Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 52

Л.П.Шильников

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

г.Горький,
1974

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Одной из важных задач качественной теории дифференциальных уравнений является изучение характера изменения топологической структуры разбиения фазового пространства на траектории при непрерывном переходе от одной системы к другой в пространстве динамических систем. Основы теории бифуркаций, как известно, были заложены в трудах основоположников качественной теории А.Пуанкаре и А.М.Ляпунова. Здесь следует отметить прежде всего знаменитую задачу о фигурах равновесия вращающейся жидкости. Однако точная математическая постановка задачи теории бифуркаций динамических систем и ее идейные основы стали возможны лишь на основе понятий грубости и степеней негрубости введенных А.А.Андроновым, Л.С.Понтрягиным и Е.А.Леонтович в 1937 г. Доказанные ими теоремы о необходимых и достаточных условиях грубости и 1-ой степени негрубости динамических систем второго порядка на плоскости позволили двум из этих авторов полностью выделить и исследовать основные случаи бифуркации предельных элементов: состояний равновесия и периодических движений. Благодаря этим работам большой ряд физических явлений получил адэкватное описание в терминах теории бифуркаций (мягкий и жесткий режим возникновения колебаний, явления захватывания, затягивания и т.д.).

Изучение же бифуркации многомерных динамических систем, начавшееся еще в сороковых годах, в силу отсутствия необходимых и достаточных условий грубости, implicite использовало те естественные предположения, что грубой во всяком случае, является та система, в которой имеется конечное число грубых состояний равновесия и предельных циклов, сепаратрисные многообразия которых пересекаются грубо.

Изложение мы начнем с объяснения этих понятий. Состояние равновесия 0 n -мерной ($n \geqslant 3$) гладкой системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x) \tag{1}$$

называется грубым, если корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения

$$\det\left|\left(\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right)_{x=0} - \lambda E\right| = 0$$

не лежат на мнимой оси.

Будем приписывать грубому состоянию равновесия тип (m , p), если m – число корней, лежащих в левой полуплоскости, а p – число корней, лежащих в правой полуплоскости.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots m$, $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $j = m+1, \dots, n$ Матрицу $A = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=0}$ невырожденным преобразованием можно привести к виду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix}$$

где A^+ – $m \times m$ – матрица, собственными значениями которой являются $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, а A^- – $p \times p$ – матрица с собственными значениями $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$. Тогда система (1) линейной заменой переменных приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{A} u + f(u, v) \\ \dot{v} &= A^- v + g(u, v) \end{aligned} \tag{2}$$

где u – m – вектор-столбец, v – p – вектор -столбец, и $f(0,0)=0$, $g(0,0)=0$.

Если $m=n$ ($m=0$) состояние равновесия 0 называется устойчивым (неустойчивым) узлом. При $m\neq n$ и $m\neq 0$ состояние равновесия 0 называется седлом.

Устойчивым многообразием M_0^+ состояния равновесия 0 будем называть множество всех точек фазового пространства, обладающих следующим свойством: проходящие через них траектории при $t\to+\infty$ стремятся к 0. Соответственно определяется неустойчивое многообразие M_0^-, как множество всех точек фазового пространства, через которые проходят траектории, стремящиеся к 0 при $t\to-\infty$.

Известно, что если 0 имеет тип (m, p), то многообразия M_0^+ и M_0^- имеют размерности m и p соответственно и являются гладкими гиперповерхностями в каждой своей точке. В достаточно малой окрестности точки 0 M_0^+ имеет уравнение: $v=\varphi(u)$, а M_0^- имеет уравнение $u=\psi(v)$, $\psi(0)=0$, $\varphi(0)=0$. Сделав замену $\xi=u-\psi(v)$, $\eta=v-\varphi(u)$, получим, что система (2) в окрестности 0 запишется в виде

$$\dot{\xi}=A^+\xi+\tilde{f}(\xi,\eta)\xi \qquad (3)$$

$$\dot{\eta}=A^-\eta+\tilde{g}(\xi,\eta)\eta$$

В переменных ξ, η в окрестности 0 уравнение M_0^+ будет: $\eta=0$ уравнение M_0^- – $\xi=0$.

Качественно поведение траекторий в окрестности 0 изображено на рис. 1.

