

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 42



ИРФИ

Б.В. Чириков

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

г. Горький,
1973

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ⁺

§ 1. Проблема Ферми-Паста-Улама (ФПУ)

Прежде всего я хочу уточнить понятие стохастический процесс. Слово стохастический буквально означает случайный, нерегулярный. Однако эта случайность понимается по-разному. Обычно считается, что уже в уравнениях движения присутствует в той или иной форме случайный элемент: случайное внешнее возмущение, случайные неоднородности среды и т.п. В этом случае задача состоит в том, чтобы найти статистические свойства решения по заданным статистическим характеристикам возмущения. Такая задача уже многократно исследовалась и не будет рассматриваться в настоящих лекциях. Под стохастическим процессом мы будем понимать нечто совсем иное — рождение статистических законов в динамической системе, уравнения которой не содержат никаких случайных элементов. Иначе говоря, нас будут интересовать статистические решения динамических уравнений.

Общая теория стохастических волновых процессов в указанном выше смысле будет рассмотрена в лекциях Заславского. В этой лекции я расскажу о первом сравнительно простом примере подобного процесса.

Применительно к волновым процессам рассматриваемая проблема была поднята, по-видимому, впервые в классической работе Ферми, Паста, Улама (ФПУ) / 1/. В качестве модели авторы выбрали нелинейную струну, колебания которой описываются волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \left(1 + 3\beta \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right)^2 \right), \quad (1.1)$$

⁺ Прочитано на Республиканской школе по нелинейным колебаниям и волнам в распределенных системах. (Горьковская обл., март 1972 г.).

где z - координата вдоль струны, x - смещение, β - параметр нелинейности. С помощью численных экспериментов исследовался обмен энергией между линейными ($\beta = 0$) модами струны:

$$x_k(z) = Q_k \sin \frac{\pi k z}{L} \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (1.2)$$

где $k = 1, 2, \dots$ - номер моды, L - длина струны, φ_k , Q_k , $\omega_k = \pi k / L$ - фаза, амплитуда и частота моды, соответственно.

Ожидалось, что любая нелинейность приведет к равномерному распределению по энергии между всеми ^{+) модами колебаний, или, иначе говоря, к "термализации" системы. Такие ожидания были связаны, по-видимому, с тем, что авторы /1/ подходили к проблеме с точки зрения статистической механики, которая требует релаксации любой системы к состоянию термодинамического равновесия. Возможно здесь сыграла определенную роль и ранняя работа самого Ферми /2/, в которой содержалась попытка доказательства того, что в общем случае механическая система является квази-эргодической. Как мы теперь знаем, этот результат, так же как и положенная в его основу теорема Пуанкаре о неинтегрируемости уравнений движения в общем случае, не имеют прямого отношения к реальному поведению механических систем ввиду чересчур сильных предположений, использованных при доказательстве.}

+) Как отметил Синай, уже здесь возникает определенное противоречие, поскольку непрерывная струна обладает бесконечным числом степеней свободы, так что мы приходим к своеобразному варианту "ультрафиолетовой катастрофы" (см. § 5). Фактически, в /1/ непрерывная струна была заменена нелинейной цепочкой с конечным числом степеней свободы, так что указанное затруднение не возникало (§ 2).

Благодаря глубокой физической интуиции Ферми, по-видимому, и сам не верил в свое доказательство и поэтому решил обратиться для выяснения вопроса к численным экспериментам. Последние не обнаружили равномерное распределение по энергии, по крайней мере, так считали их авторы /1/. Они были настолько удивлены полученным результатом, что не обратили внимания на некоторые "исключения", которые можно было бы рассматривать как признаки "термализации" системы (см. например, рис. 5 в /1/).

Так или иначе, возник парадокс Ферми-Паста-Улама (ФПУ) – почему в нелинейной системе с большим числом степеней свободы не наблюдается термализация?

§ 2. Модель ФПУ

Как уже упоминалось, в /1/ использовалась дискретная модель нелинейной струны – нелинейная цепочка, уравнение движения которой можно записать в виде:

$$\ddot{x}_n = x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n + \beta \left[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3 \right] \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Эту модель обычно представляют себе наглядно как цепочку одинаковых масс, связанных одинаковыми нелинейными пружинами. Однако сейчас такая механическая модель является уже, пожалуй, слишком старомодной. Вместо этого лучше говорить об электромагнитной линии задержки, представляющей собой цепочку нелинейных индуктивностей (с ферритом) и емкостей полупроводниковых диодов. Я хотел бы особо отметить, что подобные линии успешно применяются Островским и сотрудниками (НИРФИ, г. Горький) для изучения различных нелинейных волновых процессов /3/.

Для численных экспериментов, о которых пойдет речь ниже, модель ФПУ также оказалась очень удобной. С одной стороны, она позволяет проследить переход от сравнительно простых дискретных систем к совершенно еще неизученным нелинейным волновым процессам, а с другой — эта модель достаточно проста для современных ЭВМ, чего нельзя сказать, например, о нелинейных уравнениях в частных производных, скажем, вида (3.1).

Система уравнений (2.1) интегрируется, обычно, при нулевых граничных условиях (НГУ):

$$x_0 = x_N = 0, \quad (2.2)$$

что соответствует стоячим волнам. Иногда используются периодические граничные условия (ПГУ):

$$x_0 = x_N, \quad (2.3)$$

которые допускают бегущую волну (§ 6).

Обработка полученных данных производится, как правило, в терминах нормальных колебаний (мод) линейной цепочки ($\beta = 0$) (1.2), частоты которых для цепочки равны:

$$\omega_k = 2 \sin \frac{\pi k}{2N}, \quad (2.4)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$ — для НГУ и $k = 2, 4, \dots, N$ (N — четное) для ПГУ.

Начальные условия задаются обычно в виде суперпозиции нескольких мод.

§ 3. Солитоны.

Первое решение парадокса ФПУ было дано Крускалом и Забуским /4/. Прежде всего они обратили внимание, что дисперсия в цепочке (2.4) предотвращает опро-

кидывание волны, неминуемое для уравнения (1.1). Поэтому более правильно сопоставлять цепочку с нелинейным волновым уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \left(1 + 3\beta \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2\right) + \gamma^2 \frac{\partial^4 x}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

где $\gamma^2 = a^2/12$; a - шаг цепочки.

