

Министерство высшего и среднего специального образования  
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

Преприят № 51

Л.А.Островский, М.И.Рабинович

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

г. Горький,  
1974

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ<sup>+</sup>)

Сейчас уже можно с уверенностью говорить о формировании теории нелинейных волн, позволяющий с единых позиций подойти к исследованию весьма разнообразных физических явлений. Успехи этой теории существенно связаны с увеличением числа тех областей физики (оптика, акустика, физика плазмы, радиофизика и т.д.), где имеется потребность в изучении нелинейных волновых процессов, а также с ростом возможностей их экспериментального исследования и практического использования. В этой вводной лекции мы кратко обсудим некоторые общие свойства одномерных нелинейных волн и проиллюстрируем их на экспериментальных фотографиях (так что с известным основанием эту лекцию можно назвать "нелинейные волны в картинках"). Фотографии относятся в основном к электромагнитным волнам в так называемых искусственных линиях задержки, т.е. цепочках идентичных звеньев (четырехполосников), каждое из которых состоит из определенным образом соединенных емкостей, индуктивностей и сопротивлений (возможно, и отрицательных). Меняя эти элементы и способ их соединения, можно, как в детском конструкторе, получить большое число вариантов, реализующих (по крайней мере в одномерном случае) едва ли не любой из основных классов нелинейных волн.

Качественные особенности волнового процесса зависят от соотношения между параметрами волны (амплитуды-

<sup>+</sup>) Краткое изложение лекций прочитанных на Республиканской школе по нелинейным колебаниям и волнам (Горьковская обл., март 1972 г.) и на 3-й Всесоюзной школе-семинаре по дифракции и распространению волн (Ленинград, Петродворец, май-июнь 1972 г.).

дой, частотой и т.д.) и "внутренними" параметрами, характеризующими свойства среды (нелинейность, дисперсия и т.д.). Исходя из этого соотношения (подробнее см. теоретические лекции) выделим некоторые характерные классы нелинейных волн.

Среды со слабой дисперсией. Фото 1 показывает эволюцию достаточно длинной электромагнитной волны в линии передачи с ферритом. Этот процесс (хорошо известный для волн в сжимаемом газе, на воде и т.д.) отвечает так называемой простой или римановой волне и характерен для недиспергирующей среды. Вершина волны движется быстрее ее основания, так что волна непрерывно искажается, и в некоторый момент происходит ее "опрокидывание" — профиль должен стать неоднозначным.

В этом хорошо известном процессе уже можно усмотреть парадокс, связанный с непригодностью нашей "линейной" интуиции": даже при малой нелинейности (в смысле малости нелинейных членов в соответствующих уравнениях) и в достаточно гладком исходном возмущении с течением времени появляются участки с резким (в идеале — бесконечно резким) изменением профиля. В математике это явление получило даже название "градиентной катастрофы". Аналогию следует искать скорее в нелинейной теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Так, малая нелинейность осциллятора не изменяет существенно формы собственных колебаний (синусоида с частотой  $\omega$ ), однако при наличии связи с другим осциллятором, настроенным на частоту  $2\omega$ , она приводит к резонансному нелинейному эффекту — накапливающейся перекачке энергии из первой гармоники во вторую, так что суммарный процесс, по прошествии достаточного времени, станет существенно несинусоидальным (двухчастотным); эта несинусоидальность будет выражена еще сильнее, если есть резонанс и на частоте  $3\omega$  и т.д.

В нашем случае также происходит резонансная перекачка энергии из основной гармоники в высшие, однако, кроме временного резонанса (наличие волн на частотах

$2\omega$ ,  $3\omega$  и т.д.), необходим и пространственный — эти волны должны иметь волновые числа  $2k$ ,  $3k$  ....., если  $k$  — волновое число исходной волны. Это означает, что должны быть равны фазовые скорости волн  $v = \omega/k$  — имеется синхронизм на всех гармониках. Поэтому — то подобные процессы и характерны для недиспергирующей среды, в которой скорость волны не зависит от частоты, и возможно в принципе бесконечное число резонансов.