Введем теперь понятие грубого периодического движения. Для периодического движения $\mathcal{L}$ системы (1) $x=\alpha(t)=\alpha(t+\tau)$ запишем уравнение в вариациях

$$\dot{\zeta}=\frac{\partial X(\alpha(t))}{\partial x}\zeta=B(t)\zeta \qquad (4)$$

Из теоремы Флоке следует, что фундаментальная матрица системы (4) имеет вид

$$z(t) = C(t)e^{Rt} \tag{5}$$

где R – постоянная матрица, а $C(t)$ – периодическая. Собственные значения $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ матрицы e^{Rt} называются мультипликаторами периодического движения $\mathcal{L}$. По теореме Андронова и Витта один из них (за который можно взять γ_n) всегда равен 1.

Периодическое движение $\mathcal{L}$ называется грубым, если ни один из мультипликаторов $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ не равен по модулю единице. Периодическое движение называется устойчивым (неустойчивым), если $|\gamma_i| < 1$ ($|\gamma_i| > 1$) $i = 1, \dots, n-1$. Если же не все мультипликаторы лежат внутри (вне) единичного круга, то такое периодическое движение называется седловым (рис. 2).

Будем приписывать грубому периодическому движению тип (m, p), если $m-1$ мультипликаторов лежат внутри единичного круга и $p-1$ мультипликаторов лежит вне единичного круга. Для грубого периодического движения $m + p = n + 1$.

Устойчивым многообразием $M^+_{\mathcal{L}}$ периодического движения $\mathcal{L}$ будем называть множество всех точек фазового пространства, таких, что траектории, проходящие через них, стремятся к $\mathcal{L}$ при $t \to \infty$. Аналогично неустойчивым многообразиям $M^-_{\mathcal{L}}$ периодического движения $\mathcal{L}$ называется множество всех точек фазового пространства, лежащих на траекториях, которые стремятся к $\mathcal{L}$ при $t \to -\infty$. Ясно, что периодическое движения $\mathcal{L}$ одновременно принадлежит и $M^+_{\mathcal{L}}$ и $M^-_{\mathcal{L}}$.

Для изучения поведения траекторий в окрестности периодического движения часто бывает удобным переход к изучения следов траекторий на секущей. Обозначим через S гладкую ($n-1$)-мерную секущую пластинку, ортогональную к $\mathcal{L}$. Введем на S эвклидовы координаты $s_1, \dots, s_{n-1}$, так, чтобы точка 0 пересечения $\mathcal{L}$ с S

имела координаты $(0,\dots,0)$. Отображение $T: S \to S$ по траекториям системы (1), проходящим в окрестности $\mathcal{L}$ будет записываться в виде

$$\bar{S} = D S + \cdots \qquad (6),$$ где

D – $(n-1)\times(n-1)$ – матрица, собственные значения которой являются мультипликаторами периодического движения $\mathcal{L}$. Периодическому движению $\mathcal{L}$ соответствует неподвижная точка 0 отображения T. Траектории системы (1), проходящей в окрестности $\mathcal{L}$, соответствует последовательность точек на S – последовательность итераций отображения T. Если $\mathcal{L}$ имеет тип (m, p), то линейной заменой переменных отображение T можно привести к виду

$$\begin{aligned} \bar{u} &= D^{+} u + f(u,v) \\ \bar{v} &= D^{-} v + g(u,v) \end{aligned} \qquad (7)$$

где собственные значения $(m-1)\times(m-1)$ – матрицы D^{+} лежат внутри единичного круга, а собственные значения $(p-1)\times(p-1)$ – матрицы D^{-} лежат вне единичного круга.

Пересечение $M^{+}_{\mathcal{L}}$ с S обозначим через $\mathfrak{M}^{+}$. Соответственно компоненту связности пересечения $M^{-}_{\mathcal{L}}$ с S, – через $\mathfrak{M}^{-}$. Известно, что в достаточно малой окрестности точки 0 $\mathfrak{M}^{+}$ имеет уравнение $v = \varphi(u)$, $\varphi(0) = 0$, а $\mathfrak{M}^{-}$ имеет уравнение $u = \psi(v)$, $\psi(0) = 0$. Сделав замену переменных $\xi = u - \psi(v)$, $\eta = v - \varphi(u)$, получим, что отображение T в окрестности 0 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \left(D^{+} + \tilde{f}(u,v)\right)\xi \\ \bar{\eta} &= \left(D^{-} + \tilde{g}(u,v)\right)\eta \end{aligned} \qquad (8)$$

В новых переменных уравнение $\mathfrak{M}^{+}$ будет $\eta = 0$, уравнение $\mathfrak{M}^{-}$ – $\xi = 0$. Качественно поведение траекторий отображения T в окрестности 0 изображено на рис. 4.

Если для системы двух дифференциальных уравнений наличие сепаратрисы, идущей из седла в седло, означает негрубость системы, то для многомерных динамических систем это вообще не так – устойчивые и неустойчивые многообразия периодических движения и седел в грубой системе могут пересекаться.

