

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 33

Л.А.Островский, Е.Н.Пеллиновский

ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

г.Горький,
1973

ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ^{†)}

1. Введение

Волны на воде, пожалуй, единственный вид волнового движения, видимый в деталях простым глазом без применения сложной измерительной техники. На поверхности воды удастся наблюдать едва ли не все известные сейчас эффекты, связанные с распространением волн в нелинейных диспергирующих средах, и большинство из них было впервые исследовано именно для таких волн. Так, существование нелинейных стационарных (распространяющихся без искажения формы) волн было открыто еще в 1802 г. Герстнером. Уединенная волна (солитон) наблюдалась экспериментально в 1844 г. Расселом. Уравнение Кортевега-де Вриза, применяющееся сейчас для описания волн различной физической природы, было выведено в 1895 г. для гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости. Явление синхронизма использовалось еще в 30-х годах прошлого века для транспортировки барж. Подобных примеров можно было бы привести гораздо больше.

По своим размерам волны на поверхности воды очень разнообразны. Их длина колеблется от миллиметров до тысячи километров, а высота (расстояние от самой высокой до самой низкой точки волны) — от долей миллиметра до десятков метров. Скорость волны может достигать 700 км/час. Океанские волны принято разделять по их периоду:

Приливные волны — самые длинные; их длина (теоретически) составляла бы половину окружности земного шара, если бы не мешали материки, а период — от 12 до 24 часов. Образование приливов связано, как известно, с притяжением Луны и Солнца. Из-за большой длины нелинейность фактически не сказывается на их распространении в открытом море; вблизи берега нелинейные искажения профиля становятся заметными.

Цунами — волны от подводных землетрясений или извержений вулканов с периодом от 10 мин. до часа. В от-

^{†)} Прочитано на Республиканской школе по нелинейным колебаниям в распределенных системах (Горьковская обл., март 1972).

крытом море цунами почти не ощутили (типичный уклон поверхности моря порядка 10^{-4}), однако, в береговой зоне высота волны резко возрастает (до десятков метров). Поэтому цунами, как известно, весьма опасны.

Бор — образуется при вхождении прилива в устье реки или пролив. Передний склон волны представляет собой резкий : ерепад (до нескольких метров).

Ветровые волны — наиболее характерный тип движения на поверхности моря. Различают зыбь с периодом 6–16 сек., развитое волнение (5 + 12 сек.), мелкие ветровые волны (1 + 4 сек.). Их образование, как уже видно из названия, связано с действием ветра.

Наконец, капиллярные волны (рябь) имеют в воде длину меньшую 1,7 см.

На рис. 1 приведен спектр реального морского волнения, взятый из [1]. Популярное описание основных свойств воли на воде содержится, например, в книгах [1 – 2].

Теорией волновых движений на поверхности жидкости занимались почти все крупные математики и физики прошлого (Ньютон, Лагранж, Эйри, Стокс, Релей). В настоящее время эта теория представляет собой классический раздел гидродинамики. Тем не менее, волновые движения в реальной жидкости (на поверхности моря и океана) оказались существенно сложнее, чем это следует из простейших теоретических моделей (приведем высказывание Релея: "Основным законом морского волнения является явное отсутствие какого-либо закона").

В последние 20 лет наблюдается новый прогресс в исследовании волновых процессов в жидкости. Во-первых, появились достаточно надежные приборы, регистрирующие волновое движение (волнографы), с помощью которых можно регулярно производить детальные количественные исследования параметров воли. Во-вторых, увеличилось число и объем экспериментальных исследований воли в лабораторных условиях, которые позволяют выделить тот или иной волновой процесс "в чистом виде". Наконец развиты новые методы в нелинейной теории воли, позволяющие изучать различные нестационарные процессы на поверхности жидкости.

Здесь мы кратко изложим как некоторые "классические" сведения о волнах на воде, так и ряд новых результатов, полученных в последние годы.

2. Уравнения для волн на поверхности жидкости

Математический анализ волн на поверхности жидкости обычно связан с решением уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g}, \quad (2.1)$$

где \vec{v} - скорость частиц жидкости, ρ - плотность, p - давление и \vec{g} - ускорение силы тяжести. Уравнения (2.1) необходимо дополнить граничными условиями. Одно из них выражает требование отсутствия отрыва частиц от дна

$$v_z = 0 \quad \text{при } z = -h \quad (2.2)$$

(для вязкой жидкости следует использовать условие прилипания частиц на дне, т.е. $\vec{v} = 0$). На свободной поверхности должны выполняться динамическое условие

$$p = p_0 - \frac{\alpha \Delta \eta}{[1 + (\nabla \eta)^2]^{3/2}} \quad \text{при } z = \eta(x, y, t) \quad (2.3)$$

и кинематическое

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \eta = v_z \quad \text{при } z = \eta(x, y, t). \quad (2.4)$$

Здесь α - коэффициент поверхностного натяжения, p_0 - атмосферное давление, $z = \eta(x, y, t)$ - возвышение свободной поверхности над невозмущенной $z = 0$, h - глубина жидкости, последний член в (2.3) определяет поверхностное натяжение (формула Лапласа).

Приведенные выше уравнения записаны в эйлеровых переменных. Наряду с ними часто используют Лагранжеву форму уравнений гидродинамики:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \left(\frac{p}{\rho} + g z \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$x_i = \{x, y, z\}, \quad x_{0j} = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad j=1, 2, 3,$$

где x_0, y_0, z_0 координаты жидкой частицы в некоторый момент времени.

Важным классом движений на поверхности жидкости являются потенциальные волны, для которых $\text{rot } \vec{v} = 0$. Заметим, что если движение в начальный момент было потенциальным, то оно останется таковым и далее [3]. В этом случае, вводя потенциал скорости $\Phi (\vec{v} = \nabla \Phi)$, можно привести уравнения (2.1)–(2.4) в эйлеровых переменных к виду:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi &= 0 & (-h < z < \eta) \\ \partial \Phi / \partial z &= 0 & \text{при } z = -h \end{aligned} \right\} (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \frac{\alpha}{\rho} \Delta \eta + g \eta &= 0 & (z = \eta) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \eta \nabla \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} & (z = \eta) \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Сложность решения уравнений для поверхностных волн связана с их принципиальной неоднородностью, причем нелинейными являются граничные условия (2.3), (2.7). В ряде случаев удается перейти к более простым приближенным уравнениям. Существенное упрощение исходной системы возможно для волны на поверхности "мелкой воды" ($h \ll \lambda$, где λ - характерная длина волны). В этом случае ско -

рость частиц жидкости фактически не зависит от глубины, на которой они расположены, что эквивалентно пренебрежению v_z и предположению, что давление p определяется, как и в гидростатике, выражением $p = p_0 + \rho g(h + \eta)$. Тогда из (2.1) получаем следующие основные уравнения "теории мелкой воды", справедливые при любой амплитуде волн, лишь бы кклон водной поверхности был мал [3 - 5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} + g \nabla \eta &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} [(h + \eta) \bar{u}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(\bar{u} = \{v_x, v_y\}).$$

Заметим, что уравнения (2.8) соответствуют недиспергирующей системе и эквивалентны уравнениям газодинамики с показателем адиабаты $\gamma = 2$, что позволяет установить определенную аналогию между волнами на поверхности жидкости и звуковыми волнами в газе.

