Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 48

НИРФИ

В.А.Алимов, Л.М.Ерухимов

К ВОПРОСУ О ГЛУБОКИХ ЗАМИРАНИЯХ КВ СИГНАЛОВ

г.Горький,
1974

А н н о т а ц и я

Получено выражение для распределения флуктуаций интенсивности за линзовой неоднородностью произвольной формы в случае высоких и низких уровней сигнала. На основании этого распределения, а также распределения флуктуаций для модели пуассоновских шумов, дана физическая интерпретация глубоким замираниям КВ сигналов на примере двух статистических моделей ионосферы (модели линзовых и рассеивающих неоднородностей). Показано соответствие модели статистического экрана с нормальным распределением фазы на экране и с гауссовой функцией корреляции ее флуктуаций модели линзовых гауссовых неоднородностей с некоррелированными по осям координат фокусирующими свойствами (на примере сравнения асимптотического поведения индексов флуктуаций сигнала для этих моделей).

Согласно экспериментальным исследованиям (см. например [1]) при распространении коротких радиоволн в волноводе Земля-ионосфера возникают замирания сигнала, вероятность появления которых существенно превышает ожидаемую из релеевского закона, описывающего распределение амплитуды полностью рассеянного сигнала в зоне Фраунгофера.

В 1943 г. Накагами, для описания таких подрелеевских замираний предложил закон распределения

$$P(R) = \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m)(\langle R^2\rangle)^m} \exp\left(-mR^2/\langle R^2\rangle\right), \quad (1)$$

где $m=\langle I\rangle^2/\langle I^2\rangle-\langle I\rangle^2$ – параметр распределения, $I=R^2$ – интенсивность принимаемого сигнала. Распределение Накагами, довольно хорошо описывающее при $1/2 \le m < 1$ глубокие замирания сигнала, до настоящего времени практически не получило достаточно адекватной физической интерпретации.

В работе [2] была предпринята попытка получить функцию распределения, описывающую высокие уровни сигнала, на основе представления неоднородного ионосферного слоя в виде экрана, содержащего крупномасштабные "фокусирующие" неоднородности. Целесообразность такого представления состоит в том, что с его помощью получается ряд результатов, которые могут быть сопоставлены (и, следовательно, проверены) с более строгими результатами дифракционной теории распространения радиоволн в статистической неоднородной среде [3 ÷ 6] .

В настоящей работе, являющейся продолжением [2] , мы, проводя более подробный анализ функций распределения сигнала за статистической линзой, покажем каким образом с помощью этой же модели описать наряду с высокими уровнями сигнала его глубокие замирания.

При получении распределений за статистическими линзами (HER – распределения) в [2] мы исходили из приближенных выражений для интенсивности волны за линзой

$$I(z_k) = I_{0k} e^{-z_k^2 I_{0k}^k} + F(z_k), \qquad (2)$$

где

$$I_{0k} = \frac{1}{\left[(1-\alpha)^2 + D^2\right]^{1/k}}, \quad z_k = \begin{cases} x_0, & k=2 \\ \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, & k=1 \end{cases}$$

x_0, y_0 – координаты точки наблюдения, отсчитываемые от центра линзы и нормированные на характерный масштаб линзы L ($K = 2$ соответствует случаю одномерной, а $K = 1$ – двумерной изотропной линзе), $F(z_k)$ – функция, которая близка к нулю при $z_k < 1$, быстро стремиться к единице при $z_k \gtrsim 1$, $\alpha = z/z_F$ z_F – фокусное расстояние линзы, z – ее высота над плоскостью наблюдения (для случая падения на линзу плоской волны), D – волновой параметр. Для нормального закона распределения α с дисперсией $\langle\alpha^2\rangle = \alpha_0^2$ и равновероятном распределении центра линзы относительно точки наблюдения ($P(x_0) = const$, $P(z_0) \sim z$, $z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ согласно [2]

$$P(I) = \frac{1}{4^{1/k}\sqrt{2\pi}\,\alpha_0 I}\int_I^{D^{-(3-k)}} \frac{dx}{x^{(2+k/2)}\sqrt{1-x^k D^2}}\,\frac{1}{\left(\sqrt{\left|\ln\left(\frac{x}{I}\right)\right|}\right)^{k-1}}\sum_{i=1}^{2} R_i(x,\alpha_0) \qquad (3)$$

$$I^k \leq D^{-2} \quad \text{и} \quad P(I) = 0 \quad \text{при} \quad I^k \geq D^{-2}$$

$$R_i(x,\alpha_0) = \exp\left\{-\frac{\left(x^{k/2} + (-1)^i\sqrt{1-x^k D^2}\right)^2}{2\alpha_0^2 x^k}\right\}$$