Дадим определение грубого пересечения. Пусть $M_i^+(M_j^-)$ устойчивое (неустойчивое) многообразие периодического движения $\mathcal{L}_i(\mathcal{L}_j)$ или седла $O_i(O_j)$. Касательную гиперплоскость к M_i^+ – в точке $x \in M_i^+$ ($x \in M_j^-$) обозначим через $W_i^+(x)$ ($W_j^-(x)$). Пересечение M_i^+ и M_j^- в точке x называется грубым, если

$$\dim W_i^+(x) + \dim W_j^-(x) - n = \dim\left(W_i^+(x) \cap W_j^-(x)\right) \tag{9}$$

где символ $\dim$ означает размерность. На рис. 3 показано грубое пересечение устойчивого и неустойчивого многообразия двух седел.

Изучение систем, имеющих глобальную секущую S, удобно сводить к изучению отображений. Отображение T : $S \to S$ построенное по траекториям будет гладким и взаимно-однозначным. Отображения, обладающие такими свойствами, в настоящее время носят название диффеоморфизмов. Напомним, что точка x называется периодической точкой T, если найдется $p \geq 1$, что $T^p x = x$; при $p = 1$ точка x называется неподвижной. Системами, обладающими глобальной секущей, являются системы $\dot{x} = X(x, t)$ где $X(x,t)$ периодически с периодом 2π зависит от t. Периодическому движению такой системы будут соответствовать неподвижная точка отображения T плоскости $t = 0$ в плоскость $t = 2\pi$, если периодическое движение имеет период 2π и цикл различных периодических точек $x, Tx, \ldots, T^{p-1}x$ ($T^p x = x$), если периодическое движение имеет период $2\pi p$. Плоскость $t = 0$ здесь является глобальной секущей.

В случае, когда секущая S двумерна устойчивым и неустойчивым многообразиям седловых периодических движений на секущей будут соответствовать одномерные инвариантные многообразия неподвижных и периодических точек, а грубому пересечению инвариантных многообразий M_i^+ и M_j^- – обычное пересечение инвариантных кривых m^+ и m^- без касания, но по уже дискретной траектории. В этом случае, если инвариантные многообразия – сепаратрисы различных периодических точек пересекаются, то точки их пересечения носят названия гетероклинических точек. Если же пересекаются сепаратрисы одного периодического движения, то точки пересечения носят название гомоклинических точек. Эта терминология восходит еще к Пуанкаре, который первый обнаружил возможность таких пересечений в знаменитой задаче трех тел. На рис. 4 приведены примеры таких пересечений.

Наличие гомоклинических точек у отображения означает существование двоякоасимптотических решений (гомоклинических кривых) у седлового периодического движения. Наличие же гетероклинической точки означает наличие решения, асимптотического при $t \to \infty$ к одному седловому периодическому движению, а при $t \to -\infty$ к другому.

В 1960 г. Смейлом [1] был выделен простой класс грубых систем – систем Морса-Смейла с помощью следующих условий:

1) В системе имеется только грубые состояния равновесия и периодические движения и их конечное число.

2) Другие предельные множества отсутствуют.

3) Инвариантные многообразия пересекаются трансверсально.

Эти системы наиболее близки к двумерным динамическим системам. Совсем недавно грубость таких систем была доказана Пэли и Смейлом.

Ниже дается краткая характеристика известных в настоящее время основных бифуркаций состояний равновесия и периодических движений, которые не выводят из класса систем Морса-Смейла. В известном смысле, оставаясь в рамках таких систем, приводимая классификация является исчерпывающей.

1. Бифуркации состояний равновесия

Здесь мы будем различать два случая:

А) Имеется корень $\lambda = 0$, остальные имеют реальные части, отличные от нуля.

Состояния равновесия с одним нулевым корнем было детально рассмотрено Р.М.Минц [2]. Здесь мы ограничимся рассмотрением простейших сложных состояний, а именно двукратных. В их окрестности система (1) будет записываться в следующем виде

$$\frac{d\xi}{dt} = A^{+}\xi + \dots$$
$$\frac{d\eta}{dt} = A^{-}\eta + \dots$$
$$\frac{dz}{dt} = \ell_2 z^2 + \dots$$

Величина ℓ_2 носит название первой ляпуновской величины. При всех малых добавках это состояние равновесия 0 либо сохраняется, либо развалится на два грубых, либо исчезнет.

Состояния равновесия, которые образуют путем слияния двух простых: узла и седла будем называть седло-узлом (рис. 5). В пространстве как указано на рис. 6 могут также сливаться два седла. Сложное состояние равновесия, которое возникает путем слияния двух седловых состояний равновесия называется седло-седлом.

