 1 \right) (\rho_0 + \rho') v \quad (24)$$

Усредняя эти выражения при  $\bar{\rho}' = 0$ ,  $\bar{v} = 0$ , мы получили бы для бегущей волны уже приведенные выражения. Однако дело в том, что средние от  $\rho'$  и  $v$  и по  $t$ ,

и по  $x$  отличны от нуля. Действительно, такая волна имеет вид (4), а разные величины в ней связаны соотношениями (5), из которых видно, что если, например,  $\bar{v} = 0$ , то  $\bar{\rho}'$  и  $\bar{p}'$  отличны от нуля и дают в (24) поправки того же порядка  $v^2$ , что и сами  $\bar{E}$ ,  $q$ . Каковы же эти средние на самом деле? Пусть, волна возбуждается синусоидально колеблющимся поршнем, который в среднем не движется. Тогда скорость частиц газа на поршне (лагранжевы координаты) в среднем равна нулю. Однако в данной точке (эйлеровы координаты)  $v(t)$  несинусоидально, поэтому  $\bar{v}$  в (4) также не синус — появляется поправка порядка  $v^2$  (заметим, что  $\bar{v}^t = \bar{v}^{\xi}$ , где  $\xi$  — аргумент  $\mathcal{F}$  [41]), которая и приводит к отличному от нуля среднему. Затем из (5) легко вычислить средние от  $\rho'$  и  $p'$ . Простой расчёт дает, что  $\bar{\rho}'^t$ ,  $\bar{p}'^t$ ,  $\bar{v}^t$  отрицательны; так,  $\bar{v}^t = -v_m^2/c_0$ . Таким образом, волна меняет усредненное состояние среды. Это не означает, однако, что появился в среднем поток вещества в сторону поршня; легко убедиться, что средний поток массы  $(\bar{\rho}_0 + \bar{\rho}')v^t$  равен нулю (что и так очевидно).

Подставляя эти средние в (24), получаем

$$\bar{q}^t = c_0 \bar{\rho}_0 \bar{v}^2, \quad \bar{E}^t = \bar{\rho}_0 \bar{v}^2 \left[ 1 - \frac{(\gamma+1)c_0^2}{2(\gamma-1)\bar{\rho}_0} \bar{\rho}'^2 \right]. \quad (25)$$

Следовательно, для  $\bar{E}^t$  получается другое выражение, чем при "линеаризованном" подходе. Более того, при  $\gamma < 3$ , т.е. для любого идеального газа  $\bar{E}^t < 0$ , т.е. энергия фиксированной области среды в среднем понижается, что выглядит парадоксом. Однако все становится на свое место, если рассмотреть бегущий пучок конечной протяженности  $\Lambda = c_0 T$ . Его энергия равна  $\bar{q}^t T = c_0 \bar{E}^x \Lambda$ , т.е.  $\bar{q}^t = c_0 \bar{E}^x > 0$ , что ясно и непосредственно из (23). Следовательно,  $\bar{E}_\Lambda = \bar{\rho}_0 \bar{v}^2$  — это средняя по  $x$  плотность энергии в конечном пучке и вообще в звуковом поле, занимающем конечный объем (отметим, что среднее по  $x$  на неподвижном интервале в бегущей волне вообще зависит от времени из-за нестациона-

нарности процесса). Именно такой смысл имеют обычные линейные выражения для  $\epsilon$  и  $q$ . Заметим, что в свое время эти вопросы вызвали длительную дискуссию, сопровождавшуюся рядом ошибочных результатов.

Таким образом, средние в акустической волне, по-существу, зависят от способа ее возбуждения. Наличие вязкости также меняет результат [42,41], однако в плоской волне по-прежнему  $\overline{\rho' v'} = 0$ . Для ограниченных пучков появляется новый эффект - "акустический ветер". Физика дела следующая. При включении такого пучка в нем, как указывалось, в среднем слегка изменяется давление. В результате с боков затекает среда, но если пучок затухает, то равновесие не устанавливается, поскольку в разных точках на оси пучка условия разные. В результате среда (жидкость) начинает течь в направлении затухания волны благодаря силе, связанной с вязким импульсом, при этом, очевидно, вне пучка создается обратное течение (рис.5); такие течения наблюдались экспериментально. Этот процесс описывается уравнением для средних от  $v_1$ ,  $\rho'$ ,  $\rho'$ , которые имеют тот же вид, что и (1), но содержат в качестве внешней силы члены типа  $\overline{v v_\sim^2}$ , где  $v_\sim$  - осцилляторная скорость. Эти уравнения нелинейны, но долгое время рассматривались лишь "линейный ветер", когда нелинейностью можно пренебречь. Наиболее известно решение Эккарта <sup>для</sup> достаточно узкой трубы, где скорость потока - порядка  $\overline{v^2}/c^2$  [1,43]. Лишь относительно недавно стали учитываться нелинейные члены, причем оказывается, что в тех случаях, когда эти члены играют определяющую роль, скорость течения может расти в сторону затухания звука и достигет величины близкой к  $v_\sim$  (а лишь потом падает) [47].