Далее, для волны одного направления последнее уравнение можно приближенно свести к уравнению первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3.2)$$

$$\tau = \frac{3}{2} \beta (x-t) ; \quad \delta^2 = 2\gamma^2/3\beta.$$

Последнее представляет собой так называемое обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза (KdV), полученное еще в конце прошлого века для волн на поверхности воды. Известно, что такие уравнения обладают стационарными решениями типа уединенного бегущего импульса, получившими название солитоны. Однако совершенно неожиданно оказалось, что солитоны не взаимодействуют между собой несмотря на нелинейность уравнения. Сначала это было показано с помощью численных экспериментов /4/, а затем подтверждено очень красивой точной теорией уравнения KdV , созданной принстонской группой /5/ и развитой затем Захаровым и др. (см. например, /6/).

Это свойство уравнения KdV и было использовано в /4/ для объяснения парадокса ФПУ. Таким образом отсутствие термализации цепочки связывалось с особыми свойствами конкретного вида нелинейного взаимодействия.

Сейчас очевидно, что такое объяснение не может быть удовлетворительным хотя бы потому, что квазипериодическое движение нелинейной системы оказалось

столь же типичным случаем, как и эргодическое. Это было показано Колмогоровым /7/ примерно в то же время, когда производились численные эксперименты ФПУ.

Эта работа Колмогорова была неизвестна Крускалу и Забускому, однако, о ней знала наша группа в Институте ядерной физики СО АН СССР. Поэтому, не зная в тот момент о работе /4/, мы выдвинули совершенно иное объяснение парадокса ФПУ /8/.

§ 4. Граница стохастичности.

К нелинейной цепочке (2.1) мы применили наши методы анализа колебаний дискретных систем /9-12/. Основным из них является критерий стохастичности по перекрытию нелинейных резонансов. Суть его сводится к следующему.

Будем рассматривать нелинейную цепочку как систему нормальных осцилляторов (1.2), слабо связанных нелинейным возмущением. Последнее вызывает относительно медленные изменения (биения) энергии и частоты (из-за нелинейности) осцилляторов. Можно показать, /8/, что амплитуда биений частоты имеет порядок:

$$\delta\omega_k \sim \epsilon \omega_k \sim \epsilon k \omega_0, \quad (4.1)$$

где $\omega_0 = \pi/N$ - минимальная частота линейной моды цепочки для $k = 1$ (2.4), а ϵ - безразмерный параметр нелинейного возмущения, который можно оценить из (3.1):

$$\epsilon \sim 3\beta u^2 \sim 3\beta E/N, \quad (4.2)$$

где E - полная энергия колебаний струны.

Наиболее сильные биения происходят при выполнении резонансных условий, или, как принято говорить в этой школе, условий синхронизма:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0 \quad (4.3)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0.$$

В рассматриваемом случае нелинейное взаимодействие является 4-х-волновым, так как мы взяли кубическую нелинейность (1.1; 2.1; 3.1). Величины k , ω_k могут иметь независимо оба знака, так что выполнение резонансных условий всегда возможно.

Расстояние до соседних резонансов по частоте определяется минимальным изменением ω_k , которое для $k \ll N$ равно ω_0 . При условии:

$$\frac{\varepsilon \omega_k}{\omega_0} \sim \varepsilon k \geq 1 \quad (4.4)$$

возможен переход от одного резонанса к другому. Оказывается, что движение в этом случае принимает нерегулярный, стохастический характер. Поэтому (4.4) дает критерий, или границу стохастичности.

Таким образом для термализации даже нелинейной системы необходимо выполнение определенных условий типа (4.4). Иными словами, можно сказать, что граница между динамикой и статистикой проходит не между линейными и нелинейными системами, как иногда думают, а внутри последних.

В критерии (4.4) k означает средний номер возбужденных мод. Однако, вообще говоря, возбужденная вначале мода распадается на солитоны (§ 3), что приводит к увеличению номера мод:

$$k \rightarrow k_c \sim \sqrt{\varepsilon} N. \quad (4.5)$$

Оценка эта может быть получена из уравнения KdV (3.2). Если подставить ее в (4.4), то критерий стохастичности принимает вид:

$$\varepsilon \geq N^{-2/3} \quad (4.6)$$

и вообще не зависит от начального номера моды, если только она не слишком велика: $k \approx \sqrt{\epsilon} N$ (условие распада на солитоны).

Граница (4.6) лежит достаточно низко даже при $N = 16$ ($\epsilon \approx 0,17$). Почему же тогда не наблюдалась стохастичность в работе /1/? Оказывается, авторам этой работы исключительно повезло, когда в качестве начального условия они, по-видимому, случайно выбрали $k = 1$. Дело в том, что в силу каких-то специфических особенностей первая мода не распадается на солитоны, и для нее работает оценка (4.4) ($\epsilon \approx 1$), которая обычно делает стохастичность невозможной. Если бы не это случайное обстоятельство, не возникало бы никакого парадокса, а сохранилось бы неправильное убеждение, что многомерная нелинейная система всегда термализуется.

§ 5. Статистические свойства нелинейной

цепочки

Аналитические критерии стохастичности (4.4,6) были подтверждены в работах /13/ с помощью численных экспериментов. Что же конкретно означает стохастичность? О каких статистических свойствах идет речь?

Прежде всего это – равномерное распределение, в среднем по времени, энергии между модами колебаний, с которого, собственно, и началась вся проблема ФПУ. При достаточном большом превышении порога стохастичности такое равномерное распределение действительно имеет место как показывает, например, рис. 1 /13/. Падение спектра в области малых мод (кривая 3) можно объяснить тем, что после распределения энергии эта область попадает на самую границу стохастичности (4.4). При увеличении ϵ это падение исчезает, а при уменьшении область равномерного распределения сокращается (кривая 2).

Последнее обстоятельство очень существенно. Как мы уже упоминали выше (§ 1), в непрерывной системе с бесконечным числом степеней свободы возникает обратная "ультрафиолетовая катастрофа": при заданной начальной энергии возбуждения энергия каждой моды стремится к нулю. В этом, в частности, проявляется качественное отличие стохастического движения непрерывной среды от дискретной.

Наличие границы стохастичности ликвидирует "ультрафиолетовую катастрофу": распределение энергии между модами прекращается, когда энергия каждой моды падает настолько, что достигается граница стохастичности.

