Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт № 37

Л.М.Ерухимов

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ФУНКЦИЙ ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

г.Горький,
1973

А н н о т а ц и я

Получены уравнения переноса частотной корреляции флуктуаций поля и интенсивности в среде с крупномасштабными неоднородностями при наличии временных флуктуаций диэлектрической проницаемости. В качестве иллюстраций приводятся решения уравнений в приближении фазового экрана. Обсуждается вопрос о расплывании импульсного сигнала и об усреднении флуктуаций параметров волны в статистической нестационарной среде.

Как известно, частотная корреляция флуктуаций поля в статистически неоднородной среде определяется относительным временным запаздыванием Δt рассеянных волн. Если среда статистически нестационарна, то можно ожидать изменения частотной корреляции флуктуаций поля из-за эффекта временного усреднения флуктуаций связанного с "временной путаницей". Такие изменения должны иметь место в случае, когда радиус временной корреляции флуктуаций поля τ_0 становится меньше относительного запаздывания Δt или другими словами, когда допплеровское уширение спектра Ω_g превышает характерный радиус частотной корреляции $\Omega_{ч.к.}$. В связи с этим представляет интерес обобщить уравнения переноса функций частотной корреляции [1] на случай нестационарной среды. Ниже мы рассмотрим такую задачу для рассеяния радиоволн на крупномасштабных (рассеяние на малые углы) неоднородностях в приближении, когда $\Omega_g \ll \omega$ (ω - рабочая частота волны).

Исходя из уравнений Максвелла, уравнение для Фурье компоненты поля E'_ω можно представить в виде

$$\Delta E'_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} D'_\omega = 0 , \qquad (1)$$

где

$$D'_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} D'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t,t') E'(t')\,dt' . \qquad (2)$$

Представим

$$\varepsilon(t,t') = \langle \varepsilon(t-t') \rangle + \varepsilon_1(t, t-t', r) ,$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ - диэлектрическая проницаемость регулярной стационарной среды, а $\varepsilon_1(t,t',\vec{r})$ - флуктуирующая часть пропорциональная флуктуация электронной концентрации (в случае плазмы). Считая t и $t-t'$ независимыми переменными и проводя в (2) фурье преобразование по $t-t'$ и t имеем (см. так же [2,7])

$$D'_\omega \approx \langle \varepsilon(\omega)\rangle E'(\omega)+\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_1(\omega-\omega',\omega')E'(\omega')\,d\omega'. \tag{2a}$$

Представляя далее E'_ω и D'_ω в виде комплектных амплитуд этих величин E_ω, D_ω и фазовых множителей $\exp\{-ik_0\int_0^z\langle\varepsilon\rangle dz'\}$ в известном диффузионном приближении получаем

$$-2ik_0\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\,\frac{\partial E(\omega,z,\vec{r}_\perp)}{\partial z}+\Delta_{\vec{r}_\perp}E(\omega,z,\vec{r}_\perp)+ \tag{3}$$

$$+k_0^2\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_1(\omega-\omega',\omega')E(\omega',z,\vec{r}_\perp)\exp\{i[S(\omega,z)-S(\omega',z')]\}d\omega',$$

где $S(\omega,z)=k_0\int^z\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\,dz'$, $\vec{r}_\perp=\vec{r}_\perp(x,y)$, $k_0=\omega/c$. Положим в (3) $\omega=\omega_1$ и умножим это уравнение на $E^*(\omega_2,z,\vec{r}\,'_\perp)$. Затем запишем аналогичное уравнение для $E^*(\omega_2,z,\vec{r}\,')$ и умножим его на $E(\omega_1,z,\vec{r}_\perp)$. Складывая полученные уравнения и проводя в них операцию усреднения по ансамблю после несложных преобразований имеем

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial z}+i\,\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2}\nabla_{\vec{R}}\nabla_{\vec{\rho}}\Gamma+i\,\frac{k_2-k_1}{4k_1k_2}\left(\frac{1}{2}\Delta_{\vec{R}}+2\Delta_{\vec{\rho}}\right)\Gamma+ \tag{4}$$

$$+\frac{i}{2}\,\frac{k_{01}^2}{k_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\varepsilon_1(\omega-\omega',\omega',\vec{r}_\perp)E(\omega',\vec{r}_\perp)E^*(\omega_2,\vec{r}\,'_\perp)\rangle\times$$

$$\times\exp\{i[S(\omega_1,z)-S(\omega',z)]\}d\omega'-\frac{ik_{02}^2}{2k_2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\times$$

$$\times\langle\varepsilon_1^*(\omega_2-\omega',\omega',\vec{r}\,'_\perp)E^*(\omega',\vec{r}\,'_\perp)E(\omega_1,\vec{r}_\perp)\exp\{i[S(\omega',z)-$$

$$-S(\omega_2,z)]\}=0.$$

Здесь $k_1 = k_{01}\sqrt{\langle\varepsilon(\omega_1)\rangle} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\langle\varepsilon(\omega_1)\rangle}$, $\vec{R} = \frac{\vec{r}_\perp + \vec{r}_\perp'}{2}$,

$$\rho = \frac{r_\perp - r_\perp'}{2}\ ,\ \Gamma = \langle E(\omega_1, z, \vec{r}_\perp) E^*(\omega_2, z, \vec{r}_\perp')\rangle =$$
$$= \Gamma\left(\Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2},\ \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},\ z, \vec{\rho}, \vec{R}\right).$$

