Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт № 53

М.А.Антонец, И.А.Шерешевский

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $L_p(R^n)$

г.Горький,
1 9 7 4

Р е з ю м е

В работе изучаются псевдодифференциальные операторы специального вида в $L_p(R^n)$. Строятся семейства банаховых пространств, совпадающих с областями определения этих операторов, и доказывается компактность вложения их в $L_p(R^n)$. Резольвенты рассматриваемых операторов в $L_2(R^n)$ классифицируются по принадлежности к некоторым идеалам кольца вполне непрерывных операторов. Доказывается совпадение спектров изучаемых операторов во всех пространствах $L_p(R^n)$, $p \geq 1$.

Полученные результаты позволяют оценивать спектры некоторых вполне непрерывных операторов в $L_2(R^n)$.

§ 1. Введение

В работе изучаются псевдодифференциальные операторы, определяемые символом

$$(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}(1+|x|^2)^{\beta/2}, \; x, \xi \in R^n, \; Re\alpha \cdot Re\beta > 0. \quad (1.1)$$

Такие операторы имеют чисто дискретный спектр в $L_p(R^n)$ при $p \geq 1$. В том случае, когда оператор (1.1) неограничен, его область определения является банаховым пространством с нормой графика, компактно вложенным в $L_p(R^n)$. Таким образом, с операторами вида (1.1) естественно связывается семейство банаховых пространств, компактно вложенных в $L_p(R^n)$, а так же, при некоторых дополнительных условиях на показатели α и β, друг в друга. Имеющиеся теоремы вложения для лиувиллевских пространств [1] и очевидные условия принадлежности элементов пространства L_p весовым классам, позволяют легко установить принадлежность элементов пространства L_p области определения операторов вида (1.1) а, следовательно, соответствующим банаховым пространствам. Это позволяет дать просто проверяемые признаки полной непрерывности операторов в $L_p(R^n)$. Более того, знание асимптотического вида спектра оператора (1.1) в зависимости от α и β позволяет установить принадлежность операторов в L_2, область значений которых содержится в области определения операторов (1.1), тем или иным идеалам кольца вполне непрерывных операторов.

Операторы вида (1.1) обладают так же некоторыми интересными алгебраическими свойствами. Именно, композиция операторов вида (1.1) отличается от оператора того же вида ограниченным операторным множителем. Аналогичным свойством обладают дробные степени операторов вида (1.1) в том случае, когда они имеют смысл. Эти свойства позволяют работать с семействами операторов вида (1.1) почти так же, как с семействами коммутирующих операторов. В частности, это позволяет отождествлять области определения операторов вида (1.1) в L_2 с элементами некоторых гильбертовых шкал.

Следует отметить, что соотношения коммутации, полученные в § 3, не могут быть выведены из общих алгебраических свойств псевдодифференциальных операторов [6–8], так как имеющиеся признаки ограниченности таких операторов с символами общего вида [9] не позволяют доказать ограниченность в L_p рассматриваемых нами операторных мономов.

Авторы выражают глубокую благодарность Г.М.Жислину за внимание к работе и полезные дискуссии.

§ 2. Определения

1. В пространстве $L_p(R^n)$, $p \geq 1$ рассмотрим оператор K_β умножения на функцию $K_\beta(x) = (1+|x|^2)^{-\beta/2}$, $x \in R^n$, $\beta > 0$, и интегральный оператор J_α, $\alpha > 0$, определяемый ядром $G_\alpha(|x-x'|)$ Бесселя-Макдональда ([1], стр.341).

Оператор $P_{\alpha\beta} = J_\alpha K_\beta$ ограничен в L_p как композиция ограниченных операторов. Нетрудно видеть, что обратный оператор $P^{-1}_{\alpha\beta}$ имеет в L_p плотную область определения и $P^{-1}_{\alpha\beta} = K_{-\beta} J_{-\alpha}$, где $K_{-\beta}$ – оператор умножения на функцию $[K_\beta(x)]^{-1}$, а $J_{-\alpha}$ – оператор бесселевского дифференцирования порядка α.

Пусть

$$\mathcal{P}^{\alpha\beta}_p = \{\psi(x) : \psi(x) \in L_p(R^n), \|P^{-1}_{\alpha\beta}\psi\|_{L_p} < \infty\} \qquad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_p^{\alpha\beta} = \{\psi(x) : \psi(x) \in {}_p(R^n),\ \|\mathcal{I}_{-\alpha}\psi\|_{L_p} + \|\mathcal{K}_{-\beta}\psi\|_{L_p} < \infty\}. \quad (2.2)$$

Так как операторы $\mathcal{I}_\alpha$, $\mathcal{K}_\beta$ при $\alpha, \beta \geq 0$ ограничены в L_p, $p \geq 1$, то линейные многообразия $\mathcal{P}_p^{\alpha\beta}$, $\mathcal{L}_p^{\alpha\beta}$ являются банаховыми пространствами с нормами

$$\|\psi\|_{\mathcal{P}_p^{\alpha\beta}} = \|P_{\alpha\beta}^{-1}\psi\|_{L_p} \quad (2.3)$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}_p^{\alpha\beta}} = \left(\|\mathcal{I}_{-\alpha}\psi\|_{L_p}^p + \|\mathcal{K}_{-\beta}\psi\|_{L_p}^p\right)^{1/p}. \quad (2.4)$$

Лемма 2.1. Вложение $\mathcal{L}_p^{\alpha\beta} \subset L_p$ компактно.
Доказательство: Этот факт является следствием теоремы Рисса о компактности множеств в L_p [2].
Действительно, пусть $N = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{L}_p^{\alpha\beta},\ \|\varphi\|_{\mathcal{L}_p^{\alpha\beta}} < C\}$.
Тогда:
1) функции $\varphi \in N$ равномерно убывают на бесконечности в L_p:

$$\left\{\int_{|x|>A} |\varphi|^p dx\right\}^{1/p} \leq A^{-\beta}\left\{\int_{R^n} (1+|x|^2)^{\beta p/2} |\varphi|^p dx\right\}^{1/p} \leq C \cdot A^{-\beta}$$