При $D \ll 1$ и $I \gtrsim 1$ из (3) следовало, что

$$P(I) = \frac{C_k}{\sqrt{2\pi}\,\alpha_0}\cdot\frac{1}{I^{2+k/2}}\sum_{i=1}^{2}\exp\left\{-\frac{\left(I^{k/2} + (-1)^i\right)^2}{2\alpha_0^2 I^k}\right\}, \quad I \leq D^{-2/k} \qquad (4)$$

и $P(I)=0$, если $I \geq D^{-2/k}$. При этом $\langle I \rangle = 1$, а средний квадрат флуктуаций интенсивности при $S_0^2 = \alpha_0^2 / D^2 \gg 1$

$$\sigma_I^2 = (\langle I^2 \rangle - 1) \sim \begin{cases} \ln S_0^2 , & K = 2 \\ \sqrt{S_0^2} & K = 1 \end{cases} \qquad (5)$$

Выражение (5) для одномерной линзы согласуется с соответствующим асимптотическим выражением для σ_I^2 за хаотическим одномерным экраном (с гауссовой функцией корреляции флуктуаций фазы на экране) при $\sqrt{S_0^2} D \sim 1$ и $S_0^2 \gg 1$ [3 - 6]. Вместе с тем, для двумерного статистического экрана в области статистической фокусировки $\sqrt{S_0^2} D \sim 1$, так же как и для одномерного при $S_0^2 \gg 1$ $\sigma_I^2 \sim \ln S_0^2$ [5, 6] , что, как видно из (5), отличается от случая двумерной изотропной линзы.

Причину такого различия можно понять следующим образом. При получении НЕR распределения (4) за двумерной линзой ($K = 1$) мы считали что интенсивность на оси линзы при $D \to 0$ равна $(1-\alpha)^{-2}$. Это, очевидно, имеет место, если фокусирующие свойства линзы по осям x и y полностью коррелированы. Более общее, чем (2) выражение интенсивности, при x и y меньшем или порядка L , имеет вид

$$I = I_x \cdot I_y = I_{0x} e^{-x^2 I_{0x}^2} \cdot I_{0y} e^{-y^2 I_{0y}^2} , \qquad (2a)$$

где, при $D_x \approx D_y \approx 0$

$$I_{0x} = \frac{1}{|1-\alpha_x|} \quad \text{и} \quad I_{0y} = \frac{1}{|1-\alpha_y|} .$$

Из (2a) можно получить распределение P (1), зависящее от параметров $\langle \alpha_x^2 \rangle$, $\langle \alpha_y^2 \rangle$ и коэффициента корреляции ρ между ними. При этом, как показано в Приложении, если $\rho = 1$ мы получаем распределение (4) с $K = 1$, в то время как для $\rho = 0$. форма распределения $P(I)$ близка к распределению интенсивности за одномерной линзой и в этом случае

$$\sigma_I^2 \sim \ln S_0^2 \qquad \left(\sqrt{S_0^2} \cdot D \approx 1 \;,\; \rho \approx 0\right) \qquad (5a)$$

Таким образом, мы можем допустить, что модель изотропного статистического экрана с гауссовой функцией корреляций фазы на экране [5,6] в области геометрической оптики эквивалентна линзовым неоднородностям с нормальным распределением α (фазы) и с некоррелированными значениями α_x и α_y. Последнее, как легко понять, может иметь место в случае, когда толщина экрана существенно больше характерного масштаба неоднородности (радиуса корреляции) вдоль оси z +).