Для дальнейших вычислений необходимо провести усреднение членов, стоящих под знаком интеграла (4) на небольшом участке на котором членами, содержащими производные по поперечным координатам можно пренебречь, но длина которого тем не менее много больше продольного радиуса корреляции ℓ флуктуаций. В этом случае, считая изменения фазы волны на масштабе ℓ пренебрежимо малыми можно записать решение в виде иттерационного ряда и ограничиться вторым членом разложения +). Проводя усреднение статистических величин в полученном выражении, после дифференцирования по z члены (4), содержащие величины ε_1 можно записать в виде

$$H_\varepsilon = \frac{1}{4}\int_{z_0}^{z} dz' \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d\omega'' \Big[\frac{k_{01}^2 k_0'^2}{k_1 k'}\ \Phi_\varepsilon(\omega_1 - \omega', \omega', \omega'', \zeta, \vec{\rho} = 0) \times$$

$$\times \exp\{i[S(\omega_1, z) - S(\omega', z) + S(\omega', z') - S(\omega'', z')]\} \times$$

$$\times \langle E(\omega'', z', \vec{r}_\perp) E^*(\omega_2, z, \vec{r}_\perp')\rangle\, \delta(\omega_1 - \omega'') - \frac{k_{01}^2 k_{02}^2}{k_1 k_2}\ \Phi_\varepsilon(\omega_1 - \omega', \omega', \omega'', \zeta, \vec{\rho}) \times$$

$$\times \exp\{i[S(\omega_1, z) - S(\omega', z) - S(\omega_2, z') + S(\omega'', z')\langle E(\omega', z, \vec{r}_\perp) E^*(\omega'', z', \vec{r}_\perp')\rangle$$

+) Указанный метод вычислений близок к "локальному" методу, предложенному в [3] . Аналогичные вычисления, приводящие к тому же результату можно провести используя метод вариационных производных [4] .

$$\delta(\omega_1-\omega'-\omega_2+\omega'')+\frac{k_{02}^2\,k_0'^2}{k_2 k'}\,\Phi_\varepsilon(\omega_2-\omega',\omega',\omega'',\zeta,0)\exp\{-i[S(\omega_2,z)-$$

$$-S(\omega',z)+S(\omega',z')-S(\omega'',z')]\}\langle E(\omega_1,z,\vec{r}_\perp)E^*(\omega'',z',\vec{r}_\perp)\rangle\cdot \tag{5}$$

$$\cdot\,\delta(\omega_2-\omega'')-\frac{k_{01}^2\,k_{02}^2}{k_1 k_2}\,\Phi_\varepsilon(\omega_2-\omega',\omega',\omega'',\zeta,\vec{\rho})\cdot$$

$$\cdot\exp\{-i\,[S(\omega_2,z)-S(\omega',z)-S(\omega_1,z')+S(\omega'',z')]\}\cdot$$

$$\cdot\langle E(\omega'',z',\vec{r}_\perp)E^*(\omega',z,\vec{r}\,')\rangle\,\delta(\omega_2-\omega'-\omega_1+\omega''),$$

Где учтено, что

$$\langle\varepsilon_1(\omega_1-\omega',\omega',z,\vec{r}_\perp)\,\varepsilon_1(\omega'-\omega'',\omega'',z',\vec{r}_\perp)\rangle= \tag{6}$$

$$=\Phi_\varepsilon(\omega_1-\omega',\omega',\omega'',\zeta=z-z',\vec{\rho}=0)\,\delta(\omega_1-\omega''),$$

$$\langle\varepsilon_1(\omega_1-\omega',\omega',z,\vec{r}_\perp)\,\varepsilon^*(\omega_2-\omega'',\omega'',z',\vec{r}_\perp')\rangle=$$

$$=\Phi_\varepsilon(\omega_1-\omega',\omega',\omega'',\zeta,\vec{\rho}=\vec{r}_\perp-\vec{r}_\perp')\,\delta(\omega_1-\omega'-\omega_2+\omega'')$$

$$\langle\varepsilon_1^*(\omega_2-\omega',\omega',z,\vec{r}_\perp')\,\varepsilon^*(\omega'-\omega'',\omega'',z',\vec{r}_\perp')\rangle=$$

$$=\Phi_\varepsilon(\omega_2-\omega',\omega',\omega'',\zeta,0)\,\delta(\omega_2-\omega'')$$

$$\langle\varepsilon_1^*(\omega_2-\omega',\omega',z,\vec{r}_\perp')\,\varepsilon_1(\omega_1-\omega'',z',\vec{r}_\perp)\rangle=$$

$$=\Phi_\varepsilon(\omega_2-\omega',\omega',\omega'',\zeta,\vec{\rho})\,\delta(\omega_2-\omega'-\omega_1+\omega'').$$