2) функции $\varphi \in N$ равностепенно непрерывны по сдвигу в L_p:
положим $\psi = \mathcal{I}_{-\alpha}\varphi$, тогда $\|\psi\|_{L_p} < C$ и по обобщенному неравенству Минковского [1], стр. 32)

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_{L_p} \leq \|G_\alpha(x+h) - G_\alpha(x)\|_{L_1}^{1/p} \|\psi\|_{L_p} \leq C \cdot \varepsilon(h), \quad (2.5)$$

где $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$.
Последнее неравенство в (2.5) следует из того, что ядро $G_\alpha(|x|)$ непрерывно по сдвигу в L_1.
Из теоремы 3.1. следует вложение $\mathcal{P}_p^{\alpha\beta} \subset \mathcal{L}_p^{\alpha\beta}$, что приводит к компактности сложения $\mathcal{P}_p^{\alpha\beta} \subset L_p$ и полной непрерывности оператора $P_{\alpha\beta}$.

§ 3. Теоремы о мономах

3.1. В том параграфе мы рассматриваем выражения вида

$$\prod_{j=1}^{m} \mathcal{J}_{\alpha_j} \mathcal{K}_{\beta_j} \qquad (3.1)$$

с комплексными α_j и β_j. Выражения вида (3.1) мы будем называть мономами порядка m.

Для $\operatorname{Re}\alpha > 0$, оператор $\mathcal{J}_\alpha$ определяется аналитическим продолжением ядра Бесселя–Макдональда. Для $\operatorname{Re}\alpha < 0$ полагаем $\mathcal{J}_\alpha = (\mathcal{J}_{-\alpha})^{-1}$.

3.2. Для целых положительных M оператор $\mathcal{J}_{-2M}$ является дифференциальным оператором: $\mathcal{J}_{-2M} = (1-\Delta)^{M}$, $\Delta = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$.
Поэтому для $w_j = u_j + i v_j$, $j = 1,2$,

$$[\mathcal{J}_{-2M}, \mathcal{K}_{w_2}] = \mathcal{J}_{-2M}\mathcal{K}_{w_2} - \mathcal{K}_{w_2}\mathcal{J}_{-2M} = \sum_{|\vec{\alpha}|<2M} S_{\vec{\alpha}}(w_2)\partial^{\vec{\alpha}}. \qquad (3.2)$$

Здесь

$$|\vec{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \partial^{\vec{\alpha}} = \frac{\partial^{|\vec{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha_i \geq 0$ – целые числа.

Функции $S_{\vec{\alpha}}$ есть линейные комбинации частных производных $\mathcal{K}_{w_2}(x)$ порядка не выше $2M$.
С помощью преобразования Фурье из (3.2) получаем при

$$[\mathcal{K}_{-2M}, \mathcal{J}_{w_1}] = \sum_{|\vec{\alpha}|<2M} T_{\vec{\alpha}}(w_1) x^{\vec{\alpha}}, \quad x^{\vec{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}. \qquad (3.3)$$

Здесь $T_{\vec{\alpha}}(w_1)$ есть линейная комбинация операторов свертки с ядрами вида $x^{\vec{\varkappa}} G_{w_1}(|x|)$, $|\vec{\varkappa}| < 2M$ при $u_1 > 0$ или множителей Марцинкевича с нормами $\leq C_{\vec{\alpha}} (1+|v_1|)^{2M}$ при $u_1 = 0$. Последнее утверждение легко следует из теоремы 1.5 [1].

3.3. Пусть $\mathcal{D} = \{ \varphi : \varphi \in L_p, \|\mathcal{J}_{-2m_1} \mathcal{K}_{-2m_2} \varphi\|_{L_p} < \infty$, $m_1, m_2 \geq 0$ – целые, $p \geq 1 \}$.
Из (3.2) следует, что

$\mathfrak{D}=\{\varphi:\varphi\in L_p, \|\mathcal{K}_{-2m_1}\mathcal{J}_{-2m_2}\varphi\|_{L_p}<\infty, \ m_1,m_2\geqslant 0-\text{целые}, \ p\geqslant 1\}.$

Операторы $\mathcal{J}_{w_1}$, $\mathcal{K}_{w_2}$ переводят $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}$. Действительно, для $\varphi\in\mathfrak{D}$, $2m'+u_1>0$ из (3.3) следует, что

$$\|\mathcal{K}_{-2m_2}\mathcal{J}_{-2m_1}\mathcal{J}_{w_1}\varphi\|_{L_p}=\|\mathcal{K}_{-2m_2}\mathcal{J}_{2m'+w_1}\mathcal{J}_{-2(m'+m_1)}\varphi\|_{L_p}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\vec{\alpha}|<2m_2}\|T_{\vec{\alpha}}\|_{L_p-L_p}\cdot\|x^{\vec{\alpha}}\mathcal{K}_{2m_2}\|_{L_p-L_p}\|\mathcal{J}_{-2m_2}\mathcal{J}_{-2(m'+m_1)}\varphi\|_{L_p}+$$

$$+\|\mathcal{J}_{2m'+w_1}\|_{L_p-L_p}\|\mathcal{J}_{-2m_2}\mathcal{J}_{-2(m_1+m')}\varphi\|_{L_p}<\infty .$$

Аналогично утверждение для $\mathcal{J}_{w_2}$ следует из (3.2). Поэтому для любой $\varphi\in\mathfrak{D}$ вектор-функция $\mathcal{K}_{w_2}\varphi$ является целой функцией w_2 в L_p.

Оператор $\mathcal{J}_{w_1}$ при $\operatorname{Re} w_1>0$, определяемый ядром G_{w_1}, является голоморфной оператор-функцией в L_p, поскольку ядро G_{w_1} голоморфно зависит от w_1. Вектор-функция $\mathcal{J}_{w_1}\psi$, $\psi\in\mathfrak{D}$ является целой функцией w_1 в силу групповых свойств $\mathcal{J}_{w_1}$ [1].

Таким образом, область определения операторного монома вида (3.1) содержит $\mathfrak{D}$.