В) Случай двух чисто мнимых корней явился предметом многочисленных исследований. Здесь особо следует отметить обстоятельную работу Н.Н.Баутина [4], в которой излагается вычисление первой фокусной (ляпуновской величины $\mathcal{L}_3$) от знака которой зависит характер устойчивости рождающегося периодического движения (рис. 7)+).

+) Заметим, что как сейчас установлено Л.А.Беляковым задача о рождении периодического движения из состояния равновесия с двумя чисто мнимыми корнями (сложного фокуса) может быть сведена к двумерной задаче, рассмотренной А.А.Андроновым и Е.А.Леонтович.

II. Бифуркации периодических движений сводятся к изучению бифуркации неподвижных точек на секущей.

Негрубость периодического движения здесь связано с тем, что на единичной окружности может появиться а) мультипликатор равный 1, б) -1, в) два мультипликатора $e^{\pm i\varphi}$. Первый случай рассматривался в работах Р.М.Минц [3] и Ю.И.Неймарка [5]. В общем случае здесь ситуация очень похожа на ту, которая имеет место на плоскости: при изменении параметров системы два периодических движения сливаются в одно негрубое, которое затем исчезает.

Второй случай рассмотрен Ю.И.Неймарком [5]. Здесь при изменении параметров системы периодическое движение сохраняется, но из него может родиться периодическое движение удвоенного периода.

Третий случай обстоятельно изучался Сакером [6]. Им установлено, что в случаях, когда $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ при условии, что некоторая величина не равна нулю, от периодического движения может родиться двумерное интегральное многообразие типа тор. Четыре исключительных случая значений φ являются резонансными (по этому поводу см. также [7]).

III. Сложное состояние равновесия типа седло-узел характеризуется тем, что в него входит (выходит) n-мерный пучок траекторий и выходит (входит) только одна траектория Γ_0 (рис. 8).

Предположим, что Γ_0 при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) возвращается обратно в седло-узел и не лежит в краю пучка. Как установлено в работе [8], при этих условиях при исчезновении седло-узла из Γ_0 рождается единственное устойчивое (неустойчивое) периодическое движение.

IV. Рождаться может периодическое движение и из траектории, идущей из седла-узла в него при его исчезновении [9].

Рассмотренные бифуркации относились к тем случаям, когда имела место негрубость состояния равновесия или периодического движения. Следующий случай связан с не-грубым пересечением инвариантных многообразий состояния равновесия типа седло.

У. Пусть у седла есть траектория Γ_0, идущая из седла в это же седло. Предположим, что корень характеристического уравнения наименьший по абсолютной величине является положительным. Здесь установлены условия, при которых при всех малых изменениях системы из Γ_0 может родиться не более одного цикла. В случае, когда седло имеет тип $(n-1, 1)$ доказывается устойчивость рождающегося периодического движения [8]. В случае же, когда тип седла $(m, n-m)$ где $m \neq n-1$, рождающийся цикл будет неустойчивым или седловым ($m \neq 1$) [10] (см. рис. 9).

Общей особенностью перечисленных бифуркаций является тот факт, что бифуркации не выводят из класса систем с конечным числом периодических движений.

Однако при рассмотрении случая, когда состояние равновесия является седлом, в котором характеристическое уравнение имеет пару комплексных корней, реальные части которых по абсолютной величине меньше других корней и имеет траекторию, идущую из седло-фокуса в него же была обнаружена [11] совершенно новая ситуация: в окрестности Γ_0 существует счетное множество периодических движений, гомоклинических, а также рекуррентных движений, движения, устойчивые по Пуассону и т.д.

Исторически задача о структуре окрестности гомоклинической кривой была поставлена Пуанкаре и Биркгофом. Частичное ее решение (неполное описание) было указано Смейлом. Полное решение было дано в работе [12]. Оказалось, что все множество траекторий, целиком лежащих в достаточно малой окрестности грубой гомоклинической кривой седлового периодического движения, имеет следующее описание.