(В (5) $k' = k_0' \sqrt{\langle \varepsilon(\omega') \rangle}$), соотношения (6) следуют из однородности во времени (стационарности) флуктуаций ε_1 [+].
Поскольку максимальное значение ζ не превышает радиуса продольной корреляции ℓ флуктуаций ε_1, то в рассматриваемом приближении малости набега фазы на размерах одной неоднородности, можно вынести за знак интеграла по ζ комплексные амплитуды полей E и E^* положив в них $z = z'$. Тогда, проводя в (5) интегрирование по ω'' и ζ, и подставляя (5) в (4) получим $\left(\frac{\ell}{V_\phi} \sim \frac{\ell}{c} \ll \tau_0 \sim \frac{1}{\Omega_g}\right)$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z} + i \frac{k_1 + k_2}{2 k_1 k_2} \nabla_{\vec{R}} \nabla_{\vec{\rho}} \Gamma + \frac{i(k_2 - k_1)}{4 k_1 k_2} \left(\frac{1}{2} \Delta_{\vec{R}} + 2 \Delta_{\vec{\rho}} \right) \Gamma +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \left\{ \frac{k_{01}^2 k_0'^2}{k_1 k'} \Phi_\varepsilon' (\omega_1 - \omega', \omega', \omega_1, 0) \langle E(\omega_1, \vec{r}_\perp) E^*(\omega_2, \vec{r}_\perp') \rangle + \right.$$

$$+ \frac{k_{02}^2 k_0'^2}{k_2 k'} \Phi_\varepsilon' (\omega_2 - \omega', \omega', \omega_2, 0) \langle E(\omega_1, \vec{r}_\perp) E(\omega_2, \vec{r}_1') \rangle \tag{7}$$

$$- \frac{k_{01}^2 k_{02}^2}{k_1 k_2} \Big[\Phi_\varepsilon' (\omega_1 - \omega', \omega', \omega' + \omega_2 - \omega_1, \vec{\rho}) \langle E(\omega', \vec{r}_\perp) E^*(\omega_2 + \omega' - \omega_1, \vec{r}_1') \rangle$$

$$\left. + \Phi_\varepsilon' (\omega_2 - \omega', \omega', \omega' + \omega_1 - \omega_2, \vec{\rho}) \langle E(\omega_1 + \omega' - \omega_2, \vec{r}_\perp) E^*(\omega', \vec{r}_\perp') \rangle \Big] \right\} = 0 ,$$

[+] Два индекса ω', ω'' в Φ_{ε} означают, что значения в спектральной компоненте (первый индекс) корреляционной флуктуации берутся на разных частотах. Например, в плазме при $\omega \gg \omega_L = \sqrt{\alpha N}$

$$\Phi_\varepsilon(\omega_1 - \omega', \omega', \omega'' \ldots) = \frac{\alpha^2}{\omega'^2 \omega''^2} \langle \Delta N(\omega_1, \ldots) \Delta N(\omega', \ldots) \rangle .$$

где $\Phi'_\varepsilon(\omega_2-\omega',\omega',\ldots\vec\rho)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz'\Phi_\varepsilon(\omega_2-\omega',\ldots,z-z',\vec\rho)$

В уравнениях (5), (7) считается, что $<\varepsilon(z)>\to 0$, то есть пренебрегается областями, содержащими точки отражения волны. Эти результаты не трудно обобщить на случай полного внутреннего отражения волны.

Наиболее простой вид уравнения для Γ принимают в случае распространения <u>плоской</u> волны в среде с $<\varepsilon>\simeq 1$ ($<\varepsilon_1^2> << 1$). Тогда Γ в первую очеред зависит только от $\vec\rho$ и можно отбросить члены, содержащие $\Delta_{\vec R}$ и $\nabla_{\vec R}$. Кроме того можно положить $k_1\simeq k_{10}$ и $k_2\simeq k_{20}$. Считая так же для простоты $\delta_1=\frac{\Omega}{2\bar\omega}=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1+\omega_2}<<1$ и пренебрегая членами, содержащими δ_1 в степени два и выше, имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{i\delta_1}{2k_0}\Delta_{\vec\rho}\right]\Gamma(\Omega,\omega,\vec\rho)+\frac{1}{4}k_0^2\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\times\right.$$