Равнораспределение энергии между модами в среднем по времени характеризует эргодичность движения, которая сама по себе является довольно слабым статистическим свойством. Например, движение по двумерному тору с иррациональным отношением частот эргодично, однако, оно мало соответствует нашему интуитивному представлению о стохастичности (более наглядный пример - развертка луча телевизора). Тем не менее уже эргодичность позволяет ввести понятие вероятности в механику.

Более сильным статистическим свойством является закон распределения энергии одной моды в различные моменты времени или, что то же, распределение по энергии различных мод в некоторый момент времени. Каждую отдельную моду можно рассматривать при этом как малую подсистему ($N \gg 1$), помещенную в "термостат", образованный остальными модами. В соответствии с этим распределение должно быть габбсовым: $\frac{dn}{d\epsilon_k} \propto e^{-\epsilon_k/T}$, где ϵ_k - энергия одной моды, а T - некоторая "температура" цепочки. Численные эксперименты подтверждают эти ожидания.

Аналогичная картина должна наблюдаться и для распределения отдельных частиц цепочки по скоростям: $dn/dv \propto e^{-v^2/2T}$. На рис. 2 приведен пример такого распределения.

Самым сильным из известных статистических свойств динамической системы является исчезновение автокорреляций. Последние определяются обычно соотношением:

$$\rho_x(\tau) = \frac{\overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} - \bar{x}^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (5.1)$$

$$\rho_E(\tau) = \frac{\overline{E(t) E(t+\tau)} - \bar{E}^2}{\overline{E^2} - \bar{E}^2}$$

для координаты одной из частиц цепочки и энергии, соответственно. Пример затухания автокорреляций в цепочке показан на рис. 3. Некоторый подъем корреляционной функции после прохождения через нуль лежит в пределах статистических ошибок.

Поведение автокорреляций характеризует процесс перемешивания в динамической системе. Корреляционное время, которое для случая на рис. 3 составляет $\tau_{\text{кор}} \sim 100$, характеризует динамическую стадию процесса; участки же движения с $\Delta t \gg \tau_{\text{кор}}$ статистически независимы.

Как известно из теории случайных процессов (см. например, /14/), функция $\rho(\tau)$ связана со спектром движения (скажем, $x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t) e^{i\omega t} dt$) соотношением ($\bar{x} = 0$):

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \rho(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{\sqrt{2\pi} |x(\omega)|^2}{[x(t)]^2} \quad (5.2)$$

Апериодические корреляции типа рис. 3, характеризующие необратимую статистическую релаксацию в системе, соответствуют непрерывному спектру движения $x(\omega)$. Таким образом появление статистических свойств в динамической системе соответствует переходу к непрерывному спектру движения.

- Согласно современной эргодической теории (см. например, /15/) первоисточником всех статистических

свойств динамической системы является локальная неустойчивость движения, означающая, грубо говоря, что близкие вначале траектории расходятся, в среднем, экспоненциально со временем (рис. 4):

$$\Delta = \Delta_0 e^{-ht}, \quad (5.3)$$

где Δ - некоторое расстояние между траекториями. Средний показатель экспоненты h называется КС - энтропия или, более полно, динамическая энтропия Крылова-Колмогорова-Синая по имени физика Крылова /16/ и математиков Колмогорова и Синая, исследовавших статистические свойства динамических систем⁺⁾ .

Разумеется, закон (5.3) справедлив лишь для достаточно малых $\Delta \rightarrow 0$, так как движение рассматриваемых колебательных систем ограничено в пространстве. В сочетании с локальной неустойчивостью это как раз и приводит к перемешиванию траекторий.

Экспоненциальная локальная неустойчивость вида (5.3) оказалась очень чувствительным признаком стохастичности. Мы использовали ее для экспериментального нахождения границы стохастичности, как это показано; например, на рис. 5.

Экспериментальная зависимость $h(\beta)$ удовлетворительно согласуется с ожидаемой /10/:

$$h \approx \frac{\omega_0}{\sigma} \ln \frac{\beta}{\beta_{2p}} \approx \frac{1}{N} \ln \frac{\beta}{\beta_{2p}}. \quad (5.4)$$

. Найденная таким образом граница стохастичности сравнивается с аналитическими оценками (4.4,6) в таблице, где k_0 обозначают номера начальных возбужденных мод.

⁺⁾ Более подробное обсуждение физического смысла КС - энтропии и ее связи с термодинамической энтропией см. в /12/.

В общем наблюдается удовлетворительное согласие с экспериментом. Исключения составляют 3 случая, отмеченные в таблице кружками. Случаи 2,3 могут быть объяснены качественно неприменимостью критерия (4.4) к высоким модам. Действительно, оценки показывают /8/, что в этом случае величина ϵ_{zp} существенно понижается. Однако в случае 9 наблюдается как раз обратный эффект. Причина этого пока не ясна (см. § 6).

§ 6. Стохастичность и солитоны

Проделанные эксперименты казалось бы разрешают парадокс ФПУ. Наличие границы стохастичности для нелинейной цепочки и ее статистические свойства были подтверждены также независимыми численными экспериментами японской группы /17/. Но как же быть с солитонами? Ведь они совершенно не взаимодействуют между собой и, следовательно, не могут дать никакой стохастичности. Правда, солитоны относятся к уравнению KdV , которое лишь приближенно описывает цепочку. Точность этого приближения формально характеризуется нелинейным параметром ϵ .

Может быть, более важной особенностью KdV является то обстоятельство, что оно описывает только бегущую волну. Между тем, все эксперименты с нелинейной цепочкой относились только к стоячим волнам (НГУ). Поэтому мы предприняли некоторые эксперименты с периодическими граничными условиями (ПГУ) /13/. Правда, нам не удалось получить начальное возмущение в виде чисто бегущей волны, однако мы смогли снизить долю обратной волны до нескольких процентов. В этом случае можно было бы ожидать затруднения развития стохастичности, т.е. повышения ϵ_{zp} , ввиду близости к KdV . В действительности же ϵ_{zp} даже несколько понизилось для ПГУ по сравнению с НГУ.

В чем же дело? Непосредственной причиной развития стохастичности для ПГУ является быстрый рост обратной волны, как это видно, например, на рис. 6. Появление обратной волны связано, в свою очередь, с развитием локальной неустойчивости. Но откуда берется локальная неустойчивость? Ведь в чисто бегущей волне ее заведомо не должно быть (переход к KdV)? Почему же никак не сказывается начальная малость обратной волны?