В практике ионосферного распространения волн КВ диапазона, определяющую роль в формировании фазы сигнала могут играть области, близкие к точке отражения. В этом случае модель "тонкого" фазового экрана, описываемая распределением [4], может оказаться более адекватной. Экспериментальное изучение этого вопроса представляло бы, на наш взгляд, определенный интерес.

Перейдем теперь к вопросу о глубоких замираниях сигнала. В рамках рассматриваемой модели такие замирания должны быть связаны либо с концентрацией интенсивности волны в фокальной плоскости в пятно, расположенное на оси линзы (см. (2)), либо с дефокусирующим действием линзы. Нетрудно убедиться, что эффектом дефокусировки нельзя объяснить достаточно глубокие замирания. Действительно, как видно из (2) малые значения интенсивности волны имеют место в случае больших значений α. Но параметр $\alpha = z \cdot K_0^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \sim \frac{z}{\ell} \frac{1}{K_0} \frac{S}{\ell} \sim \frac{\theta_s}{\theta_H}$, где θ_H и θ_s – соответственно угловые размеры неоднородностей

+) Кстати, именно в этом случае, независимо от закона распределения фазы волны в пределах одной неоднородности, распределение фазы на экране будет описываться (в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей) нормальным законам.

и угол рефракции волны. Таким образом, при $\alpha \gg 1$ вклад в наблюдаемую интенсивность будут вносить поля от разных неоднородностей.

Известно, однако, что в этом случае поле волны в точке приема (как сумма многих некоррелированных полей) будет распределено по нормальному закону, а распределение амплитуды волны - подчиняться рэлеевскому закону ($S_0^2 \gg 1$). Если же допустить негауссову статистику в распределении дефокусирующих неоднородностей по экрану, например, малую появляемость таких линз, то трудно получить в среднем и требуемую большую вероятность появления глубоких замираний.

Естественно, поэтому попытаться получить распределение глубоких замираний при $\alpha_0 \sim 1$, когда основным эффектом является эффект фокусировки излучения. Для этого, очевидно, необходимо, обобщить полученное в [2] HER распределение для флуктуаций сигнала за линзовой неоднородностью на случай малых интенсивностей ($I < 1$). Соответствующий вывод обобщенного SER-HER распределения флуктуаций интенсивности за линзой, оценочно описывающего низкие и высокие уровни сигнала, дается в Приложении. Здесь мы кратко прокомментируем полученные результаты.

Выражение для SER-HER распределения при малых уровнях сигнала за линзовой неоднородностью имеет логарифмическую особенность ($P(I) \sim I^{-1}$ при $I \ll 1$). Эта особенность обусловлена физической идеализацией, использованной при решении задачи. Именно, мы полагали, что неоднородность имеет форму тонкой идеальной линзы (безабберационное приближение). Наличие абберации в реальной ионосферной линзовой неоднородности, естественно, приведет к устранению логарифмической особенности, так что закон распределения низких уровней сигнала за линзой будет иметь при $I \ll 1$ ассимптотику $P(I) \sim I^{-\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$

В Приложении получены приближенные выражения для распределения флуктуаций сигнала за линзой в случае малых значений волнового параметра D $(D \ll 1)$. При фиксированном значении D $(D \sim 1)$ эти распределения практически не изменяются. Используя их можно рассмотреть задачу о SER-HER распределении флуктуаций амплитуды сигнала за N линзами. В предположении равновероятного распределения флуктуаций фаз отдельных лучей (сигналов от отдельных линз) в точке приема, решение поставленной задачи сводится к вычислению следующего интеграла [7]

$$P(R) = R\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} P(z) J_0(zs)\,dz\right)^N s J_0(sR)\,ds. \quad (6)$$

Проводя с помощью ($9\Pi_a$) вычисления (6) легко показать, что уже при сложении в точке приема сигналов от четырех линзовых неоднородностей результирующее распределение будет приближаться к релеевскому ($P(R) \sim R$), а при меньшем числе неоднородностей оно описывает подрэлеевские замирания сигналов.

$$\left(P(R) \sim R^{\alpha_1},\ |\alpha_1| - 1\right).$$

Если же в точке наблюдения происходит сложение интенсивности сигналов от линзовой неоднородности и сигналов, рассеянных на мелкомасштабных неоднородностях ионосферы, с рэлеевским распределением флуктуаций, то, используя известные соотношения теории вероятностей [7] и ($9\Pi_a$), довольно просто можно получить, что в этом случае SER-HER распределение низких уровней сигнала будет подобно распределению Накагами при $m = 1/2$ ($P(R) = \mathrm{const}\,(R)$).