Далее возникает важный вопрос: что же будет после "опрокидывания" простой волны? Ответ не так прост. Поскольку в волне появляются резкие градиенты, то вступают в силу дополнительные факторы (дисперсия, потери), которые сглаживают профиль и результат зависит от характера и соотношения этих факторов. Существует три основных возможности: а) на крутых участках включается диссипация (вязкость) приводящая к установлению стабильного перепада (в идеале разрыва) — ударной волны. Ударные волны детально изучены в газодинамике; на фото 2 показана электромагнитная ударная волна. б) Влияние реактивной дисперсии (т.е. зависимости фазовой скорости гармоник от частоты), приводит к возникновению осцилляций, порождаемых крутым участком — см. фото 3, где ударная волна состоит из крутого фронта и затухающего пуга осцилляций за ним. В зависимости от дисперсионных свойств системы осцилляции могут быть не только сзади, но и впереди перепада, или по обе его стороны (см. фото 4, относящееся к системе с пространственной дисперсией). в) Упомянем еще третью возможность: неоднозначность, связанная с "опрокидыванием" римановой волны сохраняет смысл (например, при обгоне частиц в потоке невзаимодействующих частиц, модулированном по скорости — пролетном клистроне). При этом резкие изменения величин часто приводят к некоторой хаотизации процесса (перемешивание, образование коротковолнового спектра со случайными фазами). Такой процесс может, в частности, привести к установлению перепада ударного типа, стабильность которого поддерживается диссипацией энергии в "хаотичес-

ких" степенях свободы. Это возможно для бора на воде, бесстолкновительных ударных волн в плазме и т.д.

Напомним, что для рассмотренных процессов важна не столько малость дисперсии сама по себе, сколько малость отношения  $d/\nu l = \text{дисперсия/нелинейность}$ , и что это условие зависит не только от "внутренних" свойств среды, но и от параметров самой волны, которые, конечно, изменяются в процессе распространения. Так, в римановой волне дисперсией и диссипацией можно пренебречь, однако вблизи точки опрокидывания они существенны. Приведем еще один наглядный пример — автоколебания в кольцевом резонаторе с туннельными диодами (фото 5). Такая система — многомодовая, причем установившиеся колебания на нижних модах пилообразны (дисперсия мала), а на высоких — практически синусоидальны (ввиду сильной дисперсии на высокой частоте параметр  $d/\nu l$  уже велик).

"Равновесие" между дисперсией и нелинейностью. Стационарные волны. Мы уже видели на примере ударных волн, что совместное действие нелинейности и потерь ("диссипативной дисперсии") приводит к формированию стационарной волны, сохраняющей свою форму при распространении. Реактивная же дисперсия, как отмечалось, ведет к появлению осцилляций в волне. При очень малых потерях осцилляции занимают всю волну (или ее период) и тогда говорить об ударной волне бессмысленно; при этом дисперсия уже "не мала" нигде. Однако даже при полном отсутствии потерь существуют процессы в виде стационарных бегущих волн, хотя и совсем другого характера, чем ударные волны. Для системы без потерь (консервативной) характерны периодические стационарные волны, соответствующие, в известном смысле, периодическим колебаниям консервативной системы. В линейной диспергирующей среде стационарными являются синусоидальные волны произвольной амплитуды. В нелинейной среде амплитуда и скорость стационарных (несинусоидальных) волн связаны между собой. Особый интерес представляют "предельные" волны с бесконечным периодом (аналогичные движению по

сепаратрисе в колебательной системе). Такими волнами являются в частности, уединенные импульсы (солитоны) см. фото 6.

Особая роль стационарных волн связана не только с простотой нахождения соответствующих решений (эта задача сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений), но и с тем, что волны, близкие к стационарным, возникают в результате эволюции более или менее широкого класса нестационарных возмущений; в определенном смысле это относится и к консервативной системе. На фото 7 показан процесс распада ограниченного электромагнитного возмущения на несколько импульсов, которые, как показывают измерения, весьма близки по своим параметрам к солитонам и остаются таковыми даже при наличии затухания, если оно достаточно мало: с течением времени солитоны расходятся. Вообще солитоны представляют собой весьма "самостоятельные" образования, обладающие определенной устойчивостью. Так можно говорить о взаимодействии двух солитонов, когда один из них (большой) догоняет другой. Из фото 8 видна интересная особенность этого процесса: при сильно отличающихся амплитудах происходит обгон (фото 8а), а при меньшем отличии амплитуды выравниваются до их совпадения и затем передний импульс уходит вперед, отрываясь от заднего (обменное взаимодействие фото 8б). Это явление было предсказано Лэксом. Интересно, что, несмотря на нелинейность процесса, в идеальной среде, солитоны, разошедшись, возвращаются к исходным параметрам, т.е. взаимодействие не оставляет следа.