3.4. Теорема 3.1. Оператор $A(w_1,w_2)=\mathcal{J}_{-w_1}\mathcal{K}_{-w_2}\mathcal{J}_{w_1+\eta_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2}$, $w_1,w_2\in C_1$ при $\operatorname{Re}\eta_j\geqslant 0$, $j=1,2$ продолжается до ограниченного в L_p оператора. При этом $A(w_1,w_2)$ становится целой функцией $(w_1,w_2)\in C_2$.

Доказательство. 1. Рассмотрим оператор

$$A_1(w_2)=\mathcal{K}_{-w_2}\mathcal{J}_{iv_1+\eta_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2} . \tag{3.4}$$

Пусть $\Pi_M=\{w,\ w\in C_1\ |\operatorname{Re} w|<2M\}$.

Для φ, $\psi\in\mathfrak{D}$ билинейная форма $(A_1(w_2)\varphi,\psi)$ является голоморфной функцией w_1 в Π_{M_2}, причем

$$|f_1(w_2)|=|(A_1(w_2)\varphi,\psi)|\leqslant C_p(1+|w_1+\eta_1|)\|\mathcal{K}_{u_2+\operatorname{Re}\eta_2}\psi\|_{L_p}\|\mathcal{K}_{-u_2}\varphi\|_{L_q} \tag{3.5}$$

для $p^{-1}+q^{-1}$.

Это следует из того, что оператор $\mathcal{J}_{\operatorname{Re}\eta_1}$ ограничен, а $\mathcal{J}_{i(v_1+\operatorname{Im}\eta_1)}$ – множитель Марцинкевича с нормой $\leq C_p\,(1+|w_1+\eta_1|)$. Из коммутационных соотношений (3.3) следует ограниченность функции $f_1(w_1)$ на прямых $w_2=\pm 2M_2+iv_2$ при целых M_2 с оценкой

$$|f_1(w_2)|\leq C_p(1+|w_1+\eta_1|)^{2M_2}\ \|\varphi\|_{L_p}\|\psi\|_{L_q} \qquad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6) по теореме о трех прямых следует, что (3.6) справедливо для всех $w_2\in\Pi_{M_2}$.

П. Пусть снова $\varphi,\ \psi\in\mathcal{D}$, $w_1\in\Pi_{M_1}$, $w_2\in\Pi_{M_2}$, M_1, M_2 – целые. Рассмотрим билинейную форму оператора $A(w_1,w_2)$. Используя неравенство (3.6), получим:

$$|f(w_1,w_2)|=|(A(w_1,w_2)\varphi,\psi)|=|(\mathcal{K}_{-w_2}\mathcal{J}_{w_1+\eta_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2}\varphi,\mathcal{J}_{-\bar{w}_1}\psi)|= \qquad (3.7)$$

$$=|(A_1(w_2)\mathcal{K}_{-w_2-\eta_2}\mathcal{J}_{u_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2}\varphi,\ \mathcal{J}_{-w_1}\psi)|\leq$$

$$\leq C_p(1+|w_1+\eta_1|)^{2M_2}\ (1+|w_1|)\|\mathcal{K}_{-w_2-\eta_2}\mathcal{J}_{u_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2}\varphi\|_{L_p}\cdot\|\mathcal{J}_{-u_p}\psi\|_{L_q}$$

С помощью соотношения (3.2) и неравенства (3.6) для $w_1=2M_1+iv_1$ имеем:

$$|f(w_1,w_2)|\leq|(A_1(w_2)\varphi,\mathcal{J}_{iv_1}\psi)|+\sum_{\vec{\alpha}}|(S_{\vec{\alpha}}(-w_2)\partial^{\vec{\alpha}}\mathcal{J}_{2M_1+iv_1+\eta_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2}\varphi,$$

$$\mathcal{J}_{iv_1}\psi)|=|(A_1(w_2)\varphi,\mathcal{J}_{iv_1}\psi)|+\sum_{\vec{\alpha}}|(A_1(w_2)\mathcal{K}_{-w_2-\eta_2}\partial^{\vec{\alpha}}\varphi_{2M_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2}\varphi,$$

$$\mathcal{K}_{\bar{w}_2}S_{\vec{\alpha}}(-\bar{w}_2)\mathcal{J}_{iv_1}\psi)|\leq C_p\,(1+|w_1+\eta_1|)^{2M_2}\,(1+|w_1|)\times$$

$$\times(\|\varphi\|_{L_p}\|\psi\|_{L_q}+\sum_{\vec{\alpha}}C_{\vec{\alpha}}\ \|\psi\|_{L_q}\|\mathcal{K}_{-w_2-\eta_2}\partial^{\vec{\alpha}}\mathcal{J}_{2M_1}\mathcal{K}_{w_2+\eta_2}\varphi\|_{L_p} \qquad (3.8)$$

Операторы $\partial^{\vec{\alpha}}\mathcal{J}_{2M_1}$ при $|\vec{\alpha}|\leq 2M_1$ являются интегральными операторами с ядрами вида $Q(|x-x'|)$ такими, что

$Q(|x|)\in L_1(R^n)$ и для любого целого $M_1 (1+|x|^2)^{M_1} Q(|x|)\in L_1(R^n)$, ([1], стр.345). Отсюда, используя очевидное неравенство

$$(1+|x_1|^2)^{\varkappa}(1+|x_2|^2)^{\varkappa}\geq C_{\varkappa}(1+|x_1-x_2|^2)^{\varkappa}$$

нетрудно получить ограниченность в любом L_p, $p\geq 1$ операторов $\mathcal{K}_{-w}\partial^{\alpha}\,\mathcal{I}_{2M_1}\,\mathcal{K}_w$ при всех $w\in C_1$. Поэтому из (3.8) следует оценка:

$$|f(w_1,w_2)|\leq C_p(1+|w_1+\eta_1|)^{2M_2}(1+|w_1|)\|\varphi\|_{L_p}\|\psi\|_{L_q} \quad (3.9)$$

Аналогично показывается справедливость (3.9) для $w_1=-2M_1+iv_1$. Применяя теорему о трех прямых к голоморфной в Π_{M_1} функции

$$f_2(w_1)=f(w_1,w_2)(2M_1+1+w_1)^{-2M_2-1}$$

получим справедливость (3.9) для всех $w_1\in\Pi_{M_1}$, $w_2\in\Pi_{M_2}$. Так как $\mathfrak{D}$ всюду плотно в любом L_p, $p\geq 1$, то из (3.9) следует, что $A(w_1,w_2)$ однозначно продолжается до голоморфной оператор-функции на $\Pi_{M_1}\times\Pi_{M_2}\subset C_2$.