1) Множество траекторий $N^+(N^-)$, асимптотических к $\mathcal{L}_0$ только в положительном (отрицательном) направлении, находится во взаимно-однозначном соответствии множеством всех бесконечных в одну сторону последовательностей

составленных из счетного множества символов $\bar{k}, \bar{k}+1$

2) Множество траекторий $N^{\pm}$. двоякоасимптотических к $\mathcal{L}_0$ (гомоклинических кривых), исключая Γ_0 , находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех отрезков $[n_1, \dots, n_l]$, составленных из символов $\bar{k}, \bar{k}+1, \dots$

3) множество траекторий N , не являющихся асимптотическими к $\mathcal{L}_0$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех бесконечных в обе стороны последовательностей

$$[\dots, n_1, n_2, n_3, \dots]$$

составленных из счетного множества символов $\bar{k}, \bar{k}+1, \dots$

Геометрический смысл такого описания состоит в следующем: U - окрестность $\mathcal{L}_0$ и Γ_0 можно представить в виде внутренности тора с приклеенной ручкой, где средней линией тора является периодическое движение, а средней линией ручки, глобальный кусок гомоклинической кривой Γ_0 (рис. 10).

Так как внутри тора лежит только одна траектория - периодическое движение $\mathcal{L}_0$, то любая другая траектория, целиком лежащая в достаточно малой окрестности гомоклинической кривой Γ_0 , должна выйти из внутренности тора и пройти по ручке. Число n_i характеризует число витков траекторий внутри тора прежде чем траектория начнет движение по ручке. Асимптотическая кривая к $\mathcal{L}_0$ при $t \to \infty$ ($t \to -\infty$), отличная от Γ_0 , после некоторого числа прохождений по ручке будет уже все время оставаться внутри тора.

Можно показать, сделав соответствующую перекодировку символов, что множество всех траекторий целиком лежащая в U , включая уже $\mathcal{L}_0$ и Γ_0 находится во взаимно однозначном соответствии с траекториями схемы Бернулли из двух символов или, что то же, со всеми траекториями графа (рис.11), где ребра 0 и 1 обозначают состояния, а точка – переход. В этом описании Γ_0 будет соответствовать следующая символическая траектория

$$\{\cdots 0 \ldots 010 \ldots 0 \ldots\}$$

Периодическим символическим последовательностям будут соответствовать периодические движения.

Наличие гомоклинических точек в системе является тем принципиально новым фактом, который отличает системы со счетным множеством грубых периодических движений от грубых систем с конечным числом периодических движений – систем Морса-Смейла. Поэтому вопрос, связанный с установлением условий появлений стохастичности в динамических системах, непосредственно связан с задачей о появлении гомоклинических кривых в системе при изменении ее параметров. В недавнее время автором была указана простая картина возникновения таких гомоклинических структур при исчезновении сложного состояния равновесия типа седло-седло [13]. Другой случай, связанный с появлением негрубой гомоклинической кривой, рассмотрен в работах Н.К.Гаврилова и автора [14]. Эти бифуркации являются принципиально новыми и позволяют указать переходы от систем Морса-Смейла к системам с бесчисленным множеством периодических движений и, следовательно, позволяют указать ряд критериев возникновения стохастичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Смейл, Дифференцируемые динамические системы, УМН, т.ХХУ, № 1, (1970).

2. Р.М.Минц, Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в h -мерном пространстве, ДАН СССР, 147:1 (1962).

3. Р.М.Минц, Предельный цикл в трехразмерном пространстве с одним характеристическим показателем отличным от нуля, ДАН СССР, 125:1 (1959), 38-41.

4. Н.Н.Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, 1949.

5. Ю.И.Неймарк, О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров, ДАН СССР, 129:4 (1959), 736-739.

6. R.Sacker, On invariant surface and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations, Courant Institute of Math.Sci., October, 1964.

7. Л.О.Барсук, Н.М.Белослудцев, Ю.И.Неймарк, Н.М.Салганская, Устойчивость неподвижной точки преобразования в критическом случае и некоторые особые бифуркации, Изв. ВУЗ, Радиофизика, № 11, 1968.

8. Л.П.Шильников, О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий, Мат. сб., 61 (104), 1963, 443-466.

9. Л.П.Шильников, О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же, ДАН СССР, 170, № 1, 1966, 48-52.

10. Л.П.Шильников, О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло, Мат. сб., 77 (119), № 3, 1968, 461-472.

11. Л.П.Шильников, К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояний равновесия типа седло-фокус, Мат. сб., 81 (123), 1, 1970, 92-103.

12. Л.П.Шильников, Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа, Мат. сб., 74 (116), 1967, 378-397.

13. Л.П.Шильников, Об одном новом типе бифуркации многомерных динамических систем, ДАН СССР, 189, № 1, 1969.

14. Н.К.Гаврилов, Л.П.Шильников, О трехмерных системах близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, 1 Мат. сб., 1972, 88(4), П Мат. Сб., 1973 (в печати).