$$\times\left[\Phi'_\varepsilon(\omega_1-\omega',\omega,0)+\Phi'_\varepsilon(\omega_2-\omega',\omega,0)\right]\Big\}\Gamma(\Omega,\omega,\vec\rho)- \tag{8}$$

$$-\frac{1}{4}k_0^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\left[\Phi'_\varepsilon(\omega_1-\omega',\omega,\vec\rho)\Gamma\left(\Omega,\omega'+\frac{\Omega}{2},\vec\rho\right)+\Phi'_\varepsilon(\omega_2-\omega',\omega,\vec\rho)\times\right.$$

$$\left.\times\,\Gamma\left(\Omega,\omega'-\frac{\Omega}{2},\vec\rho\right)\right]=0 \qquad \left(\Gamma\left(\Omega,\omega'+\frac{\Omega}{2},\vec\rho\right)=<E(\omega',\vec r_\perp)E^*(\omega_2+\omega'-\omega_1,\vec r_\perp')>\right.$$

и т.д.)

Если в (8) соответственно для частот ω_1 и ω_2 положить $\Phi'_\varepsilon\left(\begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{Bmatrix}-\omega',\omega,\begin{Bmatrix}0\\ \rho\end{Bmatrix}\right)=\Phi'_\varepsilon\left(\begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}0\\ \vec\rho\end{Bmatrix}\right)\delta\left(\begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{Bmatrix}-\omega'\right)$, то мы получаем уравнение переноса частотной корреляции в стационарной среде (см., напр. [1]). В другом предельном случае когда $\omega_1\simeq\omega_2$ уравнение (8) переходит в уравнение переноса интенсивности в статистически нестационарной среде

$$\frac{d}{dz}\langle I(\omega)\rangle+\frac{1}{2}k_0^2\langle I(\omega)\rangle\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\Phi'_\varepsilon(\omega-\omega',\omega)-$$
$$-\frac{1}{2}k_0^2\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\Phi'_\varepsilon(\omega-\omega',\omega)\langle I(\omega')\rangle=0. \qquad (9)$$

В (8), (9) учитывая, что $\omega'-\omega\ll\omega$ мы заменили ω' на ω и k_0' на k_0. Заметим так же, что аналогичным методом легко получить уравнение переноса среднего поля

$$\left[\frac{d}{dz}+\frac{k_0^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\Phi'_\varepsilon(\omega-\omega')\right]\langle E(\omega)\rangle=0, \qquad (10)$$

из которого следует тривиальный результат, говорящий о том, что ослабление среднего поля определяется всем спектром флуктуаций.

Решение уравнения (8) в общем виде получить довольно сложно (результаты численного решения (8) на ЭВМ будут рассмотрены отдельно). Рассмотрим некоторые частные случаи. Вычислим величину $\Gamma(\Omega,\vec{\rho})$ на выходе "тонкого" по z слоя, когда можно пренебречь в (8) членом $\Delta_{\vec{\rho}}\Gamma$. Если ограничиться рассмотрением случая слабых возмущений фазы волны в слое, то $\Gamma(\Omega,\omega'\mp\frac{\Omega}{2},\vec{\rho})$ в (8) можно заменить их значениями на входе слоя. Представим поля волн на входе слоя в виде $E_0(\omega_1)=A_0\exp\left\{-\frac{(\omega_1-\omega_{10})^2}{\Omega_0^2}\right\}$ и $E_0(\omega_2)=A_0\exp\left\{-\frac{(\omega_2-\omega_{20})^2}{\Omega_0^2}\right\}$. Тогда ($\bar{\omega}_0=\frac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2}$, $\Omega^0=\omega_{20}-\omega_{10}$)

$$\Gamma(\Omega,\Omega^0,\bar{\omega},\bar{\omega}_0)=A_0^2\exp\left\{\frac{(\Omega-\Omega^0)^2}{2\Omega_0^2}\right\}\exp\left\{-2\frac{(\bar{\omega}-\bar{\omega}_0)^2}{\Omega_0^2}\right\}. \qquad (11)$$

Зададимся двумя наиболее характерными моделями среды, предполагающими независимые временные и пространственные флуктуации ε_1, когда корреляционную функцию ε_1 можно представить в виде $R_\varepsilon(\tau,\vec{r}-\vec{r}')=R(\tau)R(\vec{r}-\vec{r}')$ (модель 1) и замороженный перенос неоднородностей со скоростью V, когда $R_\varepsilon(\tau,\vec{r}-\vec{r}')=R\left[\tau-\frac{((\vec{r}-\vec{r}')V)}{V^2}\right]$. Тогда, предполагая гауссовый вид R_ε имеем

$$\Phi'_{\varepsilon}(\Omega'=\omega-\omega',\vec{\rho})=\frac{\ell\tau_0}{2}\exp\left\{-\frac{\Omega^2\tau_0^2}{4}\right\}R(\vec{\rho}) \qquad (12а)$$