Своеобразные эффекты связаны с процессом установления акустического ветра [44-47]. Линейный поток монотонно растет от нуля до стационарного значения [45]. Нелинейность же приводит к немонотонности процесса установления - зависимость  $u(t)$  имеет максимум [44 - 46]. Оказывается также, что непосредственно вблизи излучате-

ля звука поток направлен к нему, но меняет знак в некоторой точке вблизи излучателя [47]. Эта точка играет существенную роль в процессе установления всего потока вблизи оси, поскольку жидкость переносится из ее окрестности. Вообще же теория акустического ветра представляет собой своеобразный раздел гидродинамики потоков с распределенным внешним воздействием и развита сейчас еще относительно слабо. Заметим также, что этот процесс может рассматриваться как "детектирование" звука, поскольку колебательная энергия переходит в энергию постоянной компоненты (что, как следует из известных соотношений Мэнли-Роу, возможно лишь при наличии диссипации).

### Заключение

Если теоретическое состояние разных разделов нелинейной акустики еще очень "неоднородно", то это тем более относится к ее прикладным аспектам. Здесь наиболее ясная ситуация имеется, пожалуй, в вопросах, "промежуточных" между акустикой и газодинамикой (затухание ударных волн на большом удалении от места взрыва, теория кавитации, распространение сильных волн в атмосферах Земли и Солнца). Упомянем также концентраторы звука. Другие области (параметрические усилители, нелинейные антенны т.п.) только начинают развиваться в прикладном отношении. Так или иначе представляется, что в этом отношении нелинейная акустика еще не сказала своего последнего слова.



## ЛИТЕРАТУРА

1. А.К.Зарембо, В.А.Красильников. Введение в нелинейную акустику. Наука, М., 1966.
2. Г.А.Остроумов. Основы нелинейной акустики. Изд. ЛГУ, 1967.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред, М., ГТТИ, 1953.
4. А.И.Калачев. Акуст. ж., 9, вып.2, 187, 1966.
5. Р.Курант, К.Фридрихс. Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ., М., 1950.
6. О.В.Руденко, С.И.Солуян, Р.В.Хохлов, Акуст. ж., 15, № 3, 1969.
7. С.И.Солуян, Р.И.Хохлов, Вестн. МГУ, Сер. физ. № 352, 1961.
8. Л.Д.Ландау. Собрание трудов, т.1, стр.504, "Наука", М., 1969.
9. **G.V.Whitham, Comm. Pure Appl. Math., 6, n. 3, 1953.**
10. К.А.Наугольных, С.И.Солуян, Р.В.Хохлов. Акуст. ж., 9, № 1, 54, 1963.
11. В.А.Акуличев и др. Акуст. ж., 13, № 3, 321, 1967.
12. Л.А.Островский, В.Е.Фридман. Препринт НИРФИ, № 12, Горький 1971, Акуст.ж., 18, № 4, 1972.
13. К.Е.Губкин. В сб. Некоторые проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961.
14. Л.А.Островский, ПММ, 27, № 5, 824, 1963.
15. И.И.Романова. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и гидросферы, 6, т. 2, 134 (1970).

16. С.А.Заболотская, Р.В.Хохлов. Акуст. ж., 15, № 1, 1969.
17. В.П.Кузнецов. Акуст. ж., 16, № 4, 548, 1970.
18. Б.И.Максимов, Г.Д.Михайлов. Труды Московского института народного хозяйства, вып. 96, М., 1970.
19. С.А.Заболотская, Р.В.Хохлов. Акуст. ж., 16, № 1, 1970.
20. С.А.Каплан, Л.А.Островский, Солнечные данные, № 6, 53, 1963.
21. В.П.Кузнецов, Автореферат диссертации, Москва, 1971.
22. В.П.Докучаев, Акуст. ж., (в печати).
23. В.И.Зверев, А.И.Калачев, Акуст. ж., 16, № 2, 245, 1970.
24. Х.О.Берктей, в сб. "Подводная акустика", МИР, М., 1970, стр.325.
25. Н.И.Пушкина, Р.В.Хохлов. Акуст. ж., 17, № 1, 167, 1971.
26. **A. Korpel, R. Adler, Phys. Lett., 7, 106, 1965.**
27. Г.Д.Михайлов, ДАН СССР, 188, № 3, 502, 1969.
28. **V. Chao, J. Appl. Phys., 10, n. 10, 1970.**
30. Е.А.Заболотская, С.И.Солуян, Р.В.Хохлов. Акуст. ж., 12, № 2, 1966.
31. З.А.Гольдберг. ДАН СССР, 306, № 3, 1971.
32. Е.А.Заболотская, С.И.Солуян. Акуст. ж., 13, № 2, 296, 1967.
33. Л.А.Островский, И.А.Папилова. Препринт НИРФИ № 19, Горький, 1971, Акуст. ж., (в печати).
34. Л.А.Островский, И.А.Папилова, А.М.Сутин. Письма в ЖЭТФ, 15, № 8, 456, 1972.