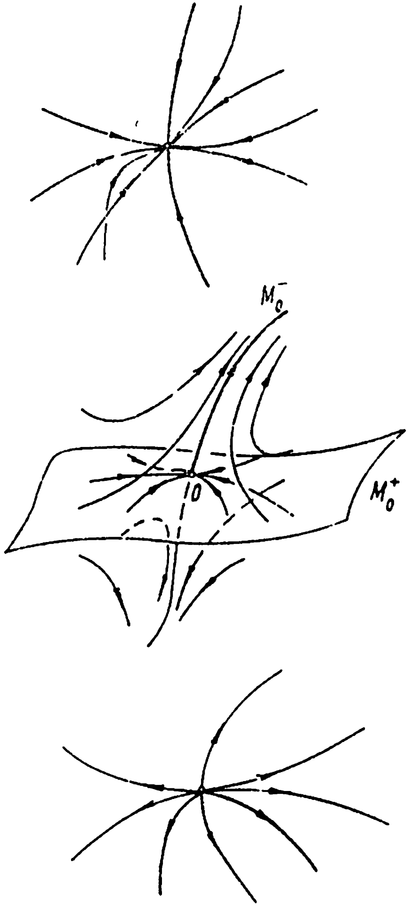


Рис 1

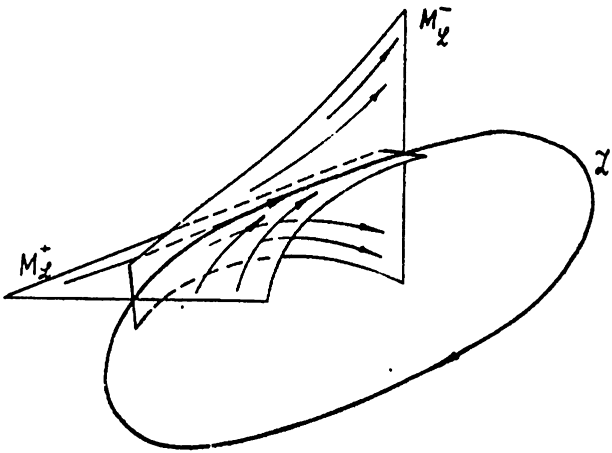
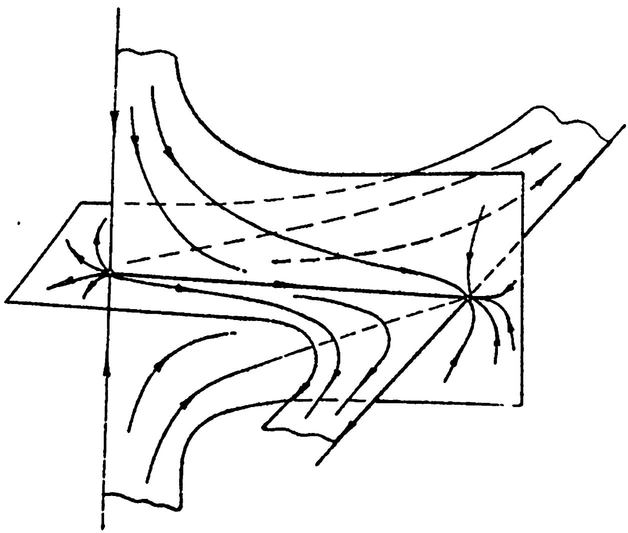