(модель 1)

$$\Phi'_{\varepsilon}(\Omega',\rho)=\frac{\ell^2}{V[1-\gamma_z^2]}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{\ell^2}\left[1-\frac{\gamma_z\gamma_\rho}{[1-\gamma_z^2]}-\gamma_\rho^2\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\Omega'^2\ell^2}{4V^2}\left[1+\frac{\gamma_z^2}{1-\gamma_z^2}\right]\exp\left\{-\frac{i\Omega'\rho\gamma_\rho}{V}\left[1+\frac{\gamma_z^2}{[1-\gamma_z^2]}\right]\right\}\right\},\ \gamma_z<1 \qquad (12б)$$

и

$$\Phi'_{\varepsilon}(\Omega',\vec{\rho})=\sqrt{\pi}\,\ell\,\delta(\Omega')R(\vec{\rho}),\ \gamma_z=1. \qquad (12в)$$

Подставляя (11) и (12) в (8) легко получить выражения для $\Gamma(\Omega,\vec{\rho})$ на выходе тонкого слоя. Заметим, что в рассматриваемом приближении малых δ_1, $\Gamma(\Omega,\vec{\rho})$ будем описывать фактически перенос функции пространственной корреляции в "тонком" слое. Решение для $\Gamma(\Omega,z,\vec{\rho})$ на любом расстоянии от такого слоя легко получить из (8), предполагая, что неоднородности за слоем отсутствуют (приближение фазового экрана). Тогда

$$\Gamma(\Omega,z,\vec{\rho})=\frac{i\omega^2}{2\pi cz\Omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\Omega,z=0,\vec{\rho})e^{-\frac{i\omega^2}{2cz\Omega}(\vec{\rho}-\vec{\rho}')}d\vec{\rho}, \qquad (13)$$

где через $\Gamma(\Omega,z=0,\vec{\rho})$ мы обозначили значение функции частотной корреляции на выходе экрана. Из (8), (11), (12в) прежде всего следует, что в данном приближении малых ε_1, замороженный перенос неоднородностей в направлении распространения волны (ось z) не сказывается на изменении $\Gamma(\Omega,0,\vec{\rho})$ и, следовательно, $\Gamma(\Omega,z,\vec{\rho})$.

В случае модели 1 и плоской волны ($A_0^2(\vec{\rho}) = const$) решение для $\Gamma(\Omega, z=0, \vec{\rho})$ можно получить в виде интерационного ряда по ε_1 . Опуская громоздкие вычисления , окончательно имеем ($\Omega = \Omega^\circ$)

$$\Gamma(\Omega, z=0, \vec{\rho}) = A_0^2 e^{-S_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S_0^2)^n}{n!} R^n(\vec{\rho}) \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2n\Omega_g^2)^{1/2}}, \quad (14а)$$

где S_0^2 – средний квадрат флуктуаций фазы волны в слое, $\Omega_g = 2/\tau_0$. Ряд (14) легко просуммировать представляя $\frac{1}{(\Omega_0^2+2n\Omega_g^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-(\Omega_0^2 + 2n\Omega_g^2)\xi^2\} d\xi$.
В результате

$$\Gamma(\Omega, z=0, \vec{\rho}) = \frac{A_0^2 \Omega_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp\{-\Omega_0^2 \xi^2\} \exp\{-S_0^2 (1 - R(\vec{\rho}) e^{-2\Omega_q^2 \xi^2})\}.$$

При $S_0^2 \gg 1$ величины $R(\vec{\rho})$ и $e^{-2\Omega_q^2 \xi^2}$ можно разложить в ряд и ограничиться двумя первыми членами разложения. Для Гауссова вида $R(\vec{\rho})$ имеем

$$\Gamma(\Omega, z=0, \vec{\rho}) \simeq \Gamma(0,0,\vec{\rho}) \simeq A_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2S_0^2\Omega_q^2)^{1/2}} \exp\{-S_0^2 \rho^2/\ell^2\} \quad (14б)$$

или после подстановки в (13)

$$\Gamma(\Omega, z, \vec{\rho}_1 = 0) = A_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2S_0^2\Omega_q^2)^{1/2}} \left[\frac{1}{1+\delta^2 D^2 S_0^4} + \frac{i\delta D S_0^2}{1+\delta^2 D^2 S_0^4} \right] \quad (15)$$

$D = \frac{4zc}{\omega \ell^2}$. Выражение (15) отличается от соответствующего выражения для стационарной среды лишь стоящим перед квадратной скобкой нормировочным множителем, который учитывает отсос энергии из данной части спектра. Таким образом, независимые флуктуации по $\vec{\rho}$ и τ не изменяют (в приближении фазового экрана и при $S_0^2 \to 1$) частотной корреляции флуктуаций поля. Из других приближенных решений (7), (8) можно ожидать, что этот результат существенно не изменится и в случае распространения волны в протяженном слое. Вместе с тем из (14) видно, что в случае слабого рассеяния его влияние на частотную корреляцию полей будет меньше, чем в стационарной среде, хотя частотная корреляция флуктуирующих полей $f_\omega = E_\omega - \langle E_\omega \rangle$ останется той же самой.