Несколько иначе происходит эволюция периодической (синусоидальной) волны (фото 9). Можно видеть, что каждая полуволна снова дробится на солитоны, которые существуют определенное время, но затем процесс возвращается к исходному (синусоиде) и периодически повторяется. На фото 10 показано изменение формы нелинейной капиллярной волны на поверхности воды, для которой, однако, солитоны невозможны,

"Солитоноподобные" колебания могут возникать и при возбуждении ограниченной системы – нелинейного резонатора гармоническим полем (фото 11). Кроме многоимпульсных процессов, отвечающих распаду на солитоны, возможно возбуждение лишь одного импульса на каждом (или даже не на каждом) полупериоде возбуждающего поля. Такой процесс может рассматриваться как резонансное параметрическое взаимодействие импульса с гармонической "накачкой" (см. ниже).

Отметим, что поведение солитонов довольно много изучалось в численных экспериментах различного рода.

Гораздо меньше исследовались другие стационарные (периодические) процессы в реактивной нелинейной среде. Правда, некоторые из волн на воде обнаруживают свойства "кноидальных" волн (т.е. стационарных решений известного уравнения Кортевега–де Вриза); при движении к берегу они трансформируются в ряд "солитоноподобных" возвышеий.

Другой характер имеют бегущие стационарные волны в активных средах, как это уже демонстрировалось на фото 5. Заметим, что при определенных условиях такие волны также могут иметь "солитоноподобную" форму, хотя это сходство скорее внешнее, и зависимость свойств таких волн от параметров системы существенно иная.

#### Среды с сильной дисперсией, Волны огибающих.

В другом случае – когда дисперсия преобладает над нелинейностью, синусоидальная волна не претерпевает существенных искажений, поскольку высшие гармоники не синхронны с основной волной и остаются малыми. Однако и здесь возможны накапливающиеся нелинейные эффекты, если исходная волна модулирована, т.е. содержит конечный (хотя и узкий в сравнении с несущей частотой) спектр. Взаимодействие компонент этого спектра и рождение новых приводит к искажению формы огибающих волны – амплитуды и частоты – во времени и пространстве. Это искажение может носить весьма различный характер, в зависимости от знаков параметров нелинейности и диспер-

сия. В одном из возможных случаев огибающие ведут себя во многом аналогично мгновенным значениям поля в среде без дисперсии: уравнения для огибающих гиперболически и огибающая искажается как простая волна (фото 12) вплоть до образования резкого "скачка", который естественно назвать ударной волной огибающих.

В другом случае уравнения огибающих эллиптически: этому случаю соответствует неустойчивость монохроматической волны относительно модулирующих возмущений (само модуляция): на спектральном языке это означает неустойчивость интенсивной волны несущей частоты относительно малых возмущений на боковых частотах. Подобные эффекты наблюдались и для волн на поверхности воды, и для электромагнитных волн в нелинейных линиях. Фото 13 показывает нарастание глубины модуляции в бегущей волне. Волна же с достаточно глубокой и медленной модуляцией приобретает более быструю модуляцию, и в результате возможен распад волны на относительно мелкие группы (фото 14).

В обоих указанных выше случаях при учете дисперсионного расплывания ("временной дифракции") существуют стационарные волны огибающих, в которых амплитуда и частота волны распространяется без деформации. Здесь можно усмотреть некоторое соответствие между этими процессами и стационарными волнами мгновенных значений поля, о которых было сказано выше. Есть классы периодических волн огибающих, а также особое решение — солитон огибающих в виде пакета с конечной энергией. В среде с инерционной нелинейностью возможны стационарные ударные волны огибающих в виде перепадов между постоянными значениями, эти перепады могут содержать осцилляции. Целесообразно отметить, что в такой среде стирается грань между указанными выше случаями устойчивости и неустойчивости гармонических волн: неустойчивость возможна и в "гиперболическом случае": этот эффект наблюдался для электромагнитных волн в резонаторе.



Экспериментально исследовались также соответствующие "модуляционные эффекты в системах со смешанной активно-реактивной нелинейностью, где стационарные волны огибающих могут быть в числе "предельных" изолированных движений, а также в среде только с активной нелинейностью, где однако, причины автомодуляции другие (фото 15).