Рис 2



Фuc.3

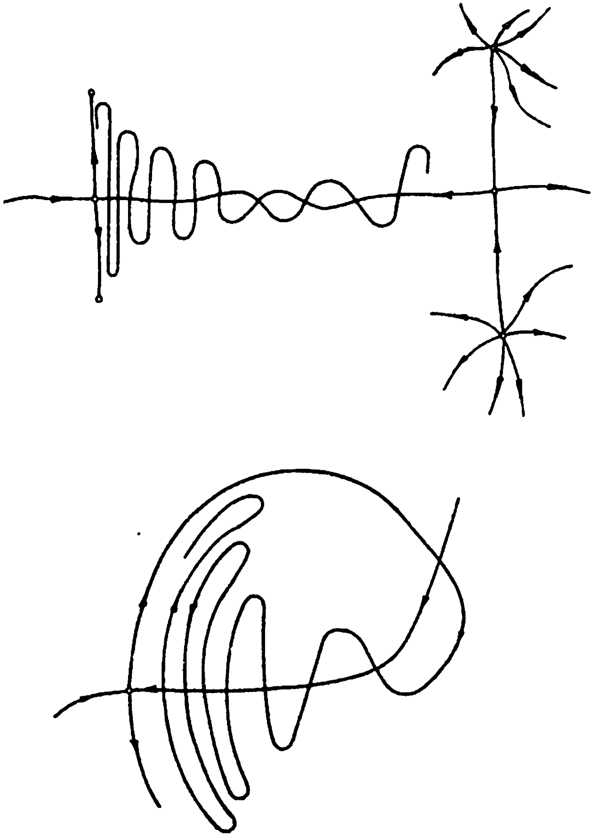


Рис. 4

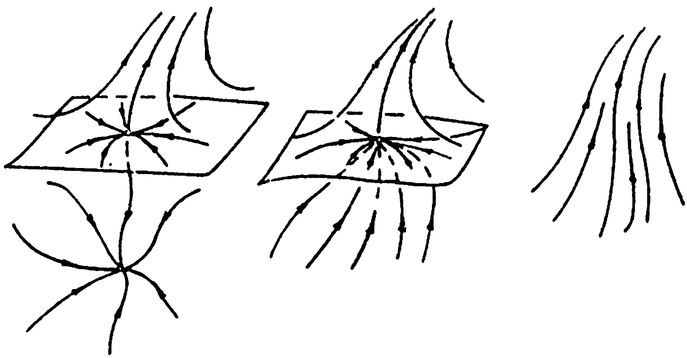


Рис 5

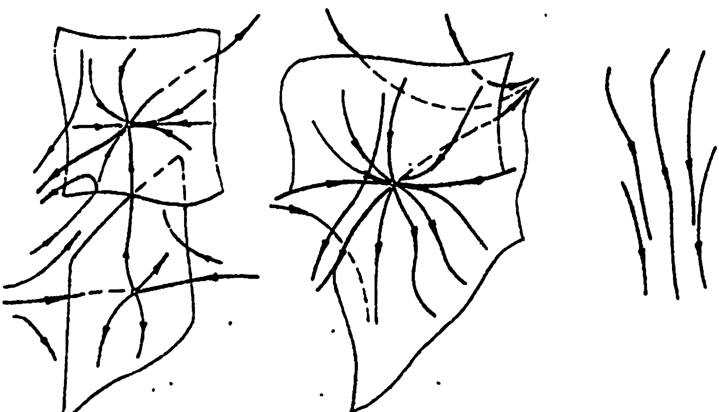
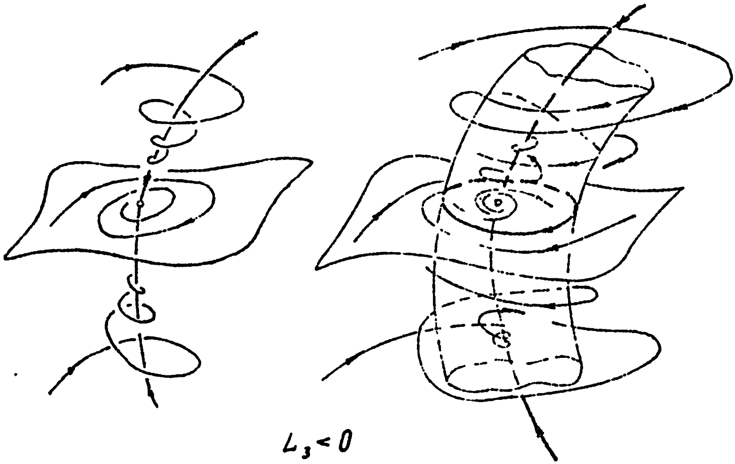
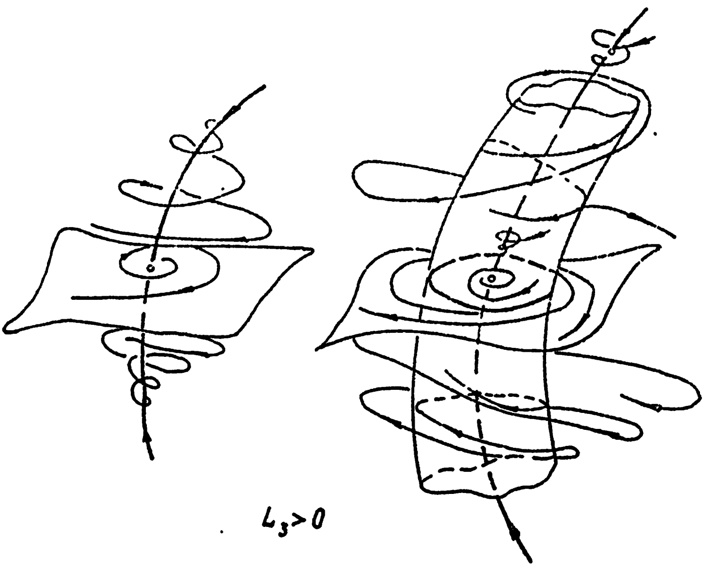