35. Л.А.Островский. Труды У1 Всесоюзной акуст. конференции, Москва, 1968, Б 1У 5.
36. А.А.Эйхенвальд. УФН, 14, № 5, 1934.
37. М.А.Исакович, Акуст. ж., 6, № 3, 1960.
38. Л.К.Зарембо. Акуст. ж., 16, № 1, 58, 1970.
39. **P.J. Westervelt, JASA, 22, 319, 1950.**
40. Н.Н.Андреев. Акуст. ж., 1, № 1, 3, 1955.
41. Л.А.Островский. Акуст. ж., 14, № 1, 82, 1968.
42. З.А.Гольдберг. Доклад на 5-м Международн. акуст. конгрессе, 1965.
43. А.И.Ивановский. Теоретическое и экспериментальное изучение потоков, вызванных звуком, Гидрометеоиздат, М., 1968.
44. Н.Г.Семенова, Акуст. ж., 16, № 4, 624, 1970.
45. С.И.Солуян, О.В.Руденко. Акуст. ж., 17, № 1, 1971.
46. С.И.Солуян, О.В.Руденко. Акуст. ж., 17, № 2, 1971.
47. Л.А.Островский, И.А.Папилова. Акуст. ж. (в печати).
48. **S. Temkin. JASA, 45, n. I, 224, 1969.**  
**M.P. Mortell. Int. J. Engng., 9, 175 (1971).**

## ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

- Рис. 1. Эволюция периодической волны при  $Re \gg 1$ .
- Рис. 2. Изменение скорости частиц в сферическом импульсе.
- Рис. 3. Изменение первых трех гармоник волны вдоль  $x$  при  $Re \gg 1$ .
- Рис. 4. Колебания скорости частиц в нелинейном резонаторе с жесткими стенками: а) начальный этап ( $\omega t \approx 1/M$ ); б) после развития разрыва (цифры обозначают моменты времени через  $1/8$  периода); в) временная зависимость скорости частиц (1 - в середине резонатора, 2 - на расстоянии  $1/4$  его длины от одного из концов).
- Рис. 5. Структура звукового ветра в свободном пространстве ( $\alpha$  - ширина звукового пучка).