Взаимодействие волн. Как уже говорилось, один и тот же волновой процесс (например, простая волна зачастую может рассматриваться и как одна нестационарная волна, и как набор взаимодействующих "почти стационарных" (в простейшем случае квазигармонических) волн. При этом основную роль играет взаимодействие тех резонансных компонент, для которых волны комбинационных частот находятся в синхронизме с нормальными волнами системы. Реальные дисперсионные характеристики системы часто таковы, что эти условия выполнены лишь для небольшого числа волн.

В прозрачных средах, ввиду сохранения полных энергии и импульса взаимодействующих волн, процесс энергообмена между ними в общем случае имеет периодический характер. Отметим, например, задачу о взаимодействии двух синхронных волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , весьма важную, в частности, для нелинейной оптики. Ее решение в общем случае приводит к выводу о периодической перекатке энергии между этими волнами (фото 16), тогда как суммарный поток энергии, естественно сохраняется. Заметим, что на том этапе, где преобладает поле удвоенной частоты, можно говорить о параметрическом усилении основной компоненты. В обратном случае происходит резонансное удвоение частоты. Отметим, что если в некоторой точке  $\omega = 0$  поле второй гармоники равно нулю, то периодический процесс отсутствует, и при  $\omega = 0$  в идеальной среде вся энергия основной компоненты переходит в энергию гармоник.

Укажем еще случай "равновесия", когда граничные или начальные условия таковы, что взаимное перераспре-

деление энергии между волнами не изменяет их амплитуд. Такое состояние аналогично ненулевому состоянию нелинейной консервативной системы с конечным числом степеней свободы.

Значительный интерес представляют также те случаи, когда условия синхронизма выполняются для большого числа частот, как это имеет место в средах со слабой дисперсией. Если взаимодействующие волны — это гармоники некоторой основной волны, а между их амплитудами и фазами существует фиксированная связь (равновесное состояние), то результирующее поле можно рассматривать как одну нелинейную стационарную волну. В общем же случае происходит взаимная трансформация гармоник, как в обсуждавшихся выше простых волнах.

Кроме регулярных процессов типа простой волны, возможны ситуации, когда фазы взаимодействующих волн, по существу, не являются жестко связанными; точнее эта связь резко меняется, например, при небольших изменениях начальных условий. В результате процесс становится стохастическим. Возможна и обратная ситуация, когда нелинейность вносит корреляцию между фазами различных компонент. Так, в сущности, обстоит дело при "синхронизации мод" в распределенных генераторах (например, лазерах). Другой процесс такого рода показан на фото 17, где фазы компонент спектра шумового сигнала, взаимодействуя с гармонической накачкой частоты  $\omega_H$ , связываются для каждой пары частот, сумма которых равна  $\omega_H$ . Результат этой связи наглядно проявляется после подачи получившегося (по-прежнему шумового) сигнала в нелинейную систему — все они дают когерентным образом узкую линию на частоте  $\omega_H$ .

Разумеется, взаимодействующие волны не обязательно должны быть синусоидальными. Отметим взаимодействие одиночного импульса (солитона) с гармонической бегущей волной (накачкой). В случае синхронизма солитон нарастает за счет "параметрической" передачи энергии от накачки, вплоть до установления стационарного режима

из-за рассинхронизма, вызванного зависимостью скорости солитона от его амплитуды. При этом возможно, что солитоны возбуждаются не на каждом периоде накачки, что приводит к генерации сложных импульсных последовательностей. Как уже отмечалось такая параметрическая генерация импульсов наблюдалась экспериментально в резонаторах (фото 18).

Заметим, что в этом случае также может наблюдаться стохастизация процесса – фазы солитонов становятся случайными.

В активных системах, где энергия не сохраняется, появляются существенно новые эффекты. Наиболее нетривиальным моментом здесь является возможность одновременного нарастания амплитуд всех резонансно связанных волн при одновременной синхронизации их фаз. Этот рост наблюдается экспериментально несмотря на сильную линейную диссипацию волн, которая приводит к быстрому их затуханию, если нарушить условие синхронизма. При большом числе взаимодействующих гармоник такой процесс, ввиду синхронизации фаз, приводит к генерации импульсов. При квадратичной нелинейности форма этих импульсов близка к солитонам (фото 19).

