

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР
Ордена Трудового Красного Знамени
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Препринт № 61

КВАЗИЭЛЕКТРОСТАТИКА ИСТОЧНИКОВ
В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

А. Андронов, Ю. Чугунов

Горький - 1974 г.

Мы обсудим основные представления теории квазистационарных электрических полей источников (антенн, зондов) в разреженной (бесстолкновительной) плазме. Из-за наличия у плазмы резонансных свойств соответствующие структуры полей и возникающие математические проблемы оказываются весьма любопытными. Результаты проведенного анализа представляют, как нам кажется, достаточно широкий интерес⁺).

1. Впервые полное исследование структуры плоского переменного электрического поля в плазме было проведено Ландау во второй части его известной работы [5]. Он рассмотрел поле E заряженной плоскости в однородной изотропной плазме. Вблизи плазменного резонанса ($\omega \approx \omega_p$) это поле

$$E = 4\pi\sigma \frac{1 - e^{-iK_p z}}{\epsilon} \quad (1)$$

$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$, $K_p = \sqrt{3\epsilon} / r_0$ - волновое число плазменных волн, r_0 - дебаевский радиус, σ - заряд на 1 см^2 плоскости, z - расстояние от нее. Таким образом при $\omega \rightarrow \omega_p$ $E \rightarrow \infty$ при всех z . Оказывается, однако, что при отказе от идеализаций и условий, рассмотренных Ландау (неоднородные поля, неоднородная или анизотропная плазма) сингулярность в электрическом поле пропадает.

Однако поведение электрического поля источников на частотах, при которых возможно возбуждение собственных продольных колебаний, обычно оказывается весьма своеобраз-

⁺) Сравнение излагаемой ниже теории с экспериментом можно найти в [1]. Отметим также, что похожие квазиэлектростатические задачи обсуждались в связи с теорией взаимодействия волн в неоднородной плазме (см., например [2, 3]) и теорией взаимодействия электромагнитных полей с ограниченной плазмой (см., например, [4]).

разным; электрическое поле или вообще не убывает при удалении от источника или убывает значительно слабее, чем в вакууме. Такое поведение полей источников можно считать основным резонансным свойством.

2. Рассмотрим, например, случай, обсуждавшийся Ландау (однородная изотропная плазма), отказавшись от одномерной идеализации. При $\omega = \omega_p$ нетрудно найти потенциал φ_0 точечного источника для $r \rightarrow r_0$ [8] (ср. [7, 8])

$$\varphi_0 = \frac{1 - e^{-ik_p r}}{\epsilon r} \quad (2a)$$

При $\omega \rightarrow \omega_p$

$$\varphi_0 = \frac{i k_p}{\epsilon} + \frac{r}{6 r_0^2}; \quad (2b)$$

т.е. электрическое поле радиально и постоянно по величине: $E = -1/6 r_0^2$. Это приводит к ряду особенностей в свойствах источников: заряд диполя концентрируется к его зазору (рис. 1), а его импеданс зависит также лишь от величины зазора [9] и др. Удивительное резонансное поведение! Впрочем, рассматриваемая ситуация (однородная плазма) весьма идеальна.

3. Если источник "большой" — размеры велики по сравнению с параметром пространственной дисперсии, то можно получить достаточно полное описание, если вообще пренебречь пространственной дисперсией. Уравнение для потенциала φ в этом случае — уравнение типа Пуассона.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\epsilon_{ij}(\vec{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (3)$$

В интересующем нас случае компоненты тензора ϵ_{ij} могут обращаться в нуль; для однозначности решения уравнения (3) здесь необходимо учитывать антиэрмитову часть тензора ϵ_{ij} — т.е. по- существу, учитывать столкновения ν . Поэтому бесстолкновительные решения уравнения (3) — это предельные при $\nu \rightarrow 0$ решения. Простейшие примеры, которые можно таким путем рассмотреть — это сфера в радиально-неоднородной изотропной плазме и сфера в однородной анизотропной плазме.

Взяв в первом случае $\epsilon(r) = \epsilon_{\infty} + \frac{q^2}{4r^2}$, q - радиус сферы (это соответствует неоднородности плазмы, обусловленной оседанием [10]) получим $E = E_r \sim 1/(\epsilon_{\infty} r^2 + \frac{q^2}{4})$ и опять при $\epsilon_{\infty} = 0$ $E = \text{const}$ при всех r ! При $\epsilon_{\infty} < 0$ E может обращаться в нуль. В этом случае в рассматриваемом приближении $E = \infty$ $\nu = 0$, а импеданс имеет (при $\nu \rightarrow 0$) конечную действительную часть, обусловленную конечной величиной диссипации в окрестности поверхности $\epsilon = 0$ при $\nu \rightarrow 0$ (ср. [11,4]). В общем случае в изотропной плазме возможный вид поверхностей $\epsilon = 0$ показан на рис. 2. Рассмотрение целого ряда задач (дипольное поле в среде с $\epsilon = \epsilon_{\infty} + \frac{q^2}{4r^2}$, точечный заряд в "линейном" слое, потенциал в среде с диэлектрической проницаемостью, зависящей от угла цилиндрической системы координат и др.) показывает, что наличие поверхности $\epsilon = 0$ приводит (при $\nu \rightarrow 0$) к особенности поля на этой поверхности и отличной от нуля диссипации в ее окрестности. Естественно считать, что это должно быть справедливо и в общем случае*). Если это так, то область частот, где $\epsilon = 0$, - это область, где действительно часть импеданса ζ отлична от нуля; частоты, где поверхность $\epsilon = 0$ уходит в бесконечность или "влезает" в источник (случай В на рис. 2) - это те частоты, где $\text{Re} \zeta \rightarrow 0$. Таким образом "холодное" приближение позволяет полностью описать импедансные характеристики источников в изотропной плазме при учете ее неоднородности.