Теорема доказана.

3.5. Следствие 3.1. Пусть $\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}\alpha_j\geq 0, \sum_{j=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_j\geq 0$ (3.10)

Тогда моном (3.1) определяет ограниченный в любом L_p, $p\geq 1$, оператор, причем

$$\Big\|\prod_{j=1}^{m}\mathcal{I}_{\alpha_j}\mathcal{K}_{\beta_j}\Big\|_{L_p\to L_p}\leq C_p(\operatorname{Re}\alpha_j,\operatorname{Re}\beta_j)\prod_{j=1}^{m}\Big(1+\Big|\sum_{\ell=1}^{j}\alpha_\ell\Big|\Big)^{2(|\operatorname{Re}\sum_{\ell=1}^{j}\beta_\ell|+1)} \quad (3.11)$$

Действительно

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}\mathcal{I}_{\alpha_j}\mathcal{K}_{\beta_j}&-(\mathcal{I}_{\alpha_1}\mathcal{K}_{\beta_1}\mathcal{I}_{-\alpha_1}\mathcal{K}_{-\beta_1})\mathcal{K}_{\beta_1}\mathcal{I}_{\alpha_1+\alpha_2}\mathcal{K}_{\beta_2}\prod_{j=3}^{m}\mathcal{I}_{\alpha_j}\mathcal{K}_{\beta_j}=\\ &=C_1(\mathcal{K}_{\beta_1}\mathcal{I}_{\alpha_1+\alpha_2}\mathcal{K}_{-\beta_1}\mathcal{I}_{-\alpha_1-\alpha_2})\mathcal{I}_{\alpha_1+\alpha_2}\mathcal{K}_{\beta_1+\beta_2}\prod_{j=3}^{m}\mathcal{I}_{\alpha_j}\mathcal{K}_{\beta_j}=\\ &=C_1\cdot C_2\cdot\prod_{j=2}^{m}\mathcal{I}_{\alpha'_j}\mathcal{K}_{\beta'_j}.\end{aligned} \quad (3.12)$$

В правой части (3.12) C_1 и C_2 ограниченные, в силу теоремы 3.1, операторы, а моном порядка $m=1$ вновь удовлетворяет (3.10). Используя оценку (3.9) и тождество (3.12), получим по индукции утверждение.

Следствие 3.2. Если в (3.10) имеют место равенства, то моном (3.1) обратим в любом $\mathcal{B}_p^{\alpha\beta}$, $p\geq 1$.

Следствие 3.3. Имеет место вложение $\mathcal{B}_p^{\alpha\beta} \hookleftarrow \mathcal{J}_p^{\alpha\beta}$.
Действительно, пусть $\varphi\in L_p$, $\psi = \mathcal{J}_\alpha \mathcal{K}_\beta \varphi$.
Тогда

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}_p^{\alpha\beta}} = \left\{ \|\mathcal{J}_{-\alpha}\psi\|^p_{L_p} + \|\mathcal{K}_{-\beta}\psi\|^p_{L_p} \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{ \left(\|\mathcal{K}_\beta\|_{L_p\to L_p} \|\psi\|_{\mathcal{B}_p^{\alpha\beta}} \right)^p + \left(\|\mathcal{K}_{-\beta}\mathcal{J}_\alpha\mathcal{K}_\beta\|_{L_p\to L_p} \|\psi\|_{\mathcal{B}_p^{\alpha\beta}} \right)^p \right\}^{1/p} \leq C\|\psi\|_{\mathcal{B}_p^{\alpha\beta}}.$$

Следствие 3.4. Если оба неравенства (3.10) строгие, то моном (3.1) вполне непрерывен.
Действительно, пусть $\alpha_0 = \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}\alpha_j$, $\beta_0 = \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}\beta_j$, тогда моном $\mathcal{J}_{-\alpha_0}\mathcal{K}_{-\beta_0}\prod_{j=1}^m \mathcal{J}_{\alpha_j}\mathcal{K}_{\beta_j}$ ограничен. Поэтому моном $\prod_{j=1}^m \mathcal{J}_{\alpha_j}\mathcal{K}_{\beta_j} = \mathcal{J}_{\alpha_0}\mathcal{K}_{\beta_0}\cdot C$ вполне непрерывен в силу следствия 3.3.

Следствие 3.5. Имеет место вложение $\mathcal{B}_p^{\alpha\beta} \hookleftarrow \mathcal{B}_p^{\alpha_1\beta_1}$ при $\alpha_1\leq\alpha$, $\beta_1\leq\beta$.
Если оба неравенства строгие, то вложение компактно.

Следствие 3.6. Имеет место вложение $\mathcal{L}_p^{\alpha\beta} \hookleftarrow \mathcal{B}_p^{\alpha u,\beta(1-u)}$, $\alpha,\beta>0$, $u\in[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\varphi,\psi\in\mathcal{D}$ и M – достаточно большое число. Рассмотрим голоморфную в окрестности полосы $\{w, \operatorname{Re}w\in[0,1]\}$ функцию $f(w) = (2+w)^{-M}(\mathcal{J}_{-\alpha w}K_{-\beta(1-w)}\varphi,\psi)$. С помощью оценки (3.11) и теоремы о трех прямых получаем неравенство

$$|f(w)|\leq C\|\psi\|_{L_q}\|\mathcal{J}_{-\alpha}\varphi\|^u_{L_p}\|K_{-\beta}\varphi\|^{1-u}_{L_p}.$$

Так как $\mathcal{D}$ плотно в L_q, то отсюда следует нужное вложение.