Несколько другая ситуация имеет место в случае, когда флуктуации ε_1, по τ и $\vec{\rho}$ связаны между собой. Например, при параллельном переносе неоднородностей вдоль ρ_x (модель 2 при $\gamma_z = 0$ $\gamma_\rho = \gamma_x = 1$) для гауссовой функции корреляции $R_{\varepsilon 1}$ можно получить

$$\Gamma(\Omega, z=0, \rho) = A_0^2 e^{-S_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^{2n}}{n!} \exp\left\{-\frac{n\rho_x^2 \Omega_0^2}{\ell_x^2(\Omega_0^2 + 2n\Omega_g^2)}\right\} \times \tag{16}$$

$$\times R_{\varepsilon 1}^n(\rho_y) \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2n\Omega_g^2)^{1/2}} .$$

Из (16) видно, что функция пространственной корреляции вдоль x существенным образом зависит от соотношения Ω_0 и $\Omega_g = \frac{2V}{\ell}$. Например, при $\Omega_g = 0$ как легко показать из (16), пространственный масштаб $\Gamma(z=0, \rho_x)$ определяется величиной $\ell_x / S_0 << \ell_x$ $(S_0^2 >> 1)$, а при $\Omega_g \gtrsim \Omega_0$ – величиной $\frac{\sqrt{2}\,\Omega_g}{\Omega_0} \ell_x > \ell_x$ (масштаб Γ по ρ_y равен ℓ_y / S_0). Соответственно, при $\Omega_g \approx \Omega_0$ выражение для $\Gamma(\Omega, z, \rho = 0)$ примет вид

$$\Gamma(\Omega, z, \rho=0) = A_0^2 \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0^2 + 2S_0^2\Omega_g^2)^{1/2}} \{(F_{xc} \cdot F_{yc} + F_{xs} \cdot F_{yc}) + \tag{17}$$

$$+ i(F_{xc}F_{yc} - F_{xs}F_{ys})\} \quad \begin{Bmatrix} F_{jc} \\ F_{js} \end{Bmatrix}_{j=(x,y)} = \left[\frac{(1+\delta^2 D_j^2)^{1/2} \pm \delta D_j}{1+\delta^2 D_j^2}\right]^{1/2},$$

$$D_x = \frac{2zc}{\omega \ell_x^2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_g}, \quad D_y = \frac{4zcS_0^2}{\omega \ell_y^2} .$$

Таким образом в рассмотренном случае функция $\Gamma(\Omega, z)$ убывает с ростом расстройки по частоте Ω значительно медленнее, чем в стационарном случае, а для одномерного экрана $(\ell_y/s_0 \gg \sqrt{2}\,\ell_x \Omega_g/\Omega_0)$ ее масштаб определяется величиной $2\omega/D_x$.

Приведенные результаты вычислений эквивалентны измерениям при приеме квазимонохроматических сигналов с полосой $\Omega_c = \Omega_0$ на приемное устройство с полосой $\Omega_п \ll \Omega_0$ или мнонохроматических сигналов на приемник с полосой $\Omega_п = \Omega_0$.

Как известно, средняя форма импульсного сигнала определяется функцией частотной корреляции флуктуаций поля (см. [5]). Это означает, при независимых флуктуациях ε_1 по $\vec{\rho}$ и τ при $s_0^2 \gg 1$ средняя форма импульсного сигнала будет такой же, что и в стационарной среде. Однако, при $s_0^2 \ll 1$ при приеме на узкополосный приемник $(\Omega_п < \Omega_0)$ ввиду уменьшения доли рассеянного сигнала форма импульса при $\Omega_g \gg \Omega_0$ будет стремиться к исходной. Наконец в случае переноса неоднородностей вдоль x и при $\ell_y/s_0^2 \gg \sqrt{2}\,\ell_x \Omega_g/\Omega_0$, средняя длительность принимаемого импульса даже при $s_0^2 \gg 1$ в предельном случае больших Ω_g будет определяться шириной спектра исходного импульса и равна $1/\Omega_0$.