Рис. 6



$L_3 < 0$



$L_3 > 0$

Рис. 7

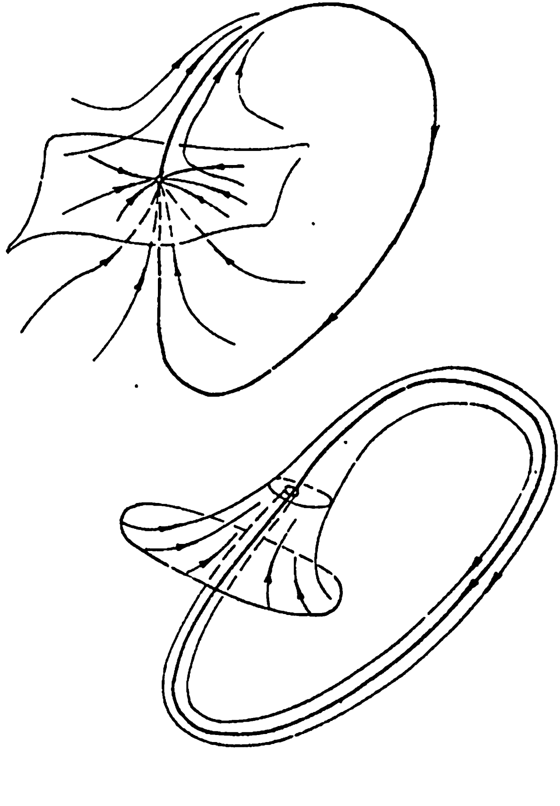


Рис. 8

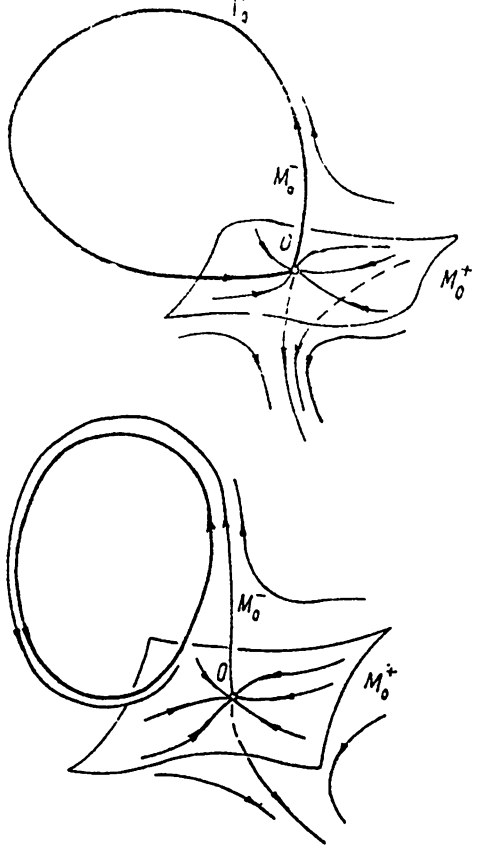


Рис. 9

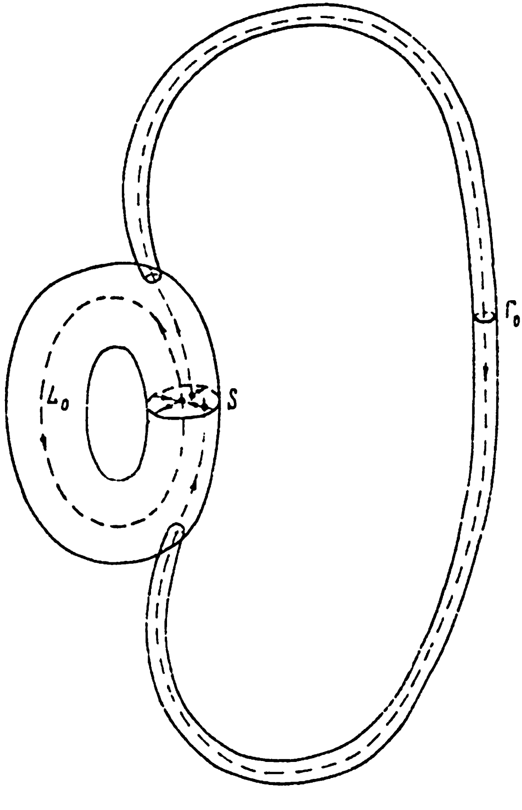


Рис 10

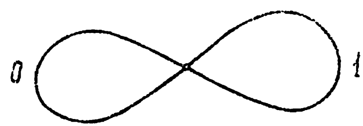


Рис 11