Разумеется, приведенные выше краткое описание ряда эффектов, связанных с нелинейными волнами, недостаточно для их глубокого понимания. Однако, такая лекция на иллюстративном уровне, на наш взгляд, может оказаться полезной для последующего изучения соответствующих вопросов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Стюкер, Волны на воде, М.И.Л., 1959.
2. А.М.Белянцев; А.В.Гапонов, Э.Я.Дауме, Г.И.Фрейдман, ЖЭТФ, 47, 1699 (1964).
3. А.М.Белянцев, Ю.К.Богатырев, Л.И.Соловьева, Изв. ВУЗов Радиофизика, 6, 561 (1963).
4. А.В.Гапонов, Л.А.Островский, Г.И.Фрейдман, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 10, 1376 (1967).
5. Ю.К.Богатырев, М.И.Рабинович, Изв.ВУЗов, Радиофизика 10, 128 (1967).
6. Л.А.Островский, В.В.Папко, Е.Н.Пелиновский, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 15, 580 (1972).
7. H. Hirota, K. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan, 28, 5, 1366 (1970).
8. Л.К.Зарембо, В.А.Красильников, Тхай Тхань Лонг, ДАН СССР, 192, 548 (1970).
9. К.А.Горшков, Л.А.Островский, В.В.Папко, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 16 № 8, (1973).
10. L.A.Ostrovskii, Alta Frequenza, 38, n.Speciale, 4-4, 207 (1969).
11. Л.А.Островский, Л.В.Соусгов, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 15, 242 (1972).
12. Ю.К.Богатырев, С.В.Кияшко, М.И.Рабинович, Изв. ВУЗов, Радиофизика, (в печати).
13. А.С.Горшков, В.Ф.Марченко, И.Т.Трофименко, Тезисы доклада на Ломоносовских чтениях, МГУ, 1970 г.
14. А.И.Весницкий, Л.А.Островский, В.В.Папко, В.Н.Шабанов, Письма ЖЭТФ, 9, 274, 1969.

## ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Фото 1. Простая электромагнитная волна в линии передачи с ферритом [2, 4] .

Фото 2. Ударная электромагнитная волна в линии с ферритом. Период калибрационной синусоиды равен  $2 \cdot 10^{-9}$  сек [3, 4] .

Фото 3. Ударная электромагнитная волна с осцилляциями за фронтом [3] .

Фото 4. Ударная электромагнитная волна с осцилляциями по обе стороны перепада [2, 4] .

Фото 5. Волны, генерируемые в кольцевом резонаторе с туннельными диодами [5]  $n$  - номер моды.

Фото 6. Уединенный электромагнитный импульс в линии с нелинейными емкостями.

Фото 7. Распад импульсов различной длительности на солитоны (цифры показывают безразмерное расстояние) [6] .

Фото 8. Взаимодействие двух солитонов с разным соотношением амплитуд и трех солитонов [5] .

Фото 9. Эволюция периодической волны в нелинейной линии [7] .

Фото 10. Капиллярные волны на поверхности воды [8] .

Фото 11. "Солитоноподобные" колебания нелинейного резонатора [9] .

Фото 12. Образование волн огибающих [10] ( $n$  - расстояние безразмерное).

Фото 13. Усиление модуляции в бегущей волне [11] .

Фото 14. Разбиение модулированной волны на более мелкие пакеты [11] .

Фото 15. Волны огибающих в среде с активной нелинейностью [12] .

Фото 16. Пространственное распределение амплитуд волны с  $\omega(a_1)$  и  $2\omega(a_2)$  [13] .

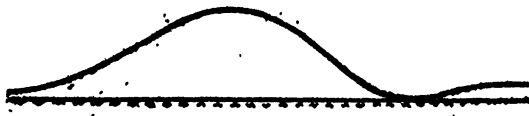
Фото 17. Взаимодействие гармонической накачки ( $f = 4$  мГц) с шумовым сигналом [13] а) вход, б) выход параметри-

ческой линии; в нелинейной линии шум "б" превращается в узкую линию  $f = 4$  мГц.

Фото 18. Генерация различных последовательностей импульсов в нелинейном резонаторе [14] .

Фото 19. Форма и спектр импульсов, генерируемых в активном резонаторе [15] .

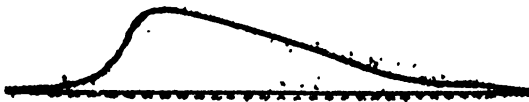
$$x=0$$



$$x=x_1 > 0$$



$$x=x_2 > x_1$$



Ромо 1



Фото 2.

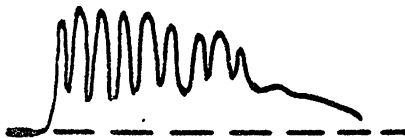


Фото 3.