Как нестационарность среды сказывается на величине флуктуаций сигнала? Прежде всего заметим, что аналогичным образом можно написать уравнение переноса для корреляционного момента четвертого порядка

$$\Gamma_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \equiv \langle E(\omega_1, \vec{r}_{\perp 1}) E^*(\omega_2, \vec{r}_{\perp 2}) E(\omega_3, \vec{r}_{\perp 3}) E^*(\omega_4, \vec{r}_{\perp 4}) \rangle$$

характеризующего при $\omega_i - \omega$ и $\vec{r}_{\perp i} = 0$ средний квадрат флуктуаций интенсивности сигнала

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} - \frac{i}{2}\left[\frac{1}{K_1}\Delta_{\vec{r}_{\perp 1}} - \frac{1}{K_2}\Delta_{\vec{r}_{\perp 2}} + \frac{1}{K_3}\Delta_{\vec{r}_{\perp 3}} - \frac{1}{K_4}\Delta_{\vec{r}_{\perp 4}}\right]\Gamma_4 + H = 0 \qquad (18a)$$

где

$$H = \frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' k' \sum_{j=1}^{4} k_j \Phi'_\varepsilon(\omega_j-\omega', \omega', \omega', \rho=0)\right]\Gamma_4(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\{k_1[k_2\Phi'_\varepsilon(\omega_1-\omega', \omega', \omega_2-\omega_1+\omega', \rho_{12})\Gamma_4(\omega', \omega_2-\omega_1+\omega', \omega_3, \omega_4) +$$

$$+k_4\Phi'_\varepsilon(\omega_1-\omega', \omega', \omega_4-\omega_1+\omega', \rho_{14})\Gamma_4(\omega', \omega_2, \omega_3, \omega_4-\omega_1+\omega') -$$

$$-k_3\Phi'_\varepsilon(\omega_1-\omega', \omega', \omega_3+\omega_1-\omega', \rho_{13})\Gamma_4(\omega', \omega_2, \omega_3+\omega_1-\omega', \omega_4)] + \tag{18б}$$

$$+k_2[k_2\Phi'_\varepsilon(\omega_2-\omega', \omega', \omega_3-\omega_2+\omega', \rho_{23})\Gamma_4(\omega_1, \omega', \omega_3-\omega_2+\omega', \omega_4) -$$

$$-k_4\Phi'_\varepsilon(\omega_2-\omega', \omega', \omega_4+\omega_2-\omega', \rho_{24})\Gamma_4(\omega_1, \omega', \omega_3, \omega_4+\omega_2-\omega')] +$$

$$+k_3k_4\Phi'_\varepsilon(\omega_3-\omega', \omega', \omega_4-\omega_3+\omega', \rho_{34})\Gamma_4(\omega_1, \omega_2, \omega', \omega_4-\omega_3+\omega')\}$$

$\rho_{jk} = |\vec{r}_{\perp j} - \vec{r}_{\perp k}|$, $\omega' - \omega_j << \omega_j$, флуктуации ε_1 считаются однородными $\Gamma_4(\omega', \omega_2, \omega_3, \omega_4 - \omega_1 + \omega') = \langle E(\omega', \vec{r}_{\perp 1}) \times$ $\times E^*(\omega_2 \vec{r}_{\perp 2}) E(\omega_3, \vec{r}_{\perp 3}) E^*(\omega_4 - \omega_1 + \omega', \vec{r}_{\perp 4}) \rangle$ и т.д.

Уравнение (18) в стационарном случае и при $\omega_1 = \omega_2$ переходит в известное уравнение взаимной когерентности четвертого порядка, впервые полученное в [4,6]. Решение (18) при $\omega_1 = \omega_2$ можно легко получить в приближении малых возмущений фазы волны в слое, когда все величины в (18б) можно приравнять их значениям на входе слоя. Ограничиваясь для простоты случаем фазового экрана и опуская громоздкие, но элементарные выкладки окончательно для первой модели среды имеем

$$m = \frac{\langle I_\omega^2 \rangle - \langle I_\omega \rangle^2}{\langle I_\omega \rangle^2} \simeq 2 S_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2\Omega_q^2)^{1/2}} \left[B - \frac{1}{1+D^2} \right] \tag{19}$$

$$B \simeq \exp\left\{ \frac{4(\omega-\omega_0)^2 \Omega_g^2}{\Omega_0^2 (\Omega_0^2 + 2\Omega_g^2)} \right\}$$

где спектр исходного сигнала взят в виде $E_0(\omega) = \exp\left\{ -\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Omega_0^2} \right\}$ и, учитывая малость S_0^2 мы положили в знаменателе (19) $\langle I_{\omega_0} \rangle \simeq 1$. Результат для протяженного слоя получается из (19) путем интегрирования по z в пределах от 0 до Δz (Δz – толщина слоя). Из (19) видно, что при $S_0^2 \ll 1$ флуктуации интенсивности (при $\omega = \omega_0$) уменьшаются по сравнению со стационарным случаем на фактор $\Omega_0/(\Omega_0^2 + 2\Omega_g^2)^{1/2}$, обусловленный перераспределением рассеянного поля в другие частоты. Для модели 2

$$m = 2 S_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2\Omega_g^2)^{1/2}} \left[B - \frac{1}{2} (F_{xc} \cdot F_{ys} + F_{xs} F_{yc}) \right] \tag{20}$$