Указанные уравнения можно "подправить", учтя малые величины порядка v_z/v_x и нелокальность в связи p и η , приводящие к появлению дисперсии. Соответствующие уравнения были получены Буссинеском [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} + g \nabla \eta &= \frac{\alpha}{\rho} \nabla \Delta \eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} [(h + \eta) \bar{u} + \frac{h^3}{3} \Delta \bar{u}] &. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для плоской бегущей волны малой, но конечной амплитуды, можно понизить порядок уравнений (2.9), в результате получается известное уравнение Кортвега-де Вриза [7]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \left(1 - \frac{3\eta}{2h}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{gh} \left(\frac{h^2}{6} - \frac{\alpha}{2\rho g}\right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (2.10)$$

Для волн на "глубокой воде" не удается провести сколько-нибудь значительных упрощений и для их анализа приходится использовать непосредственно исходные уравнения (2.1) - (2.7).

3. Дисперсионные характеристики волн на воде

Рассмотрим волны малой амплитуды в линейном приближении, считая их потенциальными. В этом случае можно считать, что граничные условия (2.7) заданы не на неизвестной поверхности $z = \eta$, а на плоскости $z = 0$. В результате, отыскивая потенциал в виде $\Phi = \Psi(z) \exp i(\omega t - kx)$ и разделяя переменные в (2.6), (2.7), найдем, что $\Psi(z) = -ch k (z + h)$, причем ω и k связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = (g + \alpha k^2 / \rho) k \operatorname{th} kh. \quad (3.1)$$

Рассмотрим сначала гравитационные волны для которых можно пренебречь силами поверхностного натяжения ($\alpha k^2 \ll \rho g$) и из (3.1) имеем $\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$. Как уже отмечалось, различают длинные волны ("мелкая" вода), для которых $kh \ll 1$ и $\omega \approx \sqrt{gh} k$ и короткие волны ("глубокая" вода), для которых $kh \gg 1$ и $\omega = \sqrt{g} k^{3/2}$. В первом случае $\omega \sim k$, т.е. дисперсия отсутствует. Это видно уже из уравнений (2.8), не содержащих независимых масштабов времени и координаты. Более точное разложение дает $\omega = \sqrt{gh} k (1 - h^2 k^2 / 6)$, т.е. появляется дисперсия, соответствующая переходу к уравнениям Буссинеска. На глубокой воде $\omega \sim k^{3/2}$, т.е. всегда имеется дисперсия, обусловленная нелокальной зависимостью между давлением и высотой жидкости. Фазовая скорость гравитационных волн ($v_{\phi} = \sqrt{g \operatorname{th} kh} / k$) падает с ростом частоты (отрицательная дисперсия). Поскольку групповая скорость ($v_{gp} = d\omega / dk$) также падает с ростом ω , то из области возникновения к берегу приходят сначала длинные волны, а затем короткие. Вот почему, часто зыбь (от-

носительно длинные ветровые волны) называют предвестником шторма. Заметим, что на глубокой воде $v_{z\rho} \approx v_\phi / 2$. С этим обстоятельством связан тот интересный факт [2], что угол между "лучами", идущими от носа корабля, всегда один и тот же — примерно 39° (при условии, что скорость корабля меньше \sqrt{gh} , иначе возбуждаются длинные волны, для которых $v_{z\rho} \approx v_\phi$).

Если найти выражения для скорости частиц, то оказывается, что в общем случае частицы жидкости движутся по эллипсам, которые для длинных волн сильно вытянуты вдоль оси распространения, а для коротких волн близки к окружности. При этом на глубокой воде в волновом движении участвует лишь узкий приповерхностный слой жидкости толщиной порядка длины волны, в то время как на мелкой воде все частицы участвуют в движении.

Средняя глубина океана составляет примерно 5 км. Поэтому для волн с $\lambda > 5$ км ($T > 20$ сек) океан всегда является "мелким". Это относится к приливам и часто к цунам. Для волн других типов мелкой является лишь береговая зона, в которой глубина значительно уменьшается.

Другой предельный случай — капиллярные волны ($\alpha k^2 \gg \rho g$) для которых основную роль играет поверхностное натяжение. Дисперсионное соотношение (3.1) для капиллярных волн имеет вид $\omega = \sqrt{\alpha \rho^{-1} k^3} \tanh kh$. Их фазовая скорость с увеличением частоты растет (положительная дисперсия). В реальных условиях $kh \gg 1$, и, следовательно, $\omega = \sqrt{\alpha/\rho} k^{3/2}$.

Зависимости ω и v_ϕ от k для поверхностных волн, соответствующие (3.1) приведены на рис. 2.

4. Стационарные нелинейные волны

Общее решение исходных уравнений в нелинейном случае найти не удастся. Поэтому сначала мы рассмотрим стационарные бегущие волны, в которых все величины зависят от x и t через переменную $\xi = x - ct$.

А) Волны на мелкой воде. В соответствии с общей теорией нелинейных волн следует ожидать, что наиболее силь-

но нелинейные эффекты сказываются в отсутствие дисперсии. т.е. для длинных гравитационных волн. Однако в рамках "теории мелкой воды" (уравнения (2.8)) волновые движения являются неустановившимися (см. далее). Для существования стационарных волн, как известно, необходимо совместное действие как нелинейности так и дисперсии. Если оба фактора малы, то установившиеся волны можно исследовать на основе уравнения Кортевега-де Вриза (2.10). Стационарные решения уравнения (2.10) - кноидальные волны - выражаются через эллиптические интегралы. Их частным случаем является уединенная волна (солитон):

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{3H}{4h}} \frac{x - \sqrt{g(h+H)} t}{h}, \quad (4.1)$$

где H - высота волны. Длина солитона Λ зависит как от глубины жидкости, так и от высоты волны: $\Lambda \sim h\sqrt{h/H}$. Для волн в открытом океане ($h \sim 5$ км) с высотой $H \sim 1$ м получаем $\Lambda \sim 400$ км. В береговой зоне длина солитона может быть значительно меньше (при $h \sim 100$ м и $H \sim 10$ м $\Lambda \sim 400$ м). Любопытно, что, несмотря на работы Буссинеска, Релея и др., получивших решение (4.1), долгое время существование стационарной уединенной волны подвергалось сомнению. Лишь спустя сто лет после эксперимента Рассела, впервые наблюдавшего солитон, Лаврентьеву (1943 г.), а также Фридрихсу и Хайерсу (1946 г.) удалось доказать соответствующие теоремы существования.