По-видимому, мы еще не понимаем весьма важных сторон явления стохастичности в нелинейной цепочке. Можно проделать еще более простой эксперимент. Возбудим в цепочке с НГУ одну достаточно высокую моду, которая не распадается на солитоны (рис. 7). С точки зрения модели связанных нелинейных осцилляторов никакой стохастичности тут быть не должно, так как возбужден всего один осциллятор. И действительно, вначале картина движения вполне респектабельная — никаких признаков надвигающейся грозы. Но это впечатление обманчиво — неожиданно начинается бурный обмен энергией между модами колебаний, и происходит "термализация" системы.

Что же случилось?

Частичный ответ на этот вопрос дает рис. 8, относящийся к тому же случаю, что и рис. 7. Оказывается, что в то время, как глобальная картина движения на рис. 7 создает впечатление полного порядка, в системе происходит бурный, но до поры до времени глубоко скрытый процесс экспоненциального роста невозбужденных (!) мод, приводящий в конце концов к полной стохастичности. Начальная доля энергии этих "паразитных" мод чрезвычайно мала ($\sim 10^{18}$), они вызваны разного рода ничтожными возмущениями; в данном случае ошибками счета. Их рост есть проявление все той же локальной неустойчивости стохастической системы. Но, спрашивается, почему критерий стохастичности по перекрытию резонансов продолжает работать и в этом случае, хотя он казалось бы не имеет уже никакого физического смысла? Возможно, что эта загадка как-то связана с предыдущей,

касающейся почти бегущей волны. Не с этим ли связано и аномально высокое значение ϵ_{2p} в случае 9 (см. таблицу)? Но, с другой стороны, случаи 4, 5, 6 не показывают аномалий при еще меньших ϵ_{2p} , а случаи 2, 3 с относительно высокими начальными модами (как и в случае 9) показывают противоположные аномалии.

§ 7. Диссипация и стохастичность

В заключение этой лекции мне хотелось бы сделать несколько замечаний относительно возможного влияния диссипации энергии. При этом я подразумеваю диссипацию обоих знаков, т.е. как затухающие колебания, так и автоколебания.

Рассмотренная выше модель нелинейной цепочки является строго консервативной. Правда, из-за ошибок счета в численных экспериментах всегда присутствует небольшая диссипация. В наших экспериментах она ($\Delta E / E$) не превосходила 0,1% (за все время счета). При этом никаких аномалий не наблюдалось.

Значительная диссипация прежде всего изменяет функцию распределения траекторий стохастического движения; вместо равномерного заполнения энергетической поверхности происходит концентрация движения вблизи областей нулевой диссипации, т.е. вблизи положения равновесия пассивной системы или в районе предельного цикла активной. В последнем случае возникает любопытный режим стохастических автоколебаний.

Ограничивается ли этим влияние диссипации? Вообще говоря, нет. Дело в том, что в колебательных системах эргодическая компонента почти никогда не занимает все фазовое пространство, 10%. Обычно она содержит внутри себя множество (быть может даже всюду плотное) мелких островков устойчивости вокруг периодических траекторий. При наличии диссипации каждый из них становится центром притяжения, область которого может распростра-

ниться и на эргодическую компоненту. Таким образом по крайней мере часть ее может быть "испорчена" диссипацией, т.е. превращена в периодические траектории. Более детальное исследование этого вопроса представляется мне очень интересным.

Т а б л и ц а

	N	k ₀	E ₀	ε _{зр}		π / ω ₀	
				эксп.	теор.	эксп.	теор.
1	32	1, 3, 5	0,95	0,16	0,26	34	32
2	"	15,17,19	17	0,025	0,18	45	"
3	"	20	39	0,012	0,10	200	"
4	200	2	0,5	0,09	0,21	"	200
5	"	5	3	0,06	0,12	250	"
6	"	10	12	0,09	0,07	140	"
7	300	1	0,18	0,22	0,20	170	300
8	500	10	1,9	0,14	0,06	"	500
9	"	202	700	0,13	0,01	100	"

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems I*, Los Alamos Scientific Report LA-1940, 1955.
Э.Ферми, Научные труды, т.2, стр.647, Наука, М.1972.
2. E. Fermi, *Physikalische Zeitschrift*, 24, (1923) 261.
Э.Ферми, Научные труды, т.1, стр.115, Наука, М. 1972.
3. L.A. Ostrovskii, *Alta Frequenza*, 38, (1969) 207;
Л.А.Островский, Л.В.Соустов, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 15 (1972) 242.
4. M.D. Kruskal, N.J. Zabusky, *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240.
5. G.S. Gardner, G. Green, M. Kruskal, R. Miura, N. Zabusky, *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1204; II. (1970) 952.
6. В.Е.Захаров, Л.Д.Фадеев. Функциональный анализ и его прилож. 5, (1971), 18.
7. А.Н.Колмогоров, ДАН, 98, 527 (1954).
8. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, ДАН 166, (1966) 57.
9. Б.В.Чириков, Атомная энергия, 6 (1959) 630.
10. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, Новосибирск, 1969, препринт ИЯФ, 267.

11. Г.М.Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, М., "Наука", 1970.
12. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН 105 (1971) 3.
13. Ф.М.Израйлев, А.И.Хусамутдинов, Б.В.Чириков, Численные эксперименты с нелинейной цепочкой, препринт ИЯФ СО АН, 1968;
Ф.М.Израйлев, В.А.Таюрский, Численное исследование стохастичности волн в цепочке связанных ангармонических осцилляторов, препринт ИЯФ СО АН, 1970.
14. А.А.Харкевич, Спектры и анализ, ФМ, М., 1962.
15. Д.В.Аносов, Я.Г.Синай, УМН 22, в.5 (1967) 107.
16. Н.С.Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, М., 1950.
17. N.Saito, N.Ooyama, Y.Aizawa, H.Hirooka, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, N 45 (1970) 209.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