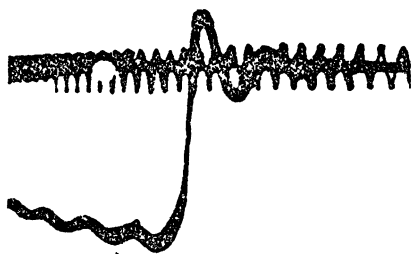


Фото 4.





*Фигура 5*



*Фигура 6*

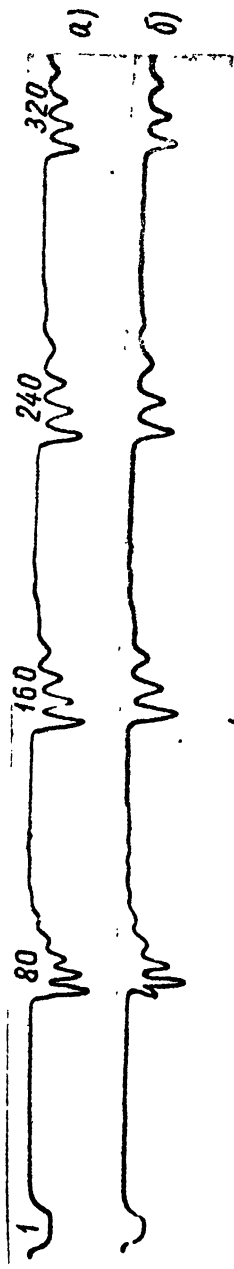


фото 7

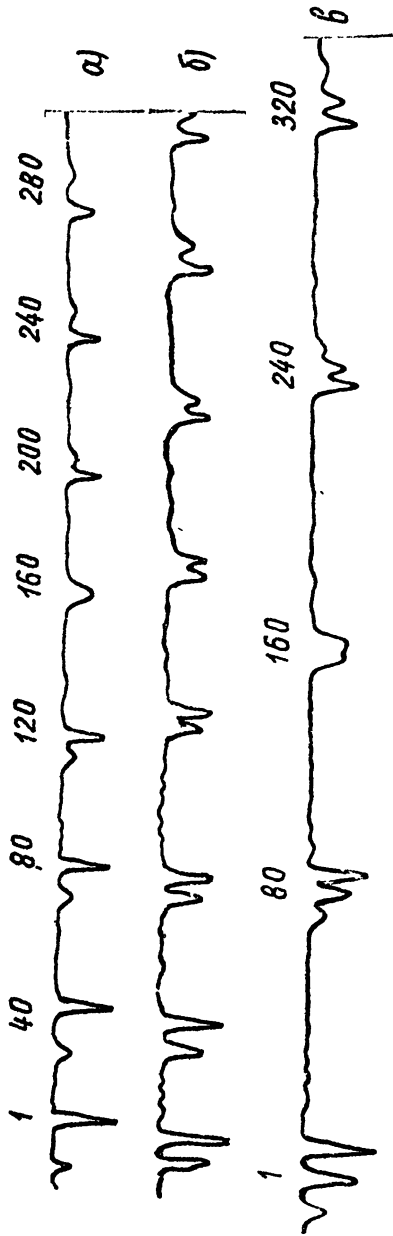