При больших высотах волны параметр h/Λ уже не мал, и уравнения Буссинеска, как и уравнение Кортевега-де Вриза неприменимы. Для исследования нелинейных волн произвольной высоты необходимо удерживать большее число членов в разложении потенциала скорости по параметру h/Λ (или v_x/v_x) и в пределе переходить к интегродифференциальным уравнениям для η (см., например, [8]). Исследование подобных уравнений связано с серьезными математическими трудностями. Наибольший интерес здесь вызывает существование предельной волны, имеющей максимальную возможную амплитуду (при данной длине). Впер-

вые этот вопрос исследовался в работе [9], а затем в [10 - 12], где с помощью различных приближений получено, что в предельной волне скорость частиц жидкости на гребне совпадает со скоростью волны. При этом гребень волны образован двумя ветвями кривой, пересекающимися под углом 120° . Максимальная высота солитона $H_{\text{max}} \approx 0,78h$, а его скорость $c \approx \sqrt{1,56gh}$. Следует заметить, что форма установившихся волн не симметрична относительно плоскости $z = 0$; в частности, солитон представляет собой стационарное возвышение водной поверхности, а волна понижения уровня стационарной быть не может.

Если глубина жидкости достаточно мала ($h^2 < 3\alpha/\rho g$, для воды $h \sim 4,7$ см), то дисперсия определяется силами поверхностного натяжения, причем знак дисперсии изменяется по сравнению с только что рассмотренным случаем чисто гравитационных волн. Эволюция таких волн, называемых гравитационно-капиллярными, описывается уравнениями (2.9), (2.10). Отметим, что в этом случае стационарной является волна понижения уровня, а не его возвышения.

Б) Волны на глубокой воде. Как уже указывалось, изучение волн на поверхности жидкости бесконечной глубины связано с большими математическими трудностями в силу принципиальной неоднородности задачи. Наиболее изучены здесь трохлоидальные волны Герстнера. Для их описания удобно использовать уравнения гидродинамики в Лагранжевой форме (2.5). Считая, что давление в стационарной волне зависит только от вертикальной Лагранжевой координаты z_0 , приходим к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям по $x_0 - ct$ относительно x , y , которые легко решаются. В результате получаем, что скорость волны не зависит от амплитуды: $c^2 = gk$ [5, 6, 13]:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a e^{kz_0} \sin k(x_0 - ct), \\ z &= z_0 - \frac{1}{2} k^2 a^2 - a e^{kz_0} \cos k(x_0 - ct), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где a и k - произвольные постоянные. Каждая частица движется по окружности с центром x_0, y_0 . В Эйлеровых переменных при $x_0 = 0$ (что соответствует поверхности жидкости) формулы (4.2) определяют хорошо известную кривую - трохойду. Профиль волны имеет крутые вершины и пологие впадины (рис. 3в). Легко видеть, что такая волна существует при $a < 1/k$. В предельном случае ($H_{пр} = 2a \approx 0,32 \lambda$) форма волны описывается циклоидой, при этом вершина волны становится "острием" с вертикальной касательной. Заметим, что в природных условиях не наблюдаются значения H/λ , большие 0,15 [5].

Волна Герстнера является вихревой с значением вихря $\Omega = -2a^2 k^2 c e^{2kz_0} / (1 - a^2 k^2 e^{2kz})$, причем в предельной волне $\Omega \rightarrow -\infty$. Отметим, что трохойдальная волна является единственным видом стационарных волн на поверхности жидкости, в которых давление зависит только от x_0 , во всех остальных случаях давление зависит от обеих координат x_0 и z_0 [13]. Кроме того скорость не зависит от амплитуды только у этих волн (при $h = \infty$); при учете конечности глубины такая зависимость уже отсутствует [14].

Другой класс стационарных движений - потенциальные волны - впервые исследовался Стоксом (также в прошлом веке). Он получил решение уравнений (2.6) - (2.7) для глубокой воды с помощью разложений Φ и h по крутизне волны [5, 6, 15]

$$\begin{aligned}
 h &= a \cos(kx - \omega t) - \frac{ka^2}{2} \cos 2(kx - \omega t) + \\
 &+ \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(kx - \omega t) + \dots, \\
 \omega &= \sqrt{gk} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 a^2 + \dots\right).
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Форма волны также несимметрична относительно невозмущенного уровня $h = 0$ - впадины имеют более пологий профиль, чем гребни. Скорость волны зависит от амплитуды,

причем траектории частиц оказываются незамкнутыми -
 - появляется волновое течение с средней скоростью

$$V_{\text{волн}} = c a^2 k^2 e^{2kz}. \quad (4.4)$$

Существование волнового течения можно объяснить, учитывая потенциальность движения. Действительно, так как $\text{rot } \vec{v} = 0$, то в среднем за период $\overline{v_x} = 0$ во всей толще воды, исключая поверхностный слой (Лагранжева скорость при этом отлична от нуля). Отсюда следует, что вклад в волновой импульс $(\rho \int_{-\infty}^z v_x dz)$ вносит область пространства над впадинами волн. Из-за переменного "сечения" поток массы приближенно равен $\rho \overline{v_x} h$ и отличен от нуля. При распространении волны создается перенос жидкости в том же направлении. Это течение, по-видимому, является причиной штормовых наводнений [5].

Результаты Стокса в дальнейшем уточнялись Релеем, который нашел большее число членов ряда (4.3). Сходимость такого разложения была доказана Некрасовым [16] и Леви-Чивита []. С увеличением высоты волны гребни становятся более острыми и предельная волна имеет заострение с углом 120° при $H \approx 0,142\lambda$ [5, 6, 10]. Существование критического угла в 120° уже отмечалось для мелкой воды; оно связано только с потенциальностью движения и не зависит от глубины жидкости; предельное значение высоты волны, напротив, определяется глубиной, точнее числом Фруда: $F_r = c^2 / gh$ (для глубокой воды $F_r < 1$, для мелкой $F_r > 1$). Видно, что предельная крутизна волны Стокса близка к измеренной в природных условиях. Отметим также, что при учете конечности глубины условие сходимости Стоксовых разложений имеет вид $kH \leq \min\{1, (kh)^2\}$ [11].

В) Капиллярные волны. Анализ стационарных капиллярных волн был проделан сравнительно недавно (в 1957г., значительно позже аналогичных работ по гравитационным волнам) Крэппером [17]. Решение уравнений (2.6) и (2.7) при $g = 0$ и $h = \infty$ получено в параметрической форме:

$$\frac{x-ct}{\lambda} = q - \frac{2}{\pi} \frac{A \sin 2\pi q}{1+A^2 + 2A \cos 2\pi q}, \quad (4.5)$$

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \frac{A(A + \cos 2\pi q)}{1+A^2 + 2A \cos 2\pi q},$$

где A связано с высотой волны H соотношением

$$\frac{H}{\lambda} = \frac{4A}{\pi(1-A^2)} \quad \text{и} \quad 0 \leq q \leq 1.$$

В отличие от гравитационных волн, с ростом амплитуды гребни капиллярных волн становятся более пологими, а впадины более острыми (рис. 3д). Высота H предельной волны равна $0,73\lambda$. Скорость установившейся волны зависит от амплитуды, так что ω , k , H связаны нелинейным дисперсионным соотношением $\omega = \sqrt{\alpha/\rho} k^{3/2} (1+k^2 H^2/16)^{-1/4}$. Экспериментально наблюдение волн этого типа было проведено сравнительно недавно в МГУ [18, 46].