Определенный интерес с точки зрения объяснения подрэлеевских замираний КВ сигналов представляет, кроме того, и так называемый случай вторичной статистики. Он состоит в следующем. Зона формирования отраженного сигнала в ионосфере может вообще говоря, иметь одновременно и линзовую и мелкомасштабную неоднородную структуру. При этом мелкомасштабная структура, в силу своей динамики, будет определять первичные, быстрые флуктуации отраженного сигнала, а линзовая - более медленные флуктуации сигнала. В этих условиях поле сигнала в точке наблюдения можно представить в виде двух слагаемых

$$E = \left(1-e^{-S_H^2/2}\right)E_1 + e^{-S_H^2/2}E_2 ,$$

где E_1, E_2 – составляющие поля, описывающие флуктуации сигнала за счет мелкомасштабной и линзовой структур ионосферы соответственно, S_H^2 – среднеквадратичный набег фазы сигнала в слое с мелкомасштабными неоднородностями. Искомое распределение флуктуаций амплитуды результирующего сигнала будет иметь вид [1]

$$P(R) = \int_0^{\infty} P(R, R_1) P(R_1)\, dR_1 . \qquad (7)$$

Здесь $P(R, R_1)$ – распределение быстрых флуктуаций амплитуды сигнала (при отсутствии флуктуаций линзовой структуры отражающей области). Мы будем полагать его райсовским [1] : $P(R, R_0) = \frac{R}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{R^2+R_0^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{RR_0}{\sigma^2}\right)$; $P(R_1)$ – распределение за линзой (см. (9Π_a)); $R_0 = \exp(-S_H^2/2)R_1 = aR_1$.

В общем виде вычисления по формуле (7) провести не удается. Поэтому мы ограничимся рассмотрением двух предельных случаев: малых и больших возмущений фазы отраженного сигнала за счет мелкомасштабных неоднородностей ионосферного слоя ($S_H^2 \ll 1$ и $S_H^2 \gg 1$). Легко видеть, что в первом случае (при $\frac{a}{\sigma} \ll 1$) $P(R, R_0) \approx \frac{R}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$ и из (7) имеем $P(R) \approx \frac{R}{\sigma^2} e^{-R^2/2\sigma^2}$ (рэлеевское распределение флуктуаций). В другом предельном случае (при $\frac{a}{\sigma} \gg 1$), $P(R, R_1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(R-R_1)^2}{2\sigma^2}\right]$, получаем [8]

$$P(R) = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^{\alpha_1}}\Gamma(1-\alpha_1)\cdot\exp\left(-\frac{R^2}{4\sigma^2}\right)\cdot D_{\alpha_1-1}\left(\frac{R}{\sigma}\right), \qquad (8)$$

где $D_p(X)$ – функция параболического цилиндра. При $R/\sigma \ll 1$ из (8) имеем $P(R) \approx \mathrm{const}\cdot\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)$, т.е. в этом случае статистика низких уровней принимаемого сигнала приближенно описывается $m = 1/2$ – распределением Накагами, являющимся частным случаем SER-HER распределения. В проти-

противоположном случае $R/\sigma \gg 1 \, (\sigma \to 0)$, используя асимптотику $D_p(x)$ [8], получаем $P(R) \sim C_1 / R^{\alpha_1}$ – SER–HEP распределение амплитуды малых уровней сигнала за одиночной линзой.

Таким образом, проведенный анализ модели линзовых неоднородностей ионосферы, а также различных ее модификаций, наглядно иллюстрирует одну из возможных причин, обуславливающих глубокие замирания КВ сигналов – фокусирующее свойство ионосферных неоднородностей.

Другим примером статистики, приводящей к глубоким замираниям сигнала, может служить модель импульсного пуассоновского шума [9]. Рассмотрим основные способы реализации этой модели в практике ионосферного распространения радиоволн.