- Рис. 1. Усредненный по времени спектр энергий мод для случая 2 в таблице: 1 - начальное возбужден. ($t = 0$); 2 - $\xi/\xi_{cr} \approx 2$ ($t = 18300$); 3 - $\xi/\xi_{cr} \approx 30$ (вначале), $t = 18050$.
- Рис. 2. Распределение частиц нелинейной цепочки по скоростям для случая 6 в таблице: $\xi/\xi_{cr} \approx 8$; прямая соответствует максвелловскому распределению с "температурой" $T = 0,077$.
- Рис. 3. Исчезновение автокорреляций 10-й моды для случая 6 из таблицы: $\xi/\xi_{cr} \approx 12$.
- Рис. 4. Пример локальной неустойчивости движения в стохастической области: $\beta = 0,5$ (1); 1,75 (2); 2,0 (3); 2,25 (4); 2,5 (5); $\beta_{cr} = 0,5 \pm 0,1$ (см. рис. 5).
- Рис. 5. Определение границы стохастичности для нелинейной цепочки по локальной неустойчивости: h - КС - энтропия (в сек⁻¹); β - параметр нелинейности.
- Рис. 6. Пример развития стохастичности в замкнутой цепочке (ПГУ) для начального возмущения в виде почти бегущей волны: а) изменение энергии возбужденной моды; б) зависимость доли обратной волны от времени; $N = 32$; $\xi/\xi_{cr} \sim 1$.
- Рис. 7. Зависимость энергии от времени для нескольких мод, номера которых указаны на кривых, формально система находится на границе стохастичности: $\xi/\xi_{cr} \sim 1$.
- Рис. 8. Локальная неустойчивость для случая на рис. 7: цифры на кривых - номера мод.