Форма различных установившихся волн на поверхности жидкости изображена на рис. 3.

5. Неустановившиеся движения

А) Простые волны. Как уже указывалось, для существования стационарной волны необходимо совместное действие как нелинейности, так и дисперсии. Если длина волны достаточно велика (по сравнению с глубиной), то дисперсией можно пренебречь, и для описания процесса пригодны уравнения "теории мелкой воды" (2.8). Их частным решением является Риманова волна [4]

$$\eta(x, t) = F\left(t - \frac{x}{3\sqrt{g(h+\eta)} - 2\sqrt{gh}}\right), \quad (5.1)$$

где F — произвольная функция, определяемая из граничных условий. По мере распространения передний фронт волны становится круче и решение (5.1) справедливо до точки "опрокидывания" x^* , вблизи которой уравнения мелкой воды непригодны. Если высота волны H достаточно мала ($H \ll h$), то процесс искажения занимает много периодов; например, для синусоидального граничного возмущения

$$x^* = \frac{2\sqrt{g}h}{3\omega} \frac{h}{H} .$$

Если использовать типичные параметры

волны в открытом море: $h \sim 5$ км, $\lambda \sim 5$ км, $H \sim 1$ м, то получим $x^* \approx 2000$ км. Отсюда ясно, что нелинейные эффекты такого рода существенны только в береговой зоне (если $h \sim 100$ м, $\lambda \sim 400$ м, $H \sim 1$ м, то $x^* \sim 4$ км). Для волн с большой амплитудой ($H \gg h$) искажение формы происходит уже на расстоянии длины волны: $x^* \sim \sqrt{gh}/\omega$. Вблизи точки x^* крутизна волны меняется столь резко, что необходимо учитывать дисперсию и диссипацию, а дальнейший процесс определится соотношением этих параметров (рис. 4). Если дисперсией можно пренебречь, то происходит опрокидывание волны и образуется ударная волна (бор). Структура фронта ударной волны может определяться различными диссипативными факторами: вязкостью, шероховатостью дна, капиллярными волнами, возбуждаемыми на фронте и т.д. (см., например, [19]). При сравнительно малых высотах опрокидывание не происходит, и если диссипация мала, то при $x > x^*$ появляются осцилляции, и далее волна распадается на ряд солитонов и этот процесс может быть описан в рамках уравнения Кортевега-де Вриза (2, 10).

Б) Образование солитонов. Распад на солитоны произвольного ограниченного возмущения в рамках уравнения Кортевега-де Вриза наблюдался в численных экспериментах [20], а затем был объяснен аналитически [21-22]. Уравнение Кортевега-де Вриза относится к тем немногим нелинейным уравнениям, для которых удается найти общее решение. В частности, можно показать, что при $t \rightarrow \infty$ ограниченное возмущение распадается на солитоны, амплитуда которых...

туды которых являются собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения

$$\frac{d^2 \psi_n}{d(x/l)^2} + 2\sigma^2 \left[-\frac{1}{2} H_n + \eta \left(\frac{x}{l}, 0 \right) \right] \psi_n = 0 \quad (5.2)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

с нулевыми граничными условиями при $x = \pm \infty$. Здесь l — характерная длительность начального возмущения, а $\sigma = \frac{l}{l_{cr}} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{h}{h_0}}$ — параметр подобия, характеризующий отличие начального возмущения от солитона той же амплитуды (для солитона $\sigma = 1$). Параметр σ фактически характеризует соотношение между дисперсией и нелинейностью: при $\sigma \ll 1$ начальный импульс расширяется вследствие дисперсии с появлением осцилляций, а при $\sigma \gg 1$ эволюция импульса на начальном этапе описывается римановым решением, и лишь при $x \approx x^*$ на фронте волны возникают осцилляции, амплитуда которых растет и импульс распадается на солитоны. Вид волнового движения при $t \rightarrow \infty$ определяется, кроме σ , также величиной $\int \eta(x) dx$. Если $\int \eta dx \leq 0$, то образование солитонов вообще невозможно (при $\eta(x) \leq 0$ этот результат очевиден, так как гравитационная волна понижения уровня не может быть стационарной). Если $\int \eta(x) dx > 0$, то процесс зависит от величины σ . При $\sigma \gg 1$ число солитонов достаточно велико и для нахождения их амплитуд удобно использовать приближенное решение (5.2), полученное с помощью метода ДКБ [22]. Здесь же мы приведем точное решение задачи от эволюции начального "солитоноподобного" импульса $\eta = \text{sech}^2 x/l$ [23]

$$H_n = \frac{H_0}{4\sigma^2} \left[\sqrt{1 + 8\sigma^2} - (1 + 2n) \right]^2, \quad (5.3)$$

где H_n — высоты солитонов; число их определяется целой частью выражения $\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8\sigma^2} - 1 \right]$. Отсюда следует, что

при $\epsilon \gg 1$ число солитонов определяется целой частью $\sqrt{2} \epsilon$. Отметим также, что амплитуды возникающих солитонов не могут превышать удвоенного значения амплитуды начального возмущения ($2\mu_0$). Из-за зависимости скорости от амплитуды солитоны при $t \rightarrow \infty$ располагаются в пространстве так, что их вершины лежат на прямой линии (в плоскости $\mu - x$), наклон которой к оси x убывает со временем.

Эти результаты, как уже указывалось, справедливы для ограниченных (достаточно быстро спадающих на бесконечности) начальных возмущений. Эволюция произвольного периодического возмущения также была рассмотрена; качественно, она определяется соотношениями между длительностями (периодами) возмущения (T) и стационарной волны (T_0) одинаковых амплитуд. В случае, если $T > T_0$, периодическая волна распадается на группы солитонов, которые после взаимодействия снова сходятся и в некоторый момент времени форма волны возвращается к первоначальной; затем этот процесс периодически повторяется.