фото 8

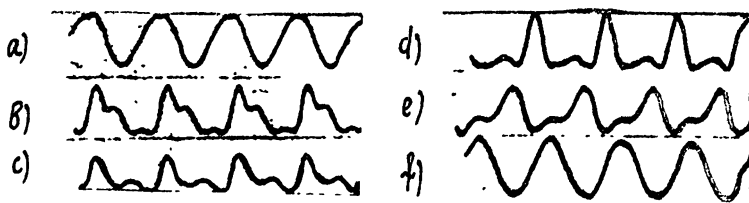


Фото 9

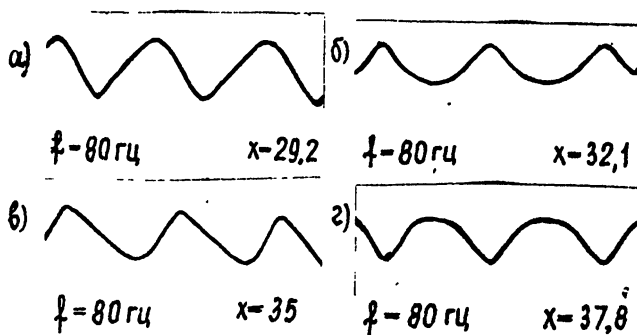
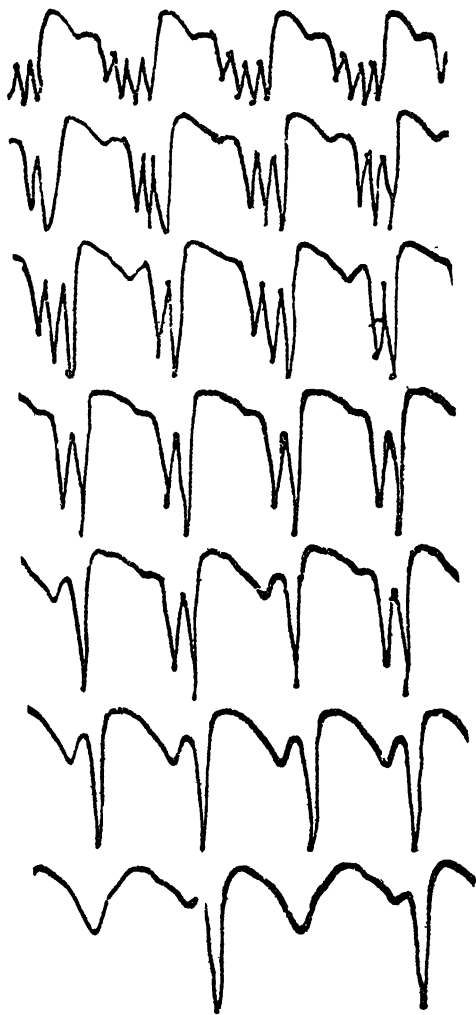
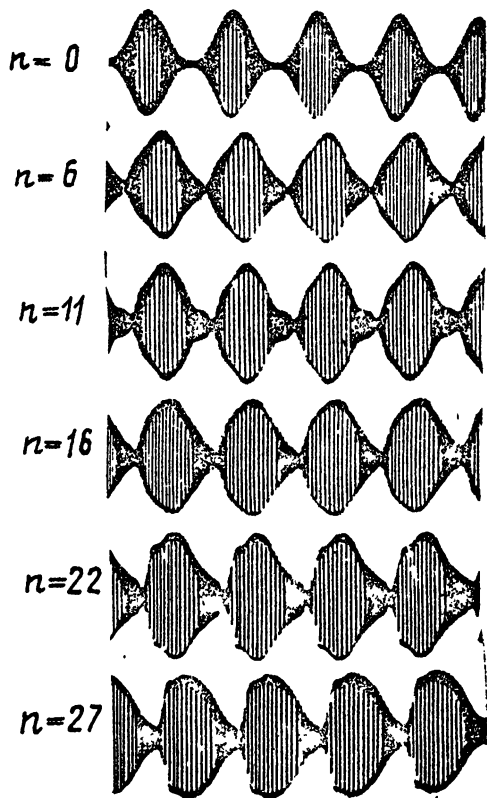