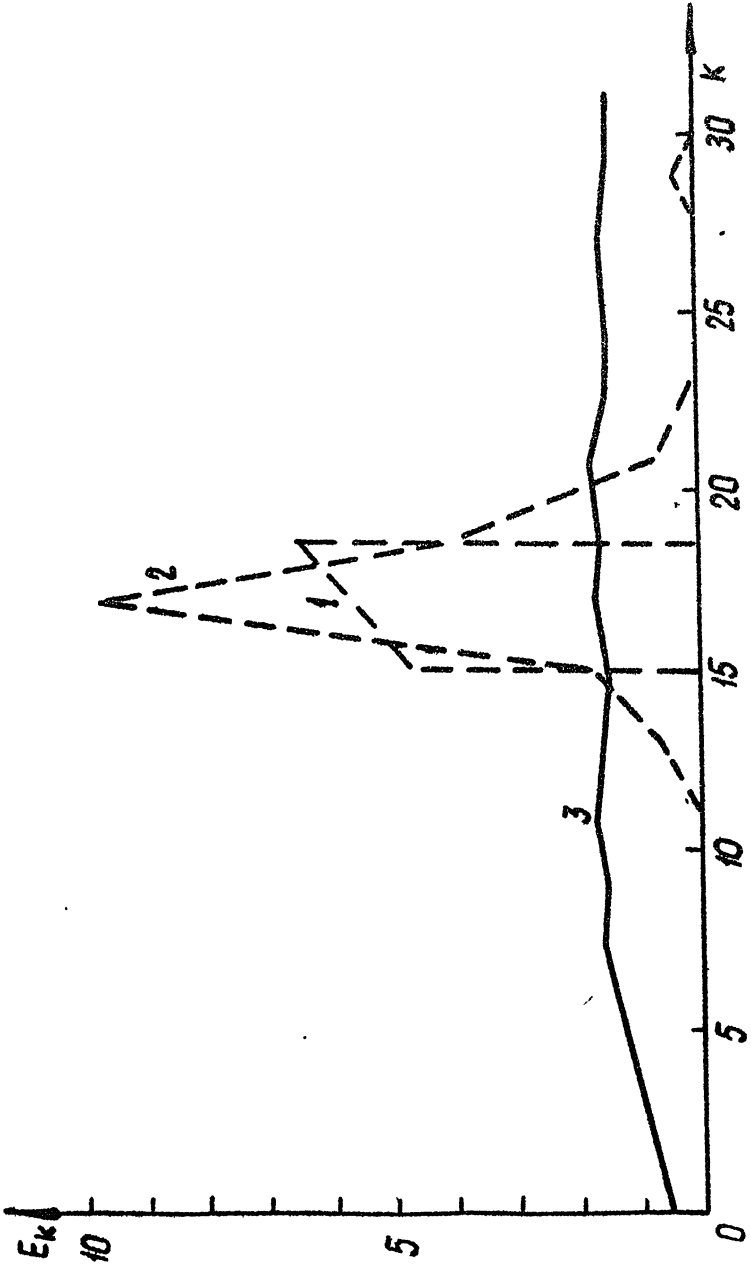


Рис. 1

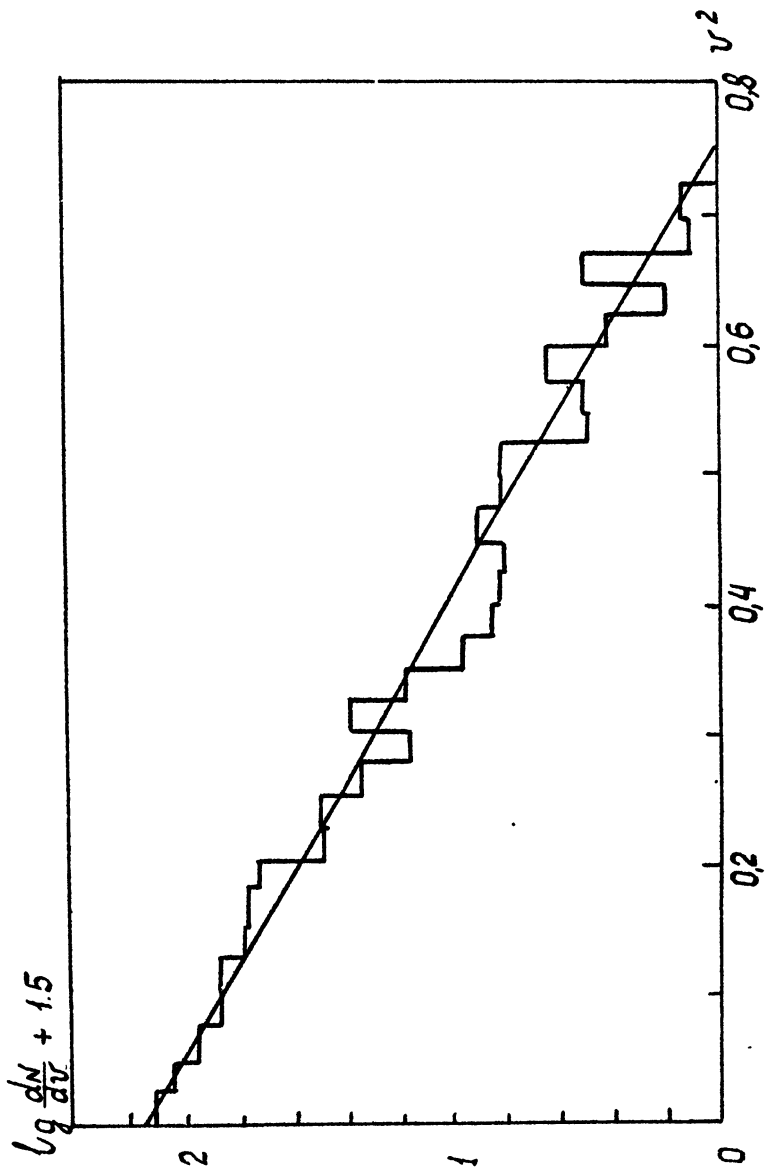
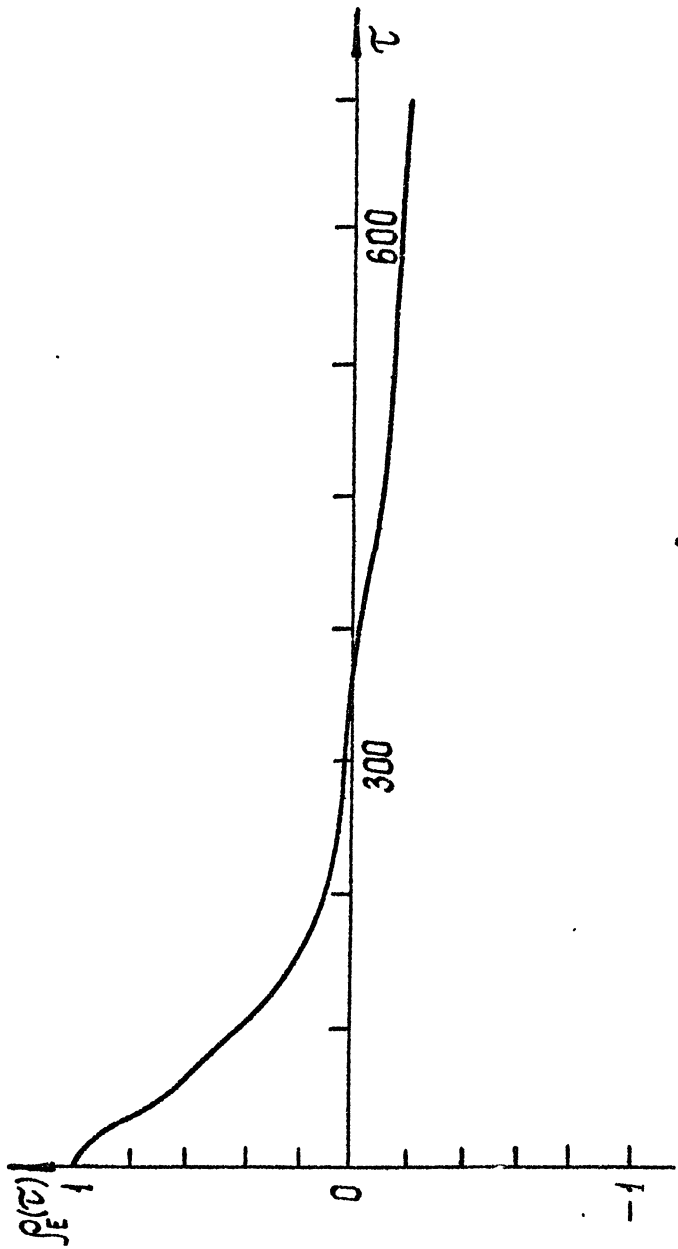