где F_{jc} , F_{js} те же, что и в (17), но при $\check{\delta} = 1$.*) В случае сильных возмущений фазы волны в слое решение может быть легко получено в приближении фазового экрана на достаточно больших от него расстояниях, где поле волны мож-

*) При этом $D_x = D \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + 2\Omega_q^2}$, $D_y = D$.

но считать распределенным по нормальному закону. Тогда $\langle I^2\rangle-\langle I\rangle^2\approx\langle I\rangle^2\approx R^2_{EE^*}\equiv\Gamma^2(\Omega=0,z,\rho=0)$ и для исходного спектра сигнала $E_0(\omega)=A_0\exp\{-(\omega-\omega_0)^2/\Omega_0^2\}$ можно получить аналогично

$$\Gamma(\Omega,z)=\Gamma_{15}(\Omega,z)\exp\left\{-\frac{2(\bar{\omega}-\omega_0)^2}{(\Omega_0^2+2S_0^2\Omega_g^2)}\right\}e^{-\frac{\Omega^2}{2\Omega_0^2}}, \qquad (21)$$

где Γ_{15} – величина, определяемая формулой (15б). Таким образом в этом приближении при $S_0^2>>1$ так же как и в стационарном случае $m\approx 1$. Последнее связано с тем, что при $S_0^2>>1$, когда среднее поле волны равно нулю, средняя энергия (интенсивность) волны полностью определяется ее флуктуирующей компонентой. На основе (15б), (21) нетрудно также получить выражение для среднего квадрата флуктуаций энергии сигнала $\mathcal{E}=\int_{-\infty}^{+\infty}I(\omega)\,d\omega$

$$m_{\mathcal{E}}=\frac{\langle\mathcal{E}^2\rangle-\langle\mathcal{E}\rangle^2}{\langle\mathcal{E}\rangle^2}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Omega_{4k}}{(\Omega_0^2+2S_0^2\Omega_g^2)^{1/2}}\,e^{\frac{\Omega_{4k}^2}{\Omega_0^2}}\left[1-\Phi\left(\frac{\Omega_{4k}}{\Omega_0}\right)\right], \qquad (22)$$

где $\Omega_{4k}=2\omega/DS_0^2$. При $\Omega_g<<\Omega_0$ мы получаем из (21) известный эффект частотного усреднения флуктуаций энергии сигналов [5]. При $\Omega_{4k}>>\Omega_0$ из (21) следует тривиальный факт временного усреднения флуктуаций, когда $m_{\mathcal{E}}\sim\frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2+2S_0^2\Omega_g^2)^{1/2}}$. С другой стороны из (22) следует, что при $\Omega_{4k}<<\Omega_0$ величина флуктуаций энергии определяется отношением $\Omega_{4k}/(\Omega_0^2+2S_0^2\Omega_g^2)^{1/2}$, то есть в нестационарном случае $m_{\mathcal{E}}$ определяется наименьшей из величин Ω_0 и Ω_{4k}. Наконец, при наличии в среде неоднородностей двух (или более) временных масштабов, $m_{\mathcal{E}}$ (при усреднении $\mathcal{E}$ за $t>>1/\Omega_g$), связанный с "медленными" неоднородностями, определяется так же (22), но с заменой отношения Ω_{4k}/Ω_0 на $\Omega'_{4k}/(\Omega_0^2+2S_0^2\Omega_g^2)^{1/2}$, где Ω'_{4k} – РЧК, обусловленный рассеянием на "медленных" неоднородностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.L.Ginzburg, L.M.Erukhimov, Astrophys. Space Sci., 1971.
   Л.М.Ерухимов, И.Г.Зарницына, И.И.Кирш, Известия ВУЗов, Радиофизика, № 3, 1973 г.

2. Ю.А.Кравцов, Л.Л.Горышник, Геомагнетизм и аэрономия, 6, 279, 1969.

3. Л.А.Чернов, Акустический журнал, 15, 594, 1969.

4. В.И.Татарский, Препринт ИФА, Москва, 1970.

5. В.А.Алимов, Л.М.Ерухимов, Известия ВУЗов, Радиофизика, 11, № 2, 1968.

6. В.И.Шишов, Известия ВУЗов, Радиофизика, 11, 866, 1968.

7. В.Г.Гавриленко, Я.М.Дорфман, Известия ВУЗов, Радиофизика, 15, № 2, 1972.