В) Модулированные (квазистационарные) волны. Процессы другого типа возникают в случае, если начальные (граничные) условия не совсем точно совпадают, но близки к требуемым для стационарной волны. В этом случае волна остается локально стационарной, а ее параметры (амплитуда, частота и т.д.) медленно изменяются во времени и в пространстве. Анализ процесса распространения модулированных волн обычно производится с помощью метода усреднения. Существенно, что при этом не требуется малости амплитуды волны. Весьма общий подход к рассмотрению квазистационарных процессов был предложен Уитэмом [11, 24], который сформулировал "усредненный вариационный принцип". Он использовал то обстоятельство, что уравнения (2.1) - (2.4) могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta S = 0, \quad S = \iint L dt d\vec{r}, \quad (5.4)$$

где \int - действие, L - лагранжиан системы. Так, для потенциальных гравитационных волн Лагранжиан имеет вид [11]

$$L = \int_{-h}^z dz \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + g z \right]. \quad (5.5)$$

Для волн, близких к периодическим $L = \langle L \rangle + \tilde{L}$, где $\langle L \rangle$ - среднее значение L по быстроосциллирующей фазе $\theta = \omega t - \vec{k} \vec{r}$, причем на расстояниях, много больших длины волны, в действие по Гамильтону основной вклад вносит средний Лагранжиан. Поэтому в первом приближении уравнения для квазистационарных волн следуют из "усредненного вариационного принципа":

$$\delta \iint \langle L \rangle dt d\vec{r} = 0, \quad \langle L \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta. \quad (5.6)$$

Поскольку $\langle L \rangle$ зависит от $\theta_t = \omega$, $\nabla \theta = -\vec{k}$, H , то усредненные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \omega} - \text{div} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \vec{k}} = 0, \quad \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial H} = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + \nabla \omega = 0, \quad \text{rot} \vec{k} = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнения (5.7) квазилинейны и принадлежат либо к гиперболическому, либо к эллиптическому типу. В гиперболическом случае существует семейство действительных характеристик (лучей) в пространстве \vec{r} , t и величины H , ω , \vec{k} ведут себя во многом аналогично плотности, давлению, скорости среды и т.п. в обыч-

ной газодинамике. В частности, возможны римановы и ударные волны огибающих (правда, существование последних требует здесь весьма специфичной диссипации [11]).

Эллиптичность уравнений (5.7) означает, что стационарная волна неустойчива по отношению к модуляции ее параметров. Для квазигармонических волн малой, но конечной амплитуды критерий неустойчивости связан с видом нелинейного дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k, A)$ (см., например (4.3)). Так в одномерном случае волна оказывается неустойчивой (автомодуляция), если $\frac{\partial \omega}{\partial H} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} < 0$ [25]. Исследуя стационарные ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) решения системы (5.7) аналогично можно показать, что при $\frac{\partial \omega}{\partial H} < 0$ имеет место пространственная неустойчивость и волна самофокусируется [26]. В частности, из вида дисперсионных соотношений, приведенных в § 4, следует, что волна Герстнера является нейтральной в смысле модуляционной неустойчивости, так для нее $\partial \omega / \partial H = 0$. При учете конечности глубины жидкости, как показано в [14], вихревая волна (при $h \rightarrow \infty$ переходящая в волну Герстнера) неустойчива относительно стационарных возмущений — для нее $\partial^2 \omega / \partial k^2 < 0$ и $\partial \omega / \partial H < 0$. Что же касается потенциальных волн Стокса на глубокой воде, то для них $\partial \omega / \partial H > 0$, $\partial^2 \omega / \partial k^2 < 0$ и, следовательно, волны Стокса неустойчивы относительно одномерных возмущений. Отметим, что неустойчивость Стоксовой волны, открытая совсем недавно [25, 29, 32, 33] и подтвержденная экспериментально [34], оказалась неожиданной для гидромехаников, приложивших много усилий для доказательства существования этих волн. Это справедливо и для гравитационно-капиллярных волн при $k^2 < 0,1547 \rho g / \alpha$; при больших k $\partial^2 \omega / \partial k^2 > 0$ и волна становится устойчивой. Наконец, при $k^2 > 0,5 \rho g / \alpha$ меняет знак величина $\partial \omega / \partial H$ и короткие волны (в том числе и чисто капиллярные) неустойчивы как относительно "продольных" так и "поперечных" возмущений [25]. Для потенциальных гравитационных волн на поверхности жидкости конечной глубины ситуация сложнее, т.к.

при анализе устойчивости необходимо учитывать, изменение усредненных характеристик волны (среднего возвышения и скорости), поэтому приведенный выше критерий неустойчивости не выполняется. В этом случае в Лагранжиане нужно учитывать большее число переменных и порядок системы (5.7) повышается. Анализ полученных уравнений [11], показал, что волна Стокса неустойчива относительно одномерных возмущений при $kh > 1,36$. Гравитационные волны на мелкой воде также неустойчивы, но лишь относительно возмущений, распространяющихся под некоторым малым углом (порядка $\Omega^2 \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right| / k \frac{\partial \omega}{\partial k}$, где Ω - частота возмущений) к направлению распространения исходной волны [47].

С помощью уравнений (5.7) можно также проанализировать устойчивость несинусоидальных стационарных волн произвольной амплитуды, однако, здесь не удастся сформулировать какой-либо простой критерий неустойчивости. В настоящее время решено еще очень небольшое число задач о распространении модулированных волн большой амплитуды. Так, модуляционная неустойчивость волны Стокса сохраняется для высот порядка $0,1\lambda$; при большей крутизне волна становится устойчивой [27]. Исследована также пространственная неустойчивость уединенной волны (по отношению к искривлению ее фронта), которая имеет место лишь на малых глубинах ($h^2 < 3\alpha/\rho g$) [28].

6. Нелинейные взаимодействия поверхностных волн

Существенный вклад в картину реального волнения могут по-видимому, вносить резонансные взаимодействия различных периодических волн. Если высота волны мала, то из-за квадратичной нелинейности наиболее сильно должны взаимодействовать тройки волн, частоты и волновые числа которых удовлетворяют законам сохранения

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3, \quad \omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2) = \omega(\vec{k}_3). \quad (6.1)$$

При заданной волне с ω_3 и k_3 трехчастотный процесс типа (6.1) можно трактовать как распадный или параметрический. Из рис. 2 можно видеть, что гравитационные волны не удовлетворяют (6.1), за исключением очень длинных волн, где (6.1) выполняется на всех частотах. Для капиллярных волн условия (6.1) могут выполняться, если волновые векторы не коллинеарны, т.е. установившаяся капиллярная волна малой, но конечной амплитуды неустойчива относительно распада на две капиллярные волны с меньшими, чем у исходной частотами [29].

Интересным примером трехволнового процесса является взаимодействие двух капиллярных и одной гравитационной волн. Как известно, измеряемое поглощение гравитационной волны оказалось на два порядка больше, чем это следует из теории, учитывающей лишь молекулярную вязкость [5]. Такое аномальное поглощение может быть следствием потери энергии гравитационной волной на нелинейное возбуждение быстрозатухающих капиллярных волн [30].

Отметим, что параметрические явления на поверхности жидкости, связанные с взаимодействиями типа (6.1), недавно исследовались экспериментально [48, 49].