рис. 2



PUC. 3

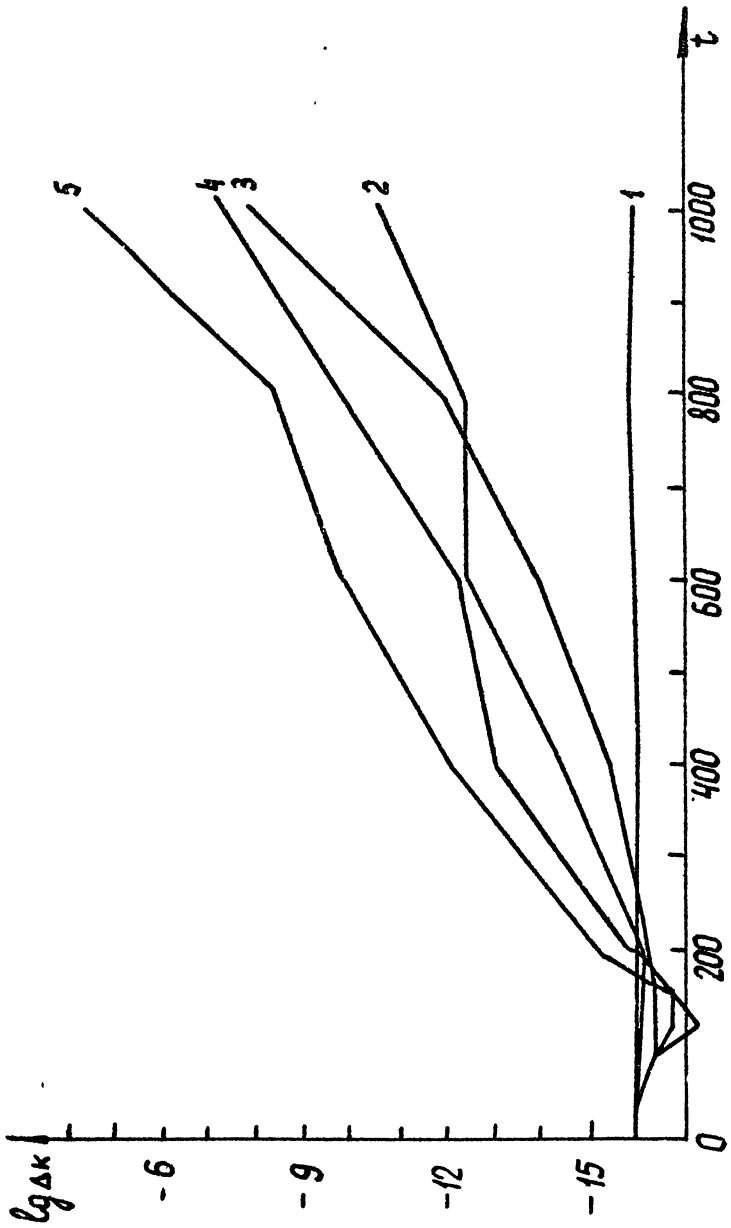
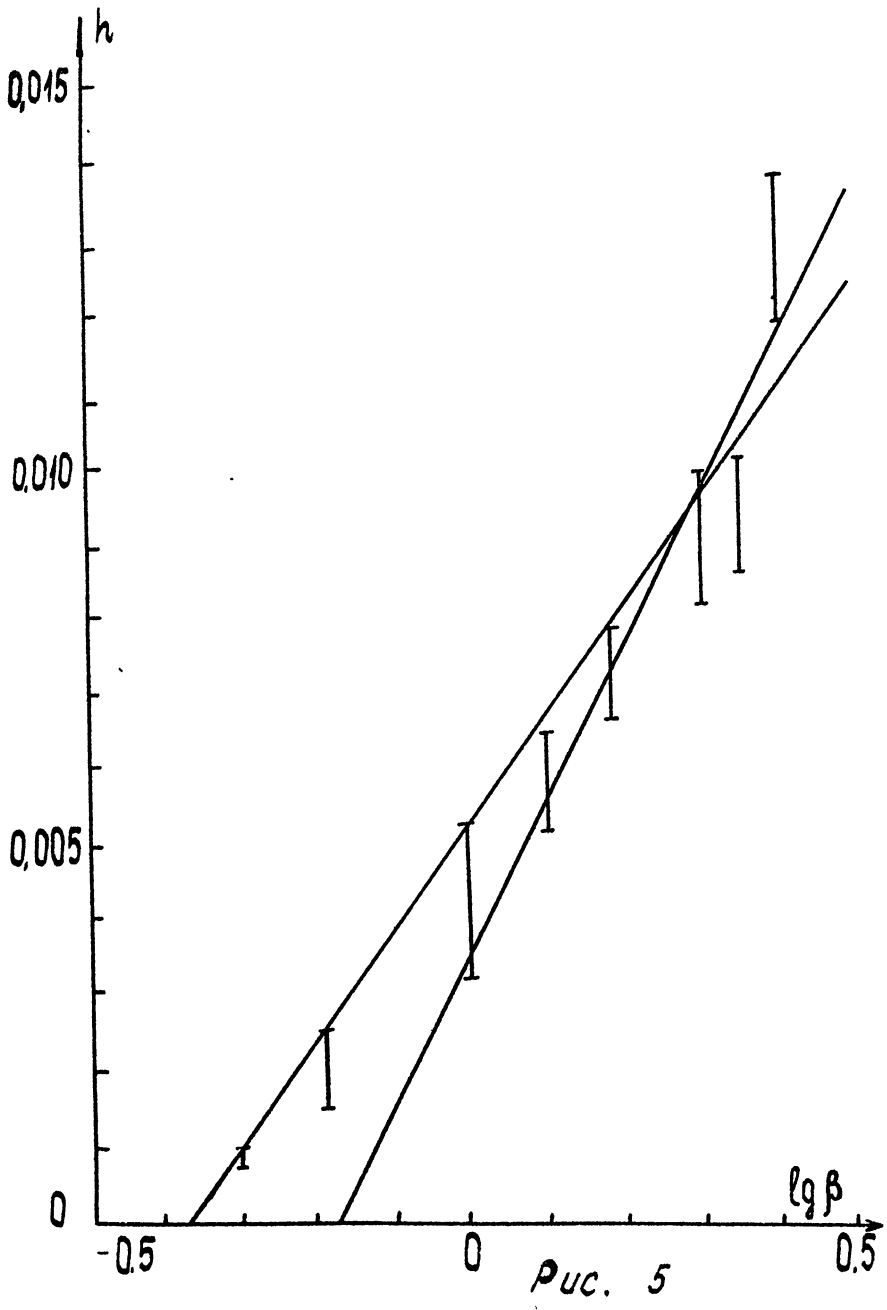