3.6. В случае $p=2$ моном $\mathcal{J}_\alpha\mathcal{K}_{2\beta}\mathcal{J}_\alpha$ при $\alpha,\beta>0$ определяет самосопряженный вполне непрерывный оператор, у которого 0 не является собственным значением. Это позволяет построить для любых комплексных w оператор $B_1(w)=(J_\alpha \mathcal{K}_{2\beta} J_\alpha)^w$ с плотной областью определения.

3.7. Рассмотрим выражение

$$B(w)=B_1(w)J_{-\alpha w}\mathcal{K}_{-2\beta w}J_{-\alpha w}. \tag{3.13}$$

Теорема 3.2. Выражение (3.13) определяет целую оператор-функцию w в $L_2(R^n)$.

Доказательство. Для любой $\psi\in\mathfrak{D}$ вектор-функции

$$\psi(w)=B(w)\psi \tag{3.14}$$

голоморфна в любой полосе Π_M, M – целое. Действительно,

$$\psi(w)=B_1(w+M)(J_\alpha\mathcal{K}_{2\beta}J_\alpha)^{-M}J_{-\alpha w}\mathcal{K}_{-2\beta w}J_{-\alpha w}J_{4M\alpha}\mathcal{K}_{4M\beta}\mathcal{K}_{-4M\beta}J_{-4M\alpha}\psi.$$

Очевидно, $\mathcal{K}_{-4M\beta}J_{-4M\alpha}\psi\in\mathfrak{D}$, а оператор-функция $B_1(w+M)$ голоморфна в Π_M. Так как M – целое, то по лемме 3.1

$$(J_\alpha\mathcal{K}_{2\beta}J_\alpha)^{-M}J_{-\alpha w}\mathcal{K}_{-2\beta w}J_{-\alpha w}J_{4M\alpha}\mathcal{K}_{4M\beta}=$$

$$=C(w)J_{2\alpha(M-w)}\mathcal{K}_{2\beta(M-w)}, \tag{3.15}$$

где $C(w)$ – целая оператор-функция. Поэтому выражение (3.15) определяет оператор-функцию, голоморфную в Π_M. При $w=\pm M+iv$ имеем, в силу следствия 3.1,

$$\|\psi(\pm M+iv)\|_{L_2}=\|(J_\alpha\mathcal{K}_{2\beta}J_\alpha)^{iv}(J_\alpha\mathcal{K}_{2\beta}J_\alpha)^{\pm M}J_{-\alpha(\pm M+iv)}\times$$

$$\times\mathcal{K}_{-2\beta(\pm M+iv)}J_{-\alpha(\pm M+iv)}\psi\|_{L_2}=\|C_\pm(w)J_{-2\alpha iv}\mathcal{K}_{-2\beta iv}\psi\|_{L_2}\leq$$

$$\leq A_1(1+|w|)^{M_1}\|\psi\|_{L_2},\quad M_1\geq 0. \tag{3.16}$$

Далее, для $\varphi\in\mathfrak{D}$ и $w\in\Pi_M$

$$|(B(w)\psi,\varphi)|=|(J_{-\alpha w}\mathcal{K}_{-2\beta w}J_{-\alpha w}\psi,\ B_1(w)\varphi)|\leq$$

$$\leq\|B_1(u)\varphi\|_{L_2}\cdot\|J_{-2\alpha u}\mathcal{K}_{-2\beta u}\psi\|_{L_2}A_2(1+|w|)^{M_2} \tag{3.17}$$

для некоторого $M_2 \geq 0$.
Оценки (3.16) и (3.17) позволяют применить к функции $f(w) = (M+1+w)^{-M_1}(\psi(w), \varphi)$ теорему о трех прямых, которая дает оценку

$$|f(w)| \leq C|M+1+w|^{M_1} \|\psi\|_{L_2} \|\varphi\|_{L_2}. \qquad (3.18)$$

В силу (3.18) оператор-функция $B(w)$ ограничена и голоморфна при $w \in \Pi_M$.
Теорема доказана.
3.8. Следствие 3 [illegible] любых вещественных τ, $(\mathcal{J}_\alpha \mathcal{K}_{2\beta} \mathcal{J}_\alpha)^{1/\tau} = C(\tau, \alpha, \beta) \mathcal{J}_{\alpha/\tau} \mathcal{K}_{2\beta/\tau} \mathcal{J}_{\alpha/\tau}$, где $C(\tau,\alpha,\beta)$ – ограниченный обратимый оператор.
Следствие [illegible] Пусть $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq 0$.

$$\alpha_\tau = \tau\alpha_1 + (1-\tau)\alpha_2, \ \beta_\tau = \tau\beta_1 + (1-\tau)\beta_2, \ \tau \geq 0.$$

Тогда семейство пространств $\mathcal{B}_2^{\alpha_\tau \beta_\tau}$ совпадает с частью гильбертовой шкалы пространств.
Действительно, рассмотрим оператор

$$I = \mathcal{J}_{-(\alpha_1-\alpha_2)/2} \cdot \mathcal{K}_{-(\beta_1-\beta_2)} \mathcal{J}_{-(\alpha_1-\alpha_2)/2}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{B}_2^{\alpha_2 \beta_2}$.
Этот оператор положителен и область его определения есть $\mathcal{B}_2^{\alpha_1 \beta_1}$. Рассмотрим шкалу пространств $H_\tau = \mathcal{D}(I^\tau)$. При $\tau > 0$ норма в H_τ эквивалентна по теореме 3.2. норме в $\mathcal{B}_2^{\alpha_\tau \beta_\tau}$.

§ 4. Классификация операторов в пространствах $\mathcal{B}_2^{\alpha\beta}$.

4.1. Пусть $A: \mathcal{B}_2^{\alpha_1 \beta_1} \longrightarrow \mathcal{B}_2^{\alpha_2 \beta_2}$ – линейный ограниченный оператор. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 < \beta_2$, то, используя теорему 3.1, можно представить оператор A в виде:

$$A = \mathcal{J}_\alpha \mathcal{K}_{2\beta} \mathcal{J}_\alpha C, \qquad (4.1)$$

где $\alpha=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$, $\beta=\frac{\beta_2-\beta_1}{2}$ и C – ограниченный оператор в $\mathcal{H}_2^{\alpha_1\beta_1}$. Отсюда следует, что оператор A вполне непрерывен в $\mathcal{H}_2^{\alpha_1\beta_1}$.

Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{H}_2^{\alpha_1\beta_1})$ – кольцо ограниченных в $\mathcal{H}_2^{\alpha_1\beta_1}$ операторов, а $\mathfrak{S}$ – есть некоторый идеал этого кольца. Тогда, если $J_\alpha K_{2\beta} J_\alpha\in\mathfrak{S}$, то и $A\in\mathfrak{S}$.

4.2. Рассмотрим подробнее оператор $J_\alpha K_{2\beta} J_\alpha$. Его собственные функции в L_p, $p\geq 1$ принадлежат $\mathfrak{D}$. Действительно, если $\varphi=1/\lambda\, J_\alpha K_{2\beta} J_\alpha\varphi$, то $\varphi=\lambda^{-n}(J_\alpha K_{2\beta} J_\alpha)^n\varphi$ при всех целых $n\geq 0$. Отсюда по теореме 3.1. заключаем, что $\varphi\in\mathfrak{D}$. Таким образом, спектры операторов, определяемых выражением $J_\alpha K_{2\beta} J_\alpha$ в пространствах $\mathcal{H}_p^{\alpha\beta}$ совпадают со спектром оператора $J_\alpha K_{2\beta} J_\alpha$ в L_p.

Так как собственные функции оператора $J_\alpha K_{2\beta} J_\alpha$ в L_p бесконечно дифференцируемы и быстро убывают на бесконечности, то спектр этих операторов не зависит также и от p.

4.3. Обозначим $\Lambda_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ число собственных значений оператора $J_{\alpha/2} K_\beta J_{\alpha/2}$ в $L_2(R^n)$, превосходящих $\varepsilon>0$.

Теорема 4.1. Имеет место асимптотическая формула: при $\varepsilon\to 0$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\begin{cases}0\left(\varepsilon^{-\max\left(\frac{n}{\alpha},\frac{n}{\beta}\right)}\right) & \text{при } \alpha\neq\beta\\ 0\left(\varepsilon^{-\frac{n}{\alpha}}|\ln\varepsilon|\right) & \text{при } \alpha=\beta\end{cases}\tag{4.2}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим в L_2 оператор $J_2 K_{2\beta} J_2=(1-\Delta)^{-1}K_{2\beta}(1-\Delta)^{-1}$, где Δ – оператор Лапласа. Изучим спектр его обратного оператора

$$T_0=(1-\Delta)(1+|x|^2)^\beta(1-\Delta)\tag{4.3}$$

Этот оператор является самосопряженным и совпадает с расширением по Фридрихсу дифференциального оператора, определенного соответствующим выражением на функциях из $\mathfrak{D}$. Существенная самосопряженность $\tilde{T}_0$ – сужения T_0 на $\mathfrak{D}$ следует из того, что $\tilde{T}_0$ положителен и отображает $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{D}$ и, следовательно, имеет плотно определенный обратный оператор, который может быть продолжен единственным образом до ограниченного самосопряженного оператора.

II. Пусть $1/2 < a < 1$, $m_1, \dots m_n$ – целые числа, $\omega_{m_1,\dots,m_n} = \{x \in R^n, m_i - a \le x_i \le m_i + a, i = 1,\dots,n\}$. Очевидно, $\bigcup\limits_{m_1,\dots,m_n} \omega_{m_1 \dots m_n} = R^n$. Определим для $k = 1,\dots,2^n$ множества $\Omega_k = \bigcup\limits_{\varkappa(m_i) = i(k)} \omega_{m_1 \dots m_n}$,

где $\varkappa(m_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_i \text{ – четное} \\ 1, & \text{если } m_i \text{ – нечетное,} \end{cases}$ а $i(k)$ есть коэффициент при 2^i в двоичном разложении k. Очевидно, $\bigcup\limits_k \Omega_k = R^n$. С другой стороны, каждая из Ω_k содержит только непересекающиеся области $\omega_{m_1,\dots,m_n}$, т.к. если $\omega_{m_1',\dots,m_n'}\, \omega_{m_1'',\dots,m_n''} \subset \Omega_k$, то $|m_i' - m_i''| \ge 2$, хотя бы для одного i, $1 \le i \le n$, или $\omega_{m_1',\dots,m_n'} = \omega_{m_1'',\dots,m_n''}$.

III. Имеет место следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. Пусть T_k есть расширение по Фридрихсу оператора, порожденного в $L_2(\Omega_k)$ дифференциальным выражением (4.3). Тогда

1) Оператор T_0^{-1} вполне непрерывен тогда и только тогда, когда вполне непрерывны операторы T_k, $k = 1,\dots,2^n$.

2) Имеет место оценка

$$C \max_{\Sigma m_L = i} \min_{k = 1,\dots,2^n} \mu_{m_L,k} \le \mu_{i0} \le \mu_{ik}, \tag{4.4}$$

где μ_{ik} – i-ое собственное значение оператора T_k. Доказательство этой леммы повторяет с незначительными изменениями доказательство леммы 1 работы [3].