Так как для гравитационных волн трехчастотные процессы невозможны, то основную роль играют четырехволновые взаимодействия, отвечающие законам сохранения

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4, \quad \omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2) = \omega(\vec{k}_3) + \omega(\vec{k}_4). \quad (6.2)$$

Частным случаем такого взаимодействия, имеющим отношение к проблеме устойчивости нелинейных волн, является процесс типа

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 2\vec{k}_3, \quad \omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2) = 2\omega(\vec{k}_3). \quad (6.3)$$

Например, для волн Стокса на глубокой воде резонансным условиям (6.3) отвечают любые три вектора, "вписанные" в кривые, показанные на рис. 3 [31]. Используя метод усреднения, можно найти следующие соотношения [31]:

$$2\sigma_1 H_1^2 + \sigma_3 H_3^2 = \text{const}, \quad (6.4)$$

$$2\sigma_2 H_2^2 + \sigma_3 H_3^2 = \text{const},$$

где σ — коэффициенты, зависящие от частот взаимодействующих волн и от направлений их распространения. По существу (6.4) отвечает известным формулам Мэнли-Роу. Отсюда следует, что, если высота волны с частотой ω_3 падает (увеличивается), то амплитуды волн с частотами ω_1 и ω_2 растут (уменьшаются) одновременно. Таким образом, на глубокой воде периодическая установившаяся волна оказывается неустойчивой относительно возбуждения волн с частотами ω_1 и ω_2 , удовлетворяющими (6.3). Неустойчивость такого типа также называют распадной. Следует заметить, что если волновые числа k_1 , k_2 , k_3 близки, то эту неустойчивость можно трактовать как модуляционную, т.е. связанную с ростом возмущений амплитуды и частоты квазистационарной волны; о ней уже говорилось в п. В) § 5.

При больших высотах волн их взаимодействие гораздо сложнее и возможна стохастизация волнового процесса [35], но этот вопрос выходит за рамки данной лекции. Мы не рассматриваем также интересных задач о взаимодействии поверхностных волн с внутренними [50].

7. Трансформация нелинейных волн на береговом откосе

Задача о движении волны к берегу является традиционной для гидродинамики и ее первые решения в линейном приближении были получены еще в прошлом веке. В простейшем случае синусоидальной волны бесконечно малой амплитуды на отмели с достаточно малым уклоном изменение высоты можно определить используя условие сохра-

нония среднего потока энергии. Так как при уменьшении глубины групповая скорость вначале возрастает, а затем уменьшается, то высота волны при подходе к берегу сначала несколько уменьшается, а затем монотонно возрастает, причем на мелкой воде $H \sim h^{-1/4}$ (закон Грина)

[6, 36]. Лабораторные исследования действительно подтверждают первоначальное уменьшение высоты волны, однако на мелкой воде возрастание H оказывается, как правило, большим, чем это следует из теории. Поэтому при анализе трансформации волн на мелкой воде во многих случаях необходимо учитывать нелинейность, тогда процесс распространения волны в береговой зоне определяется соотношением параметров дисперсии и нелинейности. Так, для зыби эти параметры, одного порядка и, как часто считают; форма волны может быть близка к форме стационарной (кноидальной) волны. Тогда трансформацию волны при изменении глубины можно описать с помощью метода усреднения (см. § 5). Для периодических во времени процессов имеем из (5.7): $S = \partial \langle \epsilon \rangle / \partial k = \text{const}$, где S - средняя плотность потока энергии. При малой высоте волны в выражении для S достаточно удержать главные "линейные" слагаемые, и тогда получим

$$\sqrt{gh} \langle \eta \rangle^2 = \text{const}, \quad (7.1)$$

где η - стационарное решение уравнения (2.10). Отсюда следует, что при уменьшении глубины не только растет высота волны, но и существенно изменяется ее форма

[37, 38]. В частности, синусоидальная волна, распространяющаяся к берегу, на малых глубинах может превратиться в последовательность уединенных волн, практически не связанных между собой. В линейном приближении из (7.1) следует закон Грина, а для солитона с помощью (4.1) получаем [38, 39]

$$H \sim h^{-1} \quad (7.2)$$

Таким образом, с учетом нелинейности высота солитона уменьшается быстрее, чем это следует из линейной теории,

ввиду его нелинейного сжатия с ростом H . Заметим, что условием применимости формул типа (7.1) (т.е. условием квазистационарности волны) является малость параметра неоднородности (уклона дна) по сравнению с параметрами нелинейности и дисперсии, и для волн малой амплитуды необходимо, чтобы

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| \ll h^3 / \lambda^3 \quad (7.3)$$

в то время как очевидное условие $|\partial h / \partial x| \ll h / \lambda$ определяет лишь малость отраженной волны. Если неравенство (7.3) не выполняется, то поведение волны может оказаться совершенно иным. Так при выполнении неравенства, обратного (7.3) нелинейностью и дисперсией можно пренебречь, и волна описывается линейными формулами (если к тому же $|\partial h / \partial x| \ll h / \lambda$, то высота изменяется в соответствии с законом Грина, а длительность остается постоянной). Если такая волна выходит в зону с постоянной глубиной (где (7.3) очевидно выполняется, то она разбивается на несколько солитонов. Это видно из численных расчетов в [40], и позднее было объяснено теоретически [41, 42].

В случае $h^2 / \lambda^2 \ll H / h$ можно пренебречь дисперсией, и воспользоваться уравнениями (2.8), которые при малой высоте волны и плавном изменении глубины - приводятся к виду

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3\eta}{2h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\sqrt{gh}}{4h} \eta \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (7.4)$$

обобщающему уравнение Кортевега-де Вриза (2.10). Решением этого уравнения является квазипростая волна вида [38]

$$\eta = H_0 (h_0 / h)^{1/4} F \left[t - \int \frac{\partial x}{\sqrt{gh}} + \frac{3}{2} \frac{\eta h^{1/4}}{\sqrt{g}} \int \frac{dx}{h^{7/4}} \right], \quad (7.5)$$

где F – произвольная функция, определяемая из граничных условий. Опрокидывание волны в рамках решения (7.5) наступает в точке x^* , где производные от η обращаются в бесконечность. В случае постоянного уклона дна $(h = h_0(1 - x/L))$ и синусоидального возмущения получаем для глубины опрокидывания h^* [43]

$$h^* = h_0 \left(1 - \frac{x^*}{L}\right) = h_0 \left(1 + \frac{h_0 \sqrt{g h_0}}{2 \omega H_0 L}\right)^{-4/3} \quad (7.6)$$

(Отсюда, видно, что при увеличении уклона дна опрокидывание волны происходит быстрее.

Дальнейший процесс, как и в случае постоянной глубины, определяется соотношением параметров дисперсии и диссипации. Если преобладают потери, то после x^* распространяется бор, высота которого зависит от уклона дна и величины нелинейности. Для слабого бора потери энергии невелики, и его высота возрастает как $h^{-1/4}$. Высота сильного бора уменьшается (как $h^{1/2}$), так как потери энергии во фронте ударной волны значительны. Движение бора в береговой зоне подробно исследовалось в [44].

Если потерями можно пренебречь, то эволюция волны при $x > x^*$ определяется дисперсией и при малом уклоне дна возникает группа уединенных волн, высоты которых растут в соответствии с (7.2).

Отметим также, что опрокидывание волны в рамках уравнений (2.8) может и не иметь места, если высота волны мала, а уклоны велики, так что необходимо учитывать отраженную волну [45].