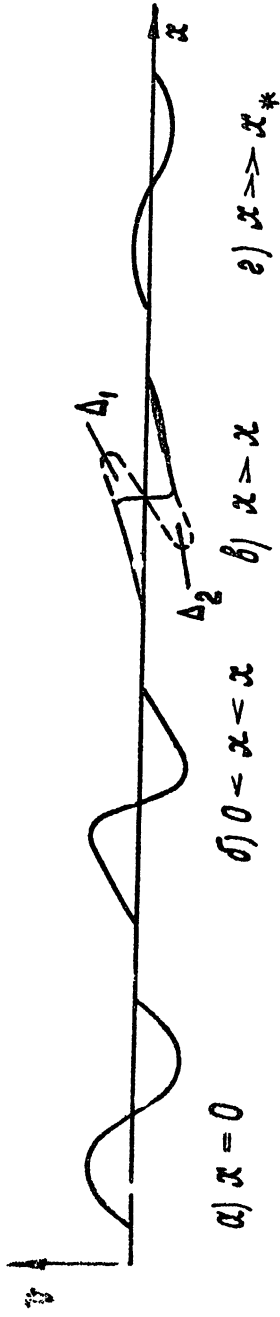


Рис. 1

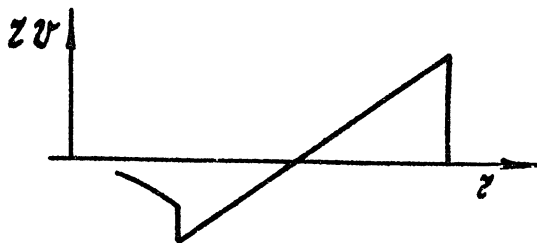


Рис. 2

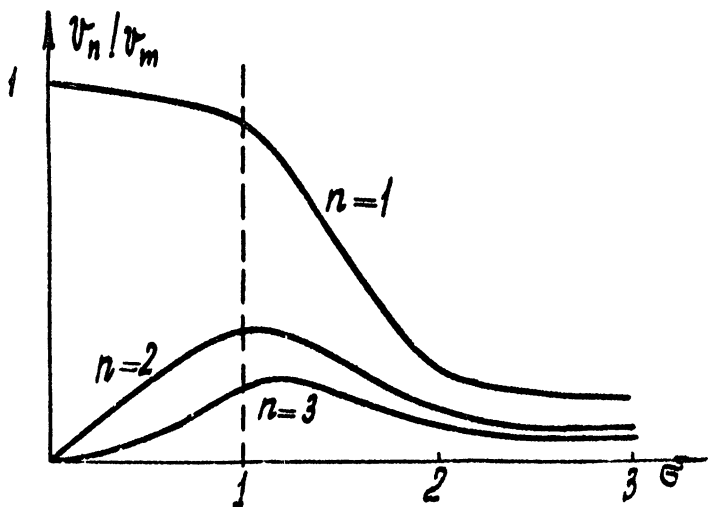


Рис. 3

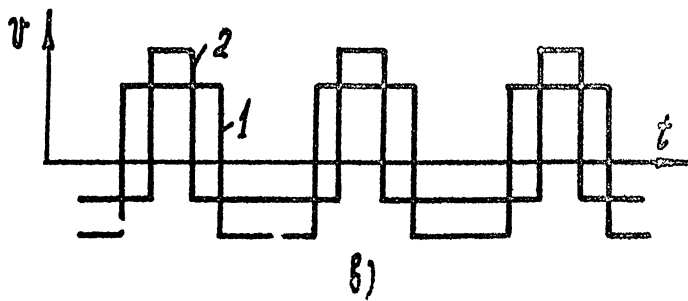
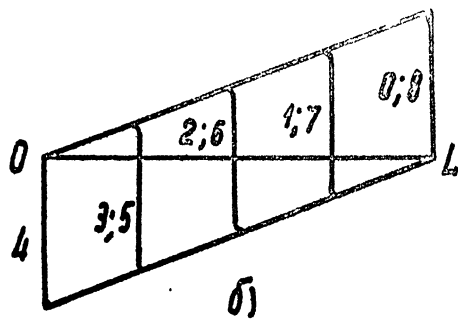
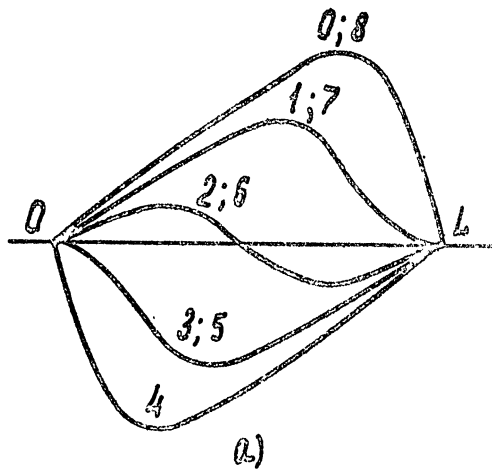


Рис. 4.

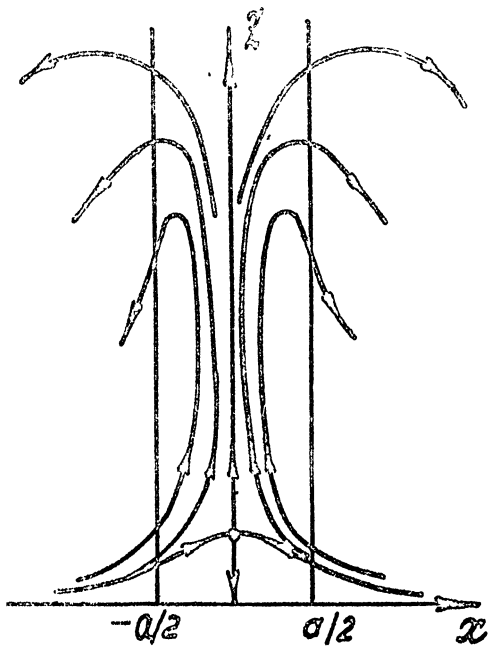


Рис. 5