IV. Для операторов T_k справедливы оценки

$$C_1 \hat{T}_k \le T_k \le C_2 \hat{T}_k, \tag{4.5}$$

где $\hat{T} = \sum\limits_{\omega_{m_1 \dots m_n} \subset \Omega_k} \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i^2\right)^{\beta} \chi(\omega_{m_1 \dots m_n})(1-\Delta)^2 \chi(\omega_{m_1 \dots m_n})$

$\chi(\omega)$ – характеристическая фукнция области ω, а C_1, C_2 – положительные числа. Оператор $\hat{T}_k$ есть прямая сумма операторов, порожденных дифференциальными выражениями

$$T_{m_1\dots m_n} = \left(1+\sum_{i=1}^{n} m_i^2\right)^{\beta} \chi(\omega_{m_1\dots,m_n})(1-\Delta)^2 \chi(\omega_{m_1\dots m_n})$$

и нулевыми граничными условиями на $\partial\omega_{m_1\dots m_n}$. Собственные значения оператора $(1-\Delta)^2$ в n-мерном кубе имеют асимптотику [4]

$$\nu_\ell = O\left((1+\ell^2)^{2/n}\right). \qquad (4.6)$$

Собственные значения оператора T_K имеют вид

$$\lambda_{m_1\dots m_n,\ell} = \left(1+\sum_{i=1}^{n} m_i^2\right)^{\beta} \nu_\ell \qquad (4.7)$$

где $m_1,\dots,m_n$, таковы, что $\omega_{m_1,\dots,m_n} \subset \Omega_K$. Обозначим $\hat{\mu}_{iK}$ элементы последовательности (4.7), пронумерованные индексом i в порядке возрастания. Пусть $\Lambda_K(N)$ число элементов последовательности (4.7), не превосходящих N. Нетрудно видеть, что

$$\Lambda_K(N) = O\left(\int\limits_{(1+|x|^2)^{\beta}(1+y^2)^{2/n} \le N} dx_1\dots dx_n\, dy\right) = \begin{cases} O\left(N^{\max\left(\frac{n}{4},\frac{n}{2\beta}\right)}\right), & \beta\ne 2 \\ O\left(N^{n/4}\ln N\right), & \beta=2 \end{cases} \qquad (4.8)$$

Из вариационного принципа и неравенства (4.4), (4.5) следует, что $\mu_{i0} = O(\hat{\mu}_{iK})$. Применяя теперь следствие 3.7, получаем утверждение теоремы.

4.4. Замечание. Рассмотрим оператор вида

$$\mathcal{J}_{\alpha/2} \prod_{j=1}^{m} \left(1+\sum_{i=\hat{n}_{j-1}+1}^{\hat{n}_j} x_i^2\right)^{\beta_j/2} \mathcal{J}_{\alpha/2}. \qquad (4.9)$$

Здесь $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$, n – размерность пространства, $\hat{n}_j = \sum_{i=1}^{j} n_i$, x_i – декартовы координаты вектора n-мерного пространства. Для оператора (4.12) с помощью рассуждений, аналогичным приведенным выше, можно получить асимптотическую оценку

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-\max\left(\frac{n}{\alpha}, \frac{n_j}{\beta_j}\right)-\delta}\right), \delta > 0 \tag{4.10}$$

причем, если минимум достигается только на одном из чисел $\frac{n}{\alpha}$, $\frac{n_j}{\beta_j}$, то можно положить $\delta = 0$.

4.5. Для оператора $(\mathcal{I}_{-\alpha} + \mathcal{I}_{-\beta})^{-1}$, $\alpha, \beta > 0$ также можно получить асимптотику собственных значений. Это позволяет оценивать асимптотику собственных и сингулярных чисел операторов в L_2, являющихся ограниченными операторами из L_2 в $\mathcal{L}_2^{\alpha,\beta}$.

Лемма 4.2. Для числа собственных значений оператора $(\mathcal{I}_{-\alpha}+\mathcal{I}_{-\beta})^{-1}$ в L_2, превосходящих ε, справедлива оценка (при $\max(\alpha,\beta) \geq 2$)

$$M_{\alpha\beta}(\varepsilon) \leq C\,\varepsilon^{-\frac{n(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Для определенности предположим, что $\alpha \geq 2$. Тогда

$$\begin{gathered} \mathcal{I}_{-\alpha} + \mathcal{K}_{-\beta} \geq \mathcal{I}_{-\alpha} \\ \mathcal{I}_{-\alpha} + \mathcal{I}_{-\beta} \geq \mathcal{K}_{-\beta}. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Отсюда по неравенству Гайнца получим для $\tau \leq 1$

$$2(\mathcal{I}_{-\alpha} + \mathcal{K}_{-\beta})^{\tau} \geq \mathcal{K}_{-\beta\tau} + \mathcal{I}_{-\alpha\tau}. \tag{4.13}$$

Выберем $\tau = \frac{2}{\alpha}$, тогда

$$\mathcal{I}_{-\alpha\tau} + \mathcal{K}_{-\beta\tau} = (-\Delta + 1) + (1 + |x|^2)^{\beta/\alpha} \tag{4.14}$$

Для получения асимптотики собственных чисел огератора (4.14) можно применить лемму 4.1 и, посторив проводившиеся там рассуждения, получить (4.11), сведя задачу к оценке интеграла

$$I = \int\limits_{x^{2/n} + y^{2\beta\alpha} \leq \varepsilon^{-1}} y^{n-1}\,dx\,dy.$$

Лемма доказана.

Если $\max(\alpha,\beta)<2$, то несколько более грубую оценку асимптотики спектра оператора (4.14) можно получить с помощью следствия 3.6. Действительно, из вложения $\mathcal{L}_2^{\alpha/2,\beta/2} \hookleftarrow \mathcal{B}_2^{\alpha u/2,\,\beta(1-u)/2}$ при $u=\beta/(\alpha+\beta)$ получаем неравенство

$$\mathcal{J}_{-\alpha}+K_{-\beta} \geq C\cdot \mathcal{J}_{-\xi/2}\, K_{-\xi}\, \mathcal{J}_{-\xi/2},$$

где $\xi=\alpha\beta/(\alpha+\beta)$. Отсюда следует оценка

$$M_{\alpha\beta}(\varepsilon)\leq \Lambda_{\xi\xi}(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-n/\xi}|\ln\varepsilon|)=O(\varepsilon^{-n\alpha\beta/(\alpha+\beta)}|\ln\varepsilon|);$$

которая отличается от (4.11) множителем $|\ln\varepsilon|$.

§ 5. Асимптотика S' -чисел некоторых интегральных операторов

В этом параграфе мы приведем две теоремы, показывающие, как результаты § 3,4 можно применить к изучению спектров интегральных и псевдодифференциальных операторов в $L_2(R^n)$.

5.1. Пусть Q – интегральный оператор в L_2 с ядром $q(x,\xi)$.