8. Заключение

В этой лекции освещена лишь часть тех проблем, с которыми приходится сталкиваться при изучении волновых процессов на поверхности жидкости.

Так, здесь практически ничего не говорилось о поглощении волн на воде, об учете вращения Земли и ее кривизны, о генерации волн ветром, о взаимодействии поверхностных волн с внутренними; о турбулентных процессах на поверхности жидкости. Эти вопросы в настоящее время также интенсивно изучаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Циском В. Волны и пляжи. Гидрометеиздат, Л., 1966.
2. Триккер Р. Бор, прибой, волнение и корабельные волны. Гидрометеиздат, Л., 1969.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошной среды. ГИТТЛ, М., 1954.
4. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. ИЛ., М., 1959.
5. Кононкова Г.Е. Динамика морских волн. Изд-во МГУ, М., 1969.
6. Ламб Г. Гидродинамика, ОГИЗ, М., 1947.
7. Korteweg D.J., de Vries G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long solitary waves. Phil. Mag., (5), 32, 422 (1895).
8. Buath-Smith J.G.B. An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation. J. Fluid Mech., 49, 4, 625 (1971).
9. Mc Cowan J. On the solitary wave. Phil. Mag., (5), 32, 45 (1891).
10. Теория поверхностных волн (сб. переводов) ИЛ., М., 1959. Статьи У1 - 1X.

11. Уизем Д.Б. Вариационные методы и их приложение к волнам на воде. В сб. Нелинейная теория распространения волн. Мир., М., 1970, стр. 12.
12. Seliger R.L. A note on the breaking of waves. Proc. Roy. Soc. Lond., A303, 493 (1968).
13. Морин А.С. Лагранжево описание установившихся волн. ДАН СССР, 203, 4, 789 (1972).
14. Нестеров С.В. Об устойчивости вихревых волн на поверхности тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, 11, 1224 (1971).
15. Филлипс О. Динамика верхнего слоя океана. Мир, М., 1969.
16. Некрасов А.И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Изд-во АН СССР, М., 1951.
17. Crapper. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. J. Fluid Mech., 2, 4, 532 (1957).
18. Зарембо Л.К., Красильников В.А., Тхай Тиань Лонг. Нелинейные явления при распространении капиллярных волн конечной амплитуды. ДАН СССР, 192, 3, 548 (1970).
19. Price R.K. Detailed structure of the breaking waves. J. Geophys. Res., 75, 27, 5276 (1970).

20. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of "solutions" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys.Rev.Lett., 15, 6, 240 (1965).
21. Gardner C., Greene J., Kruskal M., Miura R. A method for solving of the Korteweg-de Vries equation. Phys.Rev.Lett., 19, 19, 1095 (1967).
22. Карпман В.И., Соколов В.П. О солитонах и собственных значсных уравнения Шредингера. ЖЭТФ, 54, 5, 1568 (1968).
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. ФМ., М., 1963.
24. Whitham G.B. A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. J.Fluid Mech., 22, 2, 273 (1965).
25. Lighthill M.J. Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems. J.Inst.Math.Appl., 1, 3, 269 (1965).
26. Карпман В.И., Крушкль Е.М. О модулированных волнах в нелинейных диспергирующих средах . ЖЭТФ, 55, 2, 530 (1970).
27. Лайтхилл М.Дж. Некоторые частные случаи применения теории Уизема, В сб. Нелинейная теория распространения волн, стр.43.

28. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах. ДАН СССР, 192, 4, 753 (1970).
29. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ПМТФ, 2, 87 (1968).
30. Красильников В.А., Павлов В.И. Релаксация гравитационных волн, обусловленная взаимодействием с капиллярными волнами. Вестник МГУ, 2, 235 (1972).
31. Филлипс О.М. Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействий гравитационных волн, В сб. Нелинейная теория распространения волн, стр.141.
32. Захаров В.Е. Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией. ЖЭТФ, 51, 4, 1107 (1966).
33. Бенджамен Т.Б. Неустойчивость периодических пучков волн в нелинейных системах с дисперсией. В сб. Нелинейная теория распространения волн, стр.83.
34. Фейр Дж. Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами. В сб. Нелинейная теория распространения волн, стр.77.
35. В.Е.Захаров, Н.И.Филоненко. Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости. ДАН СССР, 170, 6, 1293 (1966).
36. Крылов Ю.М. К вопросу о распространении волн на поверхности тяжелой жидкости переменной глубины. Метеорология и гидрология, 1, 75 (1948).
37. Мунк В. Теория одиночных волн и ее применение к зоне прибоя. В сб. О новых предсказаниях ветровых волн, приби и прибоя, ИЛ, М., 1951, стр.403.

38. Островский Л.А., Пелиновский Е.Н. Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, в, 9, 834 (1970).
39. Grimshaw R. The solitary wave in water of variable depth I, II. J. Fluid Mech., 42, 2, 639 (1970); 46, 3, 611 (1971).
40. Madsen O.S., Mei C.C. The transformation of solitary wave over an uneven bottom. J. Fluid Mech., 39, 4, 781 (1969).
41. Пелиновский Е.Н. Об эволюции солитона в неоднородной среде. ПМТФ, в, 80 (1971).
42. Tappert F.D., Zabusky W.J. Gradient-induced fission of solitons, Phys. Rev. Lett., 27, 26, 1774 (1971).
43. Bürger W. A note on the breaking of waves on non-uniformly sloping beaches, J. Math. and Mech., 16, 10, 1131 (1967).
44. Keller H.B., Levine D.A., Whitham G.B. Motion of a bore over a sloping beach. J. Fluid Mech., 7, 2, 302 (1960).
45. Carrier G.F., Greenspan H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach. J. Fluid Mech., 4, 1, 97 (1958).

46. Горшков А.С., Марченко В.Ф., Целыковский А.Ф. Экспериментальное исследование амплитудных поправок к скорости распространения капиллярных волн, ПМТФ, 2, 164 (1971).
47. Захаров В.Е., Рубенчик А.М. О нелинейном взаимодействии высокочастотных и низкочастотных волн, препринт ИЯФ СО АН СССР, ИЯФ 83-70 (1970); ПМТФ, 1972, № 3.
48. Горшков А.С., Марченко В.Ф., Целыковский А.Ф. Параметрическая генерация волн на поверхности жидкости, ЖТФ, 40, 6, 1331 (1970).
49. Горшков А.С., Марченко В.Ф., Целыковский А.Ф. Параметрическое усиление волн на поверхности жидкости. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 14, 2, 323 (1971).
50. Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Куртепов В.М., Наугольных К.А. О резонансном возбуждении внутренней волны при нелинейном взаимодействии поверхностных волн, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 8, 2, 192 (1972).

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Спектр океанских волн.

Рис. 2. Зависимости $\omega(k)$ и $\psi_\phi(k)$.