Пусть прием сигналов осуществляется на достаточно узконаправленную антенну, а ионосфера имеет облачную структуру с резко выраженными рассеивающими областями, которые чередуются с относительно гладкими слаборассеивающими районами. В этом случае, сигнал, принимаемый от рассеивающих областей, будет иметь очень незначительную интенсивность. Согласно [10], принимаемая мощность

$$P_S \approx 1/4K_1^2 + 1 \cdot P_0 ,$$

где $K_1 = h/\ell_\xi$ – отношение характерного размера антенны к среднему масштабу неоднородности поля на выходе ионосферного слоя, P_0 – принимаемая мощность сигнала в отсутствии неоднородностей. При $K_1 > 1$, очевидно, $P_S \ll P_0$. В этих условиях практически значимый сигнал будет наблюдаться лишь при отражении от относительно гладких районов ионосферы и статистика принимаемого сигнала, в конечном счете, будет определяться статистикой этих областей.

Предположим, что вероятность появления "гладкой", отражающей области в диаграмме направленности приемной антенны подчинена закону Пуассона с параметром νT (ν – среднее число областей, проходящих через диаграмму направленности в единицу времени, T – интервал наблюдения); характерное время существования одной такой "гладкой" поверхности в растворе приемной антенны – β^{-1}; времена прихода и фазы сигналов, отраженных от различных неоднородных "гладких" областей ионосферы, имеют равновероятное распределение, а распределение амплитуд этих сигналов подчиняется закону: $p(z)=\frac{z}{\sqrt{\overline{z^2}}}K_0\left(z/\sqrt{\overline{z^2}}\right)$,

где K_0 – функция Макдональда.

Тогда по аналогии с [9], имеем для вероятности амплитуды принимаемого сигнала:

$$p(R)=\frac{2}{(2)^{\nu/2\beta}\,\Gamma(\nu/2\beta)\,R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\nu/2\beta}K_{1-\nu/2\beta}\left(\frac{R}{R_0}\right).$$

Здесь $\Gamma(X)$ – гамма функция; $R_0=\sqrt{\beta/2\nu\cdot\overline{z^2}}$.

Это распределение позволяет описывать и глубокие замирания сигналов+). Действительно, в случае $\nu/\beta=1$ (практически дискретная последовательность отраженных сигналов), используя известное представление для функции $K_{1/2}(X)$ [8], имеем соотношение

$$p(R)\simeq\sqrt{2/\overline{z^2}}\,\exp\left(-\sqrt{2}\,R/\sqrt{\overline{z^2}}\right),$$

которое с точностью до множителя порядка единицы совпадает с распределением Накагами для $m=\frac{1}{2}$ при низких уровнях сигнала.

Следует заметить, что существенной деталью в рассмотренном примере является ограниченность рассеивающих областей. Именно, использование статистики сигналов, отраженных от ограниченных "гладких" районов ионосферы, в форме модели пуассоновских шумов и позволяет достаточно корректно объяснить глубокие замирания КВ сигналов. Вместе с тем, совершенно очевидно, что ограниченность рассеивающих областей ионосферы, может быть обусловлена не направленными свойствами антенн, а являться следствием естественных геофизических условий. Так, например, на высоких широтах области возмущений неоднородной структуры

+) Утверждение автора [9] о справедливости рэлеевского распределения для низких уровней излучения в модели пуассоновского шума ошибочно.

ионосферы, вызываемых корпускулярными потоками, могут носить резко выраженный локальный характер. Кроме того, в самих этих областях условия возмущенности ионосферы могут меняться в широких пределах (от сильных до весьма малых возмущений). Если эти случайные изменения (появляемость относительно гладких областей) соответствуют распределению Пуассона, то статистика КВ сигналов, отраженных от таких областей ионосферы, будет характеризоваться рассмотренной выше моделью пуассоновских шумов, описывающей в данном случае глубокие замирания этих сигналов.

К модели пуассоновских шумов может, вообще говоря, сводится и случай рассеяния (отражение) КВ сигнала от отдельных, изолированных неоднородностей, электронной концентрации при работе станции наклонного зондирования ионосферы на частотах выше максимально применимой частоты. При этом так же будут наблюдаться глубокие, подрэлеевские замирания принимаемого сигнала.