Теорема 5.1. Пусть $\alpha,\beta>0, \alpha\neq\beta$, $\ell=1,2$, $q(x,\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$ и $N(\varepsilon)$ – число S – чисел оператора Q , больших $\varepsilon>0$.

1) Если

$$q(x,\xi)=(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\int G_\beta(x-x')\,q_1(x',\xi)\,dx',$$

где $q_1(x',\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$, то

$$N(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-(1/\ell+n\cdot\max(1/\alpha,\,1/\beta))}),\ \varepsilon\to 0.$$

2) Если

$$q(x,\xi)=\int G_\beta(x-x')\,q_1(x',\xi)\,dx'$$

где $q_1(x,\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$ и $(1+|x|^2)^{\alpha/2}q_\ell(x,\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$, то

$$N(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-(\ell^{-1}+n(\alpha+\beta)/\alpha\beta+\delta)}),\ \varepsilon\to 0,\ \delta>0.$$

Если при этом $\max(\alpha,\beta)>2$, то можно принять $\delta=0$.

Доказательство этой теоремы следует непосредственно из оценок асимптотики S -чисел операторов $P_{\alpha\beta}$ и $O_{\alpha\beta}$, приведенных в § 3,4 и рассуждений, аналогичных использованным в [5] (гл. Ш, § 10).

5.2. Пусть теперь Q – псевдодифференциальный оператор с символом $q(x,\xi)$, т.е.,

$$(Q\varphi)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int q(x,\xi)e^{i<x,\xi>}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi,$$

где $\hat{\varphi}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i<x,\xi>}\varphi(x)\,dx$ – преобразование Фурье $\varphi(x)$.

Теорема 5.2. Пусть $\alpha,\beta>0, \alpha=\beta$, $\ell=1,2, q(x,\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$ и $N(\varepsilon)$ – число s – чисел оператора Q, больших $\varepsilon>0$.

1) Если

$$q(x,\xi)=(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\int G_\beta(x-x')q_1(x',\xi)\,dx'$$

и

$$q(x,\xi)=(1+|x|^2)^{-\alpha/2}(1+|\xi|^2)^{-\beta/2}q_2(x,\xi),$$

где $q_{1,2}(x,\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$, то

$$N(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-(\ell^{-1}+n\cdot\max(\alpha^{-1},\beta^{-1})}),\ \varepsilon\to 0.$$

2) Если

$$q(x,\xi)=\int G_\beta(x-x')q_1(x',\xi)\,dx',$$

где $q_1(x,\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$ и $(1+|x|^2)^{\alpha/2}q(x,\xi)$, $(1+(\xi)^2)^{\beta/2}q(x,\xi)\in L_\ell(R^n\times R^n)$, то

$$N(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-(\ell^{-1}+n(\alpha+\beta)/\alpha\beta+\delta}),\ \varepsilon\to 0,\ \delta>0.$$

Если при этом $\max(\alpha,\beta)\geq 2$, то можно принять $\delta=0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что в условиях теоремы оператор $Q=J_\beta Q_2$, где Q_2 – оператор Гильберта–Шмидта при $\ell=2$ или ядерный при $\ell=1$.

Пусть $\beta = 2k$, $k > 0$ – целое число. Тогда

$$(\mathcal{J}_{-2k} Q \varphi)(x) = (1-\Delta)^k (2\pi)^{n/2} \int q(x,\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{\varphi}(\xi) d\xi =$$
$$= \sum_{|s|\le 2k} \sum_{m \le s} C_{sm} \int \mathcal{D}_x^m q(x,\xi)(i\xi)^{s-m} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi .$$

Здесь s , m – целочисленные неотрицательные векторы длины n , $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $\mathcal{D}_x^m = \partial^{m_1}/\partial x_1^{m} \dots \partial^{m_n}/\partial x_n^{m_n}$, $(i\xi)^m = i^{|m|} \xi_1^{m_1}, \dots, \xi_n^{m_n}$. Применяя теорему о трех прямых к голоморфной оператор-функции

$$\mathcal{J}_{-\chi}(x)\, q(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{(|s|-\chi)/2}$$

получаем оценку

$$\|\mathcal{D}_x^m q(x,\xi)(i\xi)^{s-m}\|_{L_\ell(R^n \times R^n)} \le \|\mathcal{J}_{-|m|} q(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{|s|-|m|}{2}}\|_{L_\ell(R^n \times R^n)} \le$$
$$\le \|\mathcal{J}_{-|s|} q(x,\xi)\|_{L_\ell(R^n \times R^n)} + \|(1+|\xi|^2)^{s/2} q(x,\xi)\|_{L_\ell(R^n \times R^n)} ,$$

которая доказывает теорему при $\beta = 2k$ +). В общем случае следует применить теорему о трех прямых к вектор-функции

$$\mathcal{J}_{-\alpha+\chi}\, q(x,\xi)(1+|\xi|^2)^{\chi/2}$$

Теорема доказана.

Таким образом, результаты § 3,4 позволяют уточнять асимптотику s –чисел операторов указанного типа при наложении ограничений на гладкость и поведение в бесконечности их ядер или символов.

+) Несложными вычислениями можно показать, что если $q(x,\xi) \in L_\ell(R^n \times R^n)$ то соответствующий оператор Q является ядерным при $\ell = 1$ и Гильберта–Шмидта при $\ell = 2$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С.М.Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1969.
2. С.Л.Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. МГУ, 1950 г.
3. М. Отелбаев, О природе спектра одномерных дифференциальных операторов, Вестник МГУ, Сер. Математика, Механика, 15 (1972), стр.59-66.
4. В.И.Параска, Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость, Мат. сборник, Т. 68 (110) № 4, 623-631.
5. И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Наука, М., 1965.
6. Псевдодифференциальные операторы, Сб. статей, Мир, М., 1967.
7. Kumano-go H., Remarks on pseudo-differential operators, J.Math.Soc.Japan., 2I, n.3 (I969) 4I3-439.
8. В. Грушин, Псевдодифференциальные операторы в L_p с ограниченными символами, Функциональный анализ и его приложения, 4 (1970), 37-50.
9. Fefferman C., Israel J.of.Math., v.I4, n.4 (I973), 4I3-4I7.