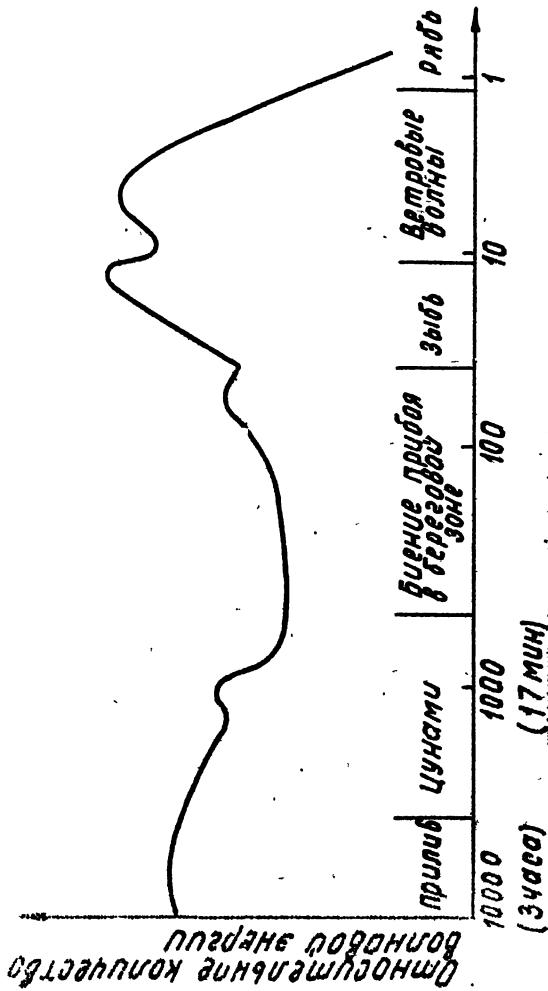
Рис. 3. Стационарные волны на поверхности жидкости

- а) кноидальные и уединенные гравитационные волны на поверхности мелкой воды
- б) одиночная гравитационно-капиллярная волна при $h < 4,7$ см
- в) трохонидальные волны Герстнера
- г) потенциальные волны Стокса
- д) капиллярные волны.

Рис. 4. Эволюция нелинейной волны на мелкой воде.

- а) при сильном поглощении
- б) при отсутствии поглощения.

Рис. 5. Тройки волновых векторов для взаимодействующих волн на глубокой воде.



Период волны (сек)

Рис. 1

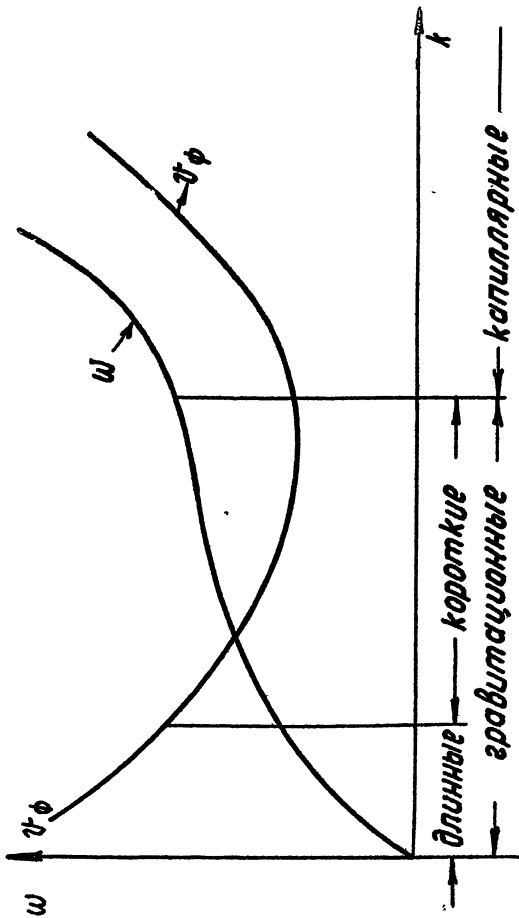


Рис. 2

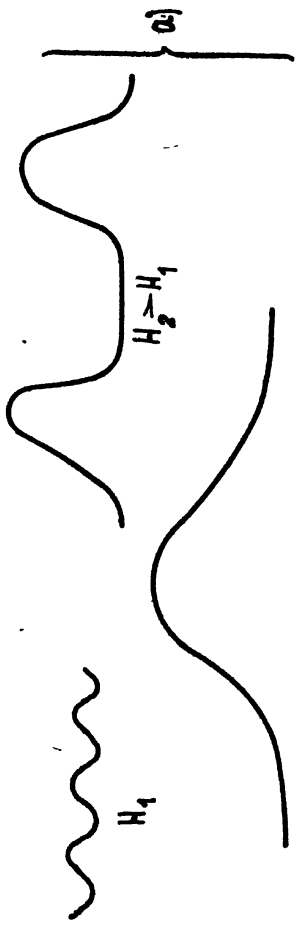
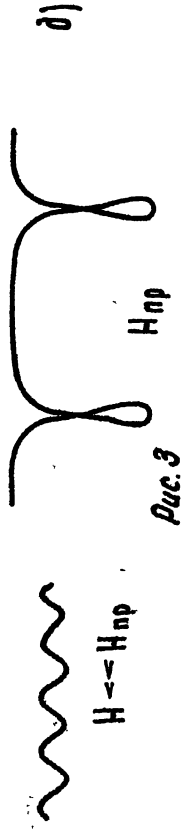


Рис. 3



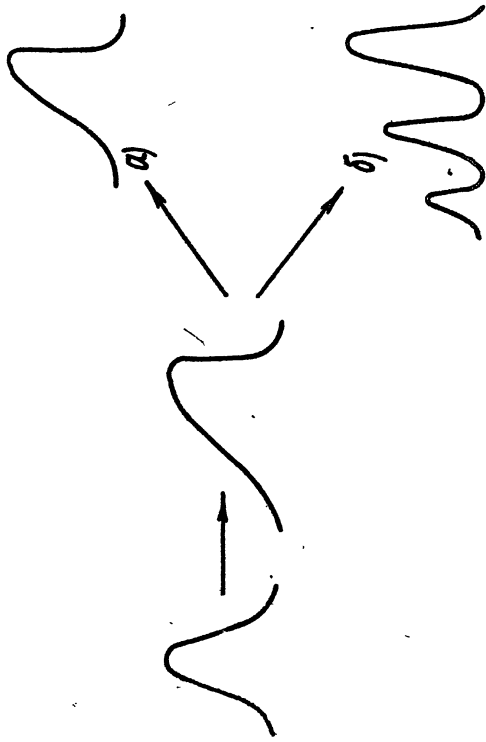


Рис. 4

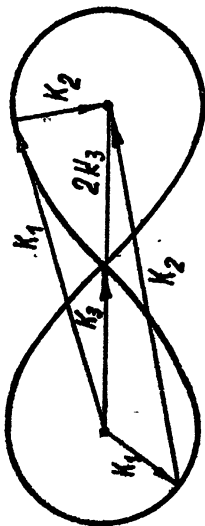


Рис. 5