Заканчивая рассмотрение вопроса о глубоких замираниях сигналов при ионосферном распространении радиоволн КВ диапазона отметим, что объяснение глубоких замираний может быть основано только на предположении о негауссовой статистике поля принимаемого сигнала (см. [2]).

Авторы признательны В.О.Рапопорту за дискуссию и Н.М.Грошевой за ряд численных расчетов, проведенных на ЭВМ.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

ВЫВОД ОБОБЩЕННОГО SER–HER РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЗОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть $I = I_x \cdot I_y$, где I_x и I_y являются функциями интенсивности на оси линзы I_{0x} и I_{0y} к координат x_0 , y_0 центра линзы относительно точки наблюдения (см.(2)). В соответствии с известным соотношением [7] для плотности вероятности произведения двух случайных величин имеем

$$P(I) = \int_0^\infty P_2\left(I_x, \frac{I}{I_x}\right)\frac{dI_x}{I_x} . \qquad (1\ П)$$

Входящая в (1 П) плотность вероятности $P_2(I_x, I_y)$ равна

$$P_2(I_x,I_y) = \int_{I_x}^\infty dI_{x0}\int_{I_y}^\infty \frac{dI_{y0}}{J_1}\cdot P_{r_0}\left(x_0(I_{0x},I_x), y_0(I_{0y},I_y)\right)\cdot P_{I_0}(I_{0x},I_{0y}) . \qquad (2\ П)$$

Здесь $J_1 = \left|\partial(I_x,I_y,I_{0x},I_{0y})/\partial(I_{0x},I_{0y},x_0,y_0)\right|$ якобиан преобразования, осуществляемый по (2), $J_1 = 4I_{0x}I_{0y}I_xI_y\sqrt{\left|\ln\left(\frac{I_x}{I_{0x}}\right)\right|\left|\ln\left(\frac{I_y}{I_{0y}}\right)\right|}$, $P_{I_0}(I_{0x},I_{0y})$ – двумерная плотность вероятности величин x_0 , y_0 (в нашем случае $P_{r_0}(x_0,y_0) = const$), $P_{I_0}(I_{0x},I_{0y}) = J_2^{-1}P_\alpha(\alpha_x(I_{0x}),\alpha_y(I_{0y}))$ и, согласно (2), $J_2 = \left|\partial(I_{0x},I_{0y})/\partial(\alpha_x,\alpha_y)\right| = I_{0x}^2 I_{0y}^2$. В (2 П) нижние пределы интегрирования взяты равными I_x и I_y , так как (см.(2)) $x_0 \sim I_{0x}^{-1}\sqrt{\ln(I_{0x}/I_x)}$, $y_0 = I_{0y}^{-1}\sqrt{\ln(I_{0y}/I_y)}$ и при $I_{0x} < I_x$ и $I_{0y} < I_y$ координаты x_0 и y_0 становятся мнимыми.

Для нормального закона распределения величин α_x, α_y

$$P_\alpha(\alpha_x(I_{ox}),\alpha_y(I_{oy}))=\frac{1}{2\pi\alpha_o^2\sqrt{1-\rho^2}\,\beta}\sum_{i=1}^{2}\exp\left[-\frac{(\eta_{xi}^2+\eta_{yi}^2-2\rho\eta_{xi}\eta_{yi})}{2\alpha_o^2(1-\rho^2)}\right] \tag{3П}$$

$$\eta_{xi}=(1+(-1)^i I_{ox}^{-1})\quad \eta_{yi}=(1+(-1)^i I_{oy}^{-1})/\beta$$

$(D_x-D_y\simeq 0)$, $\rho\approx\frac{\langle\alpha_x\alpha_y\rangle}{\alpha_o^2\,\beta}$, $\alpha_o^2=\langle\alpha_x^2\rangle$, $\beta^2=\frac{\langle\alpha_y^2\rangle}{\langle\alpha_x^2\rangle}\leq 1$ – характеризует степень анизотропии неоднородностей. Выражения (1П) – (3П) и дают решение поставленной задачи. Рассмотрим наиболее интересные частные случаи.