Фото 10



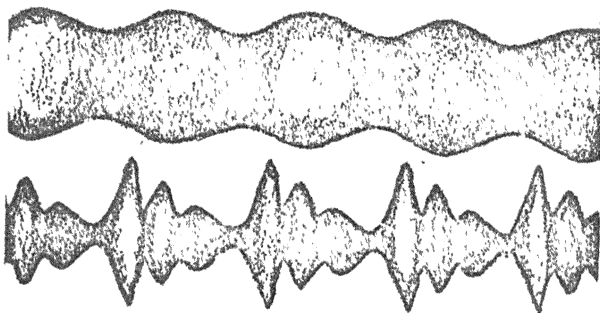
Форма.11



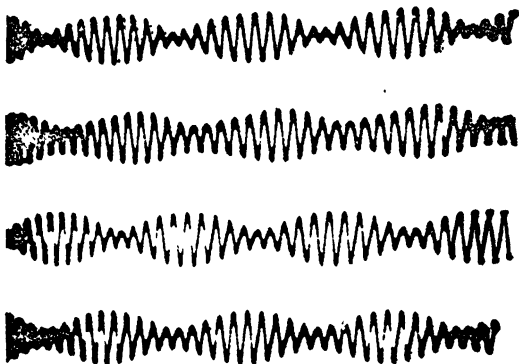
Φωτο 12



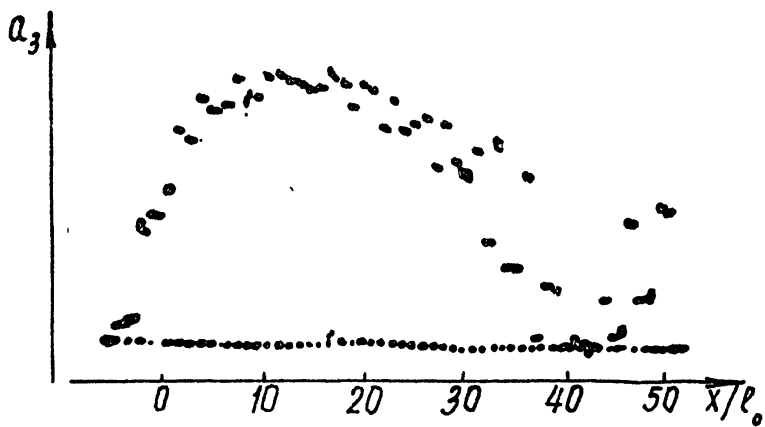
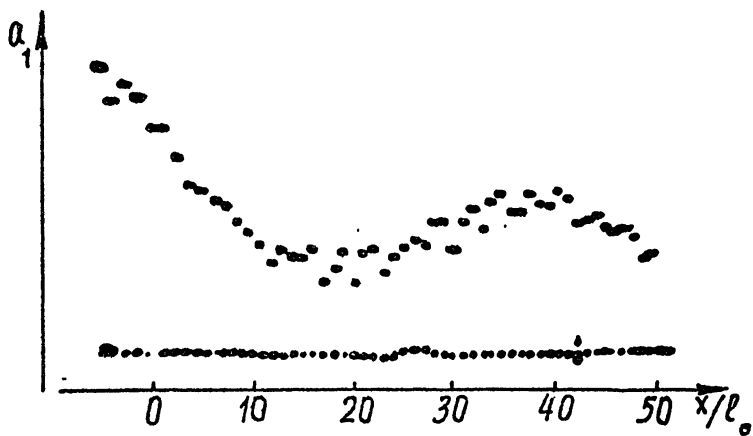
Фомо 13



Формо 14



Формо 15



φомо 1б



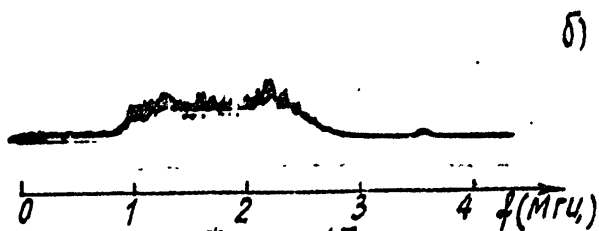
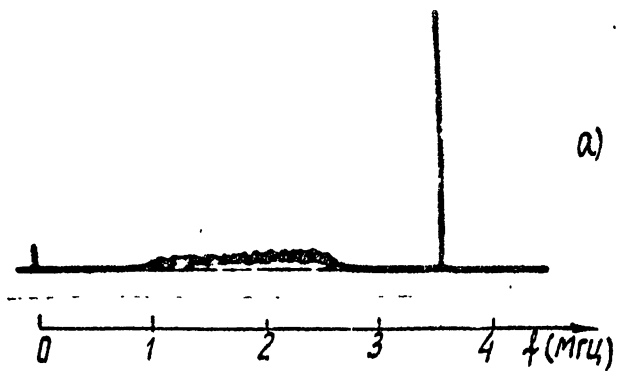


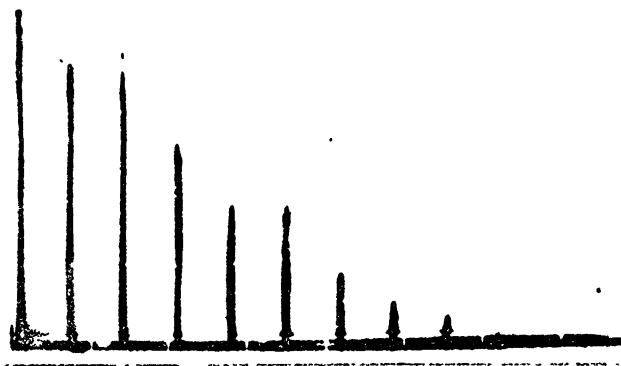
фото 17



фото 18



а)



б)

Формо 19