Рис. 4



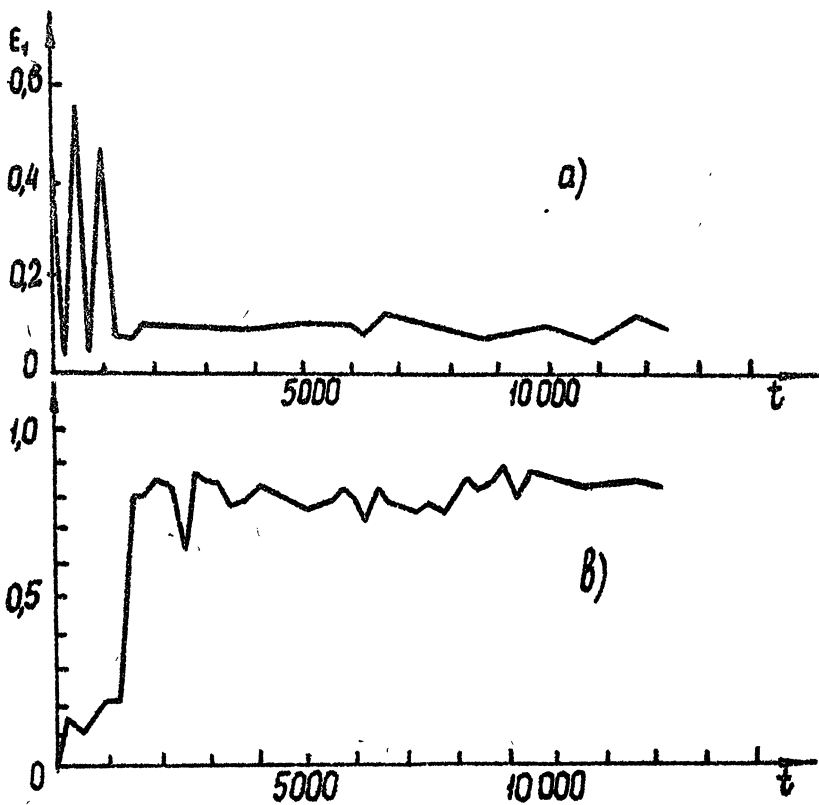


Рис. 6

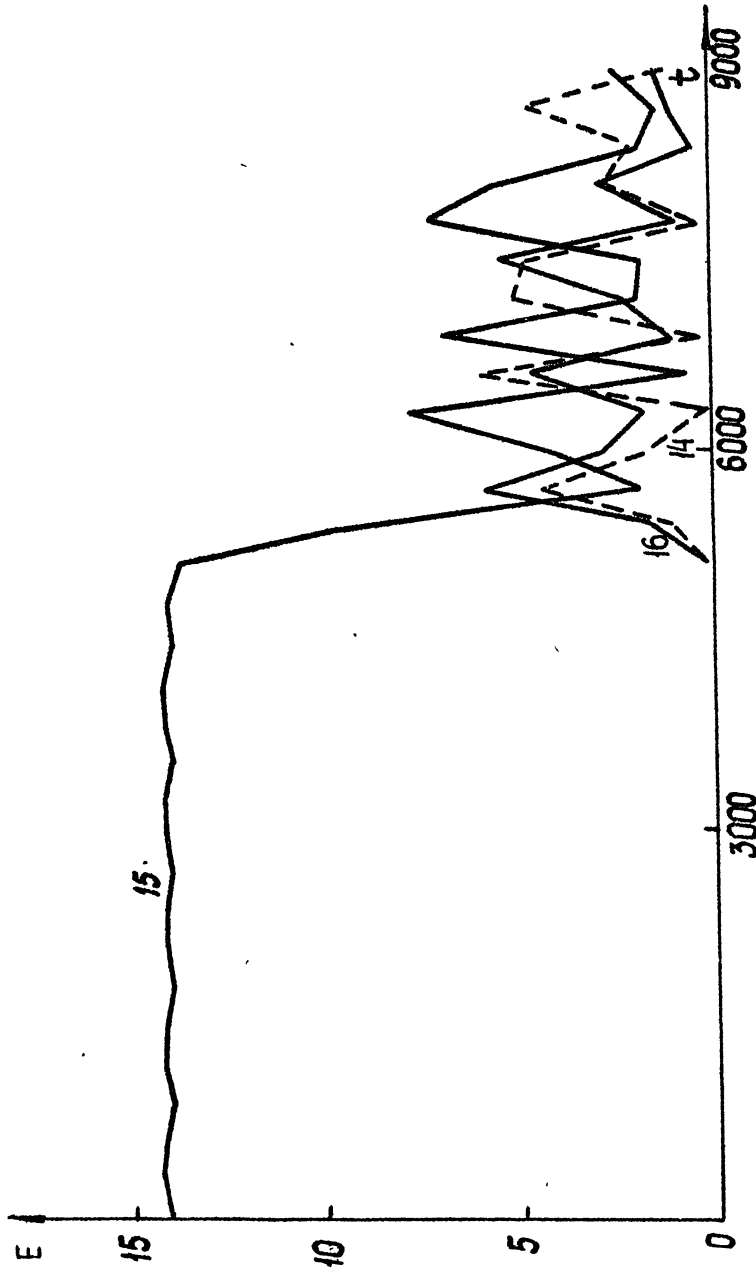


Рис. 7

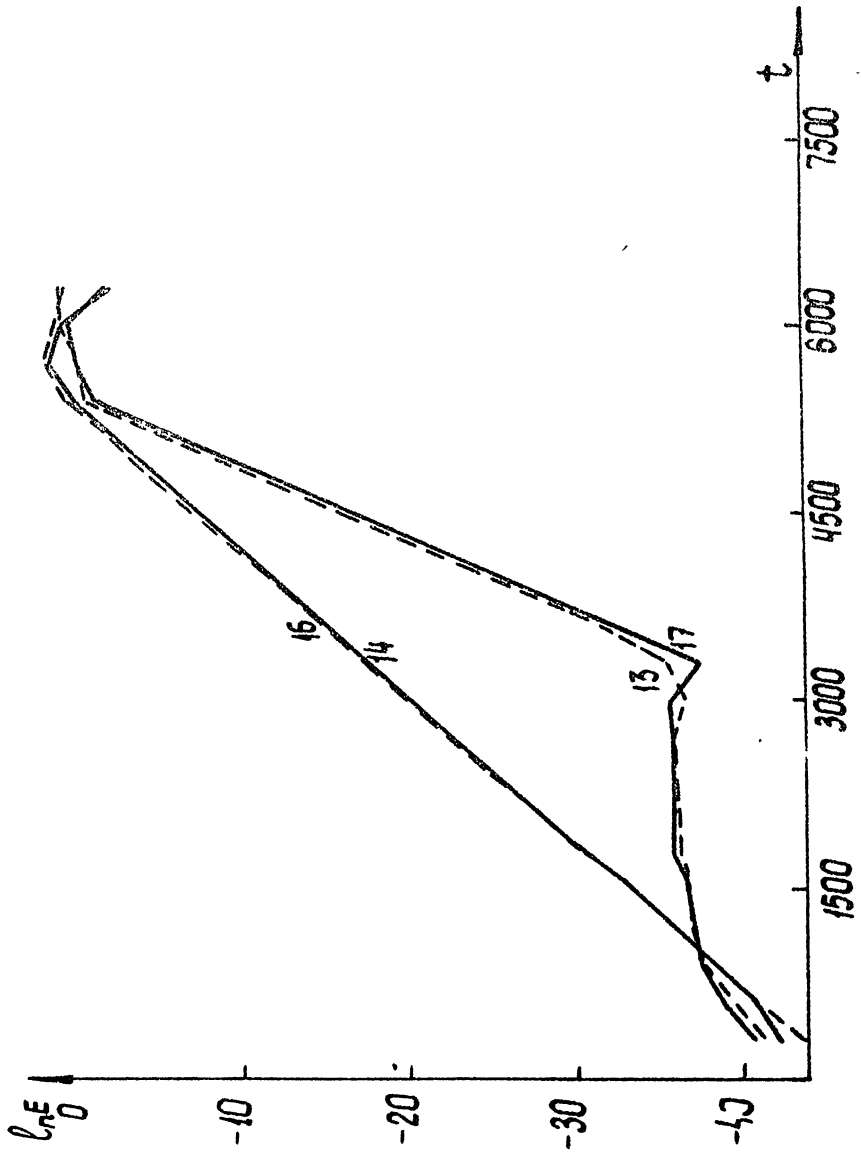


Рис. 8