а) Одномерная линза ($\beta=0$, $\rho=0$). Согласно (3П) при стремлении β к нулю

$$P_\alpha\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha_o}\sum_{i=1}^{2}\exp\left\{-\frac{(\eta_{xi}^2-2\eta_{xi}\eta_{yi}}{2\alpha_o^2}\right\}\delta(\eta_{yi})\,. \tag{3Па}$$

После подстановки (2П) и (3Па) в (1П) и интегрирования по $\eta'=I_{oy}^{-1}$ получаем

$$P(I)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\alpha_o I}\int_0^\infty\frac{dx}{x}\int_x^\infty d\xi\,\frac{\sum_{i=1}^{2}\exp\left\{-\frac{(1+(-1)^i/\xi)^2}{2\alpha_o^2}\right\}}{\xi^3\sqrt{\left|\ln\left(\frac{x}{\xi}\right)\right|\left|\ln\left(\frac{I}{x}\right)\right|}}F_i\left(\frac{I}{x}\right) \tag{4П}$$

$$F_i\left(\frac{I}{x}\right)=\begin{cases}1 & x>I\\ 0 & x\leq I\end{cases}$$

и после замены $\frac{I}{x}=z$ и $\frac{x}{\xi}=y$ имеем

$$F(I)=\sum_{i=1}^{2}\frac{C_2}{2\sqrt{2\pi}\,\alpha_o I^3}\int_0^1\frac{z\,dz}{\sqrt{|\ln z|}}\int_0^1\frac{\exp\left\{-\frac{(I+(-1)^i z y)^2}{2\alpha_o^2 I^2}\right\}}{\sqrt{|\ln y|}}\,y\,dy \tag{5П}$$

При $I \gtrsim 1$ приближенное вычисление интеграла (5П) приводит к выражению (4) при $K=2$, то есть в этом случае (1) совпадает с HER, распределением для одномерной линзы [2]. При $I \ll 1$, учитывая, что

$$\lim_{I\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,I}\exp\left[-\frac{(I+(-1)^2 z y)^2}{2\alpha_0^2 I^2}\right]\approx\delta\left(\frac{[I+(-1)^i z y]}{\alpha_0}\right)$$

из (5П) легко получить

$$P(I)\approx\frac{C_2}{2I}\sim I^{-1}\,. \qquad (5Па)$$

б) Двумерная некоррелированная линза ($\beta\neq 0$, $\rho=C$)
При этих условиях легко получить следующее выражение для $P(I)$

$$P(I)=\sum_{i=1}^{2}\frac{C_1}{4\sqrt{2\pi}\,\beta\cdot\alpha_0}\,\frac{1}{I^3}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\int_0^1\frac{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\alpha_0^2 x^2}\right]}{\sqrt{|\ln\xi|}}\,\xi\,d\xi\int_0^1\frac{\eta\,d\eta\,\exp\left\{-\frac{(I-x\eta)^2}{2\alpha_0^2\cdot I^2\beta^2}\right\}}{\sqrt{|\ln\eta|}} \qquad (6П)$$

Из (6П), аналогично (5П) можно показать, что при $\beta\sim 1$

$$P(I)\sim\begin{cases}\dfrac{1}{I^3} & \text{при } I\gtrsim 1\\[2mm] \dfrac{1}{I} & \text{при } I\ll 1\end{cases}$$

в) Двумерная коррелированная линза ($\rho=1$, $\beta\neq 0$).
Из (3П) следует, что при $\rho\to 1$

$$P_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha_0}\sum_{i=1}^{2}\delta(\eta_{x_i}-\eta_{y_i})\exp\left[-\frac{\eta_{x_i}\eta_{y_i}}{2\alpha_0^2}\right] \qquad (3Па)$$

Рассмотрим сначала случай изотропной линзы ($\beta=1$)

После интегрирования по η получаем

$$P(I)=\sum_{i=1}^{2}\frac{C_1}{4\sqrt{2\pi}\alpha_0\beta}\int_0^\infty\frac{dx}{x}\int_x^\infty\frac{\exp\left\{-\frac{\left(1+(-1)^i\frac{1}{\xi}\right)^2}{2\alpha_0^2}\right\}F_{i2}(\xi)}{\xi^4\sqrt{\left|\ln\left(\frac{x}{\xi}\right)\right|\left|\ln\left(\frac{I}{x\xi}\right)\right|}} \qquad (7П)$$

$$F_{i2}(\xi)=\begin{cases}1 & \xi\geq I/x\\ 0 & \xi< I/x\end{cases}$$

Таким образом в (7П) $I/\xi\leq x\leq\xi$, а $\xi_{min}=\sqrt{I}$. Это позволяет, поменяв в (7П) порядок интегрирования по x и ξ установить пределы интегрирования по x от I/ξ до ξ , а в интеграле по ξ от $\sqrt{I}$ до ∞ . В результате, после замены переменной $z=\xi/I$ приходим к выражению

$$P(I)=\sum_{i=1}^{2}\frac{C_1}{4\sqrt{2\pi}\,\alpha_0\,\beta I^{5/2}}\int_0^1 z^2dz\exp\left\{-\frac{(\sqrt{I}+(-1)^i z)^2}{2\alpha_0^2 I}\right\}. \qquad (8П)$$

Если $I>>1$, то вынося экспоненциальный множитель за знак интеграла при $z=1$ приходим к выражению для HER – распределения за двумерной линзой [2] (см. (4) при $K=1$). Выражение для $P(I)$ при $I<<1$ получим, сделав в (8П) замену $z\sqrt{I}=y$. Тогда, учитывая, что

$$\lim_{I\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,I\alpha_0}\exp\left[-\frac{(I+(-1)^i y)^2}{2\alpha_0^2 I^2}\right]=\delta(I+(-1)^i y)$$ получаем

$$P(I)\simeq\frac{C_1}{4I}\sim I^{-1}. \qquad (9Па)$$

При $\beta\neq 1$ вместо (8П) можно придти к следующему выражению

$$P(I)=\sum_{i=1}^{2}\frac{C_1}{4\sqrt{2\pi}\alpha_0\beta}\,\frac{1}{Ia^2}\int_0^1\left([1-\beta]+\frac{\beta z}{a}\right)z\exp\left\{-\frac{(a+(-1)^i z)^2}{2\alpha_0^2 a^2}\right\}dz, \qquad (8Па)$$

где $a = \frac{1}{2}\left[I(1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 I^2 + 4I\beta} \right].$

При $a \gg 1$ (аналогично преобразованиям в (8П) при $\sqrt{I} \gg 1$) имеем

$$P(I) \simeq \sum_{i=1}^{2} \frac{C_1}{4\sqrt{2\pi}\,\alpha_0 \beta} \frac{1}{I a^2} \left\{ (1-\beta) + \frac{\beta}{2a} \right\} \exp\left[- \frac{(a+(-1)^i)^2}{2\alpha_0^2 a^2} \right]. \quad (8П)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M.Nakagami, Statist Methods in Radio Wave Propagation, 3, Perg.Press, 1960.

2. Ю.В.Митихин, Р.А.Перцовский, Электросвязь, № 9, 27, 1972.
   В.А.Алимов, Л.М.Ерухимов, Изв.ВУЗов - Радиофизика, 16, № 10, 1540, 1973.

3. Я.И.Альбер, Л.М.Ерухимов, В.А.Рыжов, В.П.Урядов, Изв.ВУЗов - Радиофизика, 11, № 9, 1371, 1968.

4. В.В.Тамойкин, А.А.Фрайман, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 14, № 9, 1427, 1971.

5. В.И.Шишов, Известия ВУЗов, Радиофизика, 1971.

6. R.Buckley, Australian J.of Phys., 24, n.3, 351, 1971.

7. Б.Р.Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. "Сов.радио", 1957.

8. С.Е.Рыжик, И.М.Градштейн, Таблицы интегралов сумм, рядов, изд. Физматгиз, 1960.

9. И.С.Всехсвятская, Изв. ВУЗов, - Радиофизика, 11, № 10, 1490, 1968.

10. В.А.Алимов, Л.М.Ерухимов, Изв. ВУЗов - Радиофизика, 10, № 5, 620, 1967.