Ясно, что то же самое должно быть справедливо и в магнитоактивной плазме, где имеется "дополнительная размазка" резонанса анизотропией, так что уже однородное приближение часто годится для расчета импеданса. Действительно, рассмотрим потенциал сферы в однородной магнитоактивной плазме при $\epsilon_1, \epsilon_3 < 0$, ϵ_2 , ϵ_3 - компоненты тензора "холодной" диэлектрической проницаемости. В этом случае в плазме существуют собственные продольные

*) Известным исключением из этого правила является случай, когда линии $\epsilon = \text{const}$ совпадают с силовыми линиями электрического поля в вакууме и, следовательно, не изменяются и в среде с $\epsilon(r)$ - т.е. не имеют особенностей при $\epsilon = 0$. Мы считаем, что этот случай является неглубоким по отношению к искажениям ϵ .

колебания, а уравнение для потенциала оказывается уравнением гиперболическим ($\vec{x}_0 \parallel \vec{H}$, \vec{H} — постоянное магнитное поле):

$$|\varepsilon_1| \Delta_{\perp} \varphi - |\varepsilon_3| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \varphi = 0. \quad (4)$$

Потенциал сферы можно найти используя (при $\nu \rightarrow 0$) замену $\tilde{x}' = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3} \tilde{x}$ (которая превращает уравнение для потенциала в уравнение Пуассона — см [12,13]) и известное решение задачи о металлическом эллипсоиде в вакууме, если, кроме того, потребовать, чтобы при $r \rightarrow \infty$ потенциал сферы был близок к потенциалу точечного заряда q при $\varepsilon_1, \varepsilon_3 < 0$ [14,15] ($\mu^2 = |\varepsilon_1/\varepsilon_3|$):

$$\varphi_q = \frac{\text{sign } \varepsilon_1 q}{\sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (\mu^2 \tilde{x}^2 - r_1^2)^{1/2}}}, \quad \mu \tilde{x} > r_1; \quad \varphi_q = -\frac{i q}{\sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (r_1^2 - \mu^2 \tilde{x}^2)^{1/2}}}, \quad \mu \tilde{x} < r_1 \quad (5)$$

Для потенциала сферы получим [15]

$$\varphi_s = \frac{q}{a [|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (\mu^2 + 1)]^{1/2}} \left[\text{sign } \varepsilon_1 \text{Arth} \sqrt{\frac{\mu^2 a^2 - \xi^2}{a^2 (\mu^2 + 1)}} + i \frac{\pi}{2} \right], \quad (6)$$

$$r_1^2 / (\xi + a^2) - \mu^2 \tilde{x}^2 / (\xi - \mu^2 a^2) = 1,$$

а для ее импеданса

$$\tilde{z} = \frac{1}{\omega a [|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (\mu^2 + 1)]^{1/2}} \left[\frac{\pi}{2} + i \text{sign } \varepsilon_1 \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}) \right]. \quad (7)$$

Области пространства, где необходимо использовать разные ветви Arth показаны на рис.3. Границами ветвей являются характеристики уравнения (5), касающиеся сферы. В областях (II, IV) при $r \rightarrow \infty$ $\varphi_s \sim \varphi_q$; в то же время в областях (III) $\varphi_s \sim 1/\sqrt{r}$ при $r \rightarrow \infty$ т.е. спадает медленнее, чем в вакууме. Как можно показать, последнее и приводит к $\text{Re } \tilde{z} \neq 0$ при $\nu \rightarrow 0$.

Пусть теперь еще $\varepsilon_1 = 0$ (похожая ситуация возникает и при $\varepsilon_3 = 0$). В этом случае уравнение (4) вырождается в квазиодномерное

$$\partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0 \quad (8)$$

и здесь оказывается возможным, по-существу, определить распределение потенциала любого источника [16]. Электрическое поле для одного источника при $\varepsilon_1 = 0$ показано на рис. 4. Опять достаточно далеко от частей источника электрическое поле постоянно! Для источников более сложной геометрии, при наличии неоднородности плазмы, особенности в поведении потенциала оказываются еще более разнообразными. Здесь неоднородность может приводить к смене типа уравнения (3) (эллиптического в гиперболическое или наоборот). В последнем случае важную роль играют, как это впервые было отмечено Пилией и Федоровым [17], особые точки характеристик (фокус, узел и седло), расположенные на параболической границе. Фокус и узел являются точками стока характеристик — т.е. по-существу, местом, где по-видимому должны поглощаться возбужденные источником плазменные колебания⁺⁾ . Вне особых точек, как показывает исследование задач с плоской геометрией [3, 17, 19], характеристики отражаются от параболической границы и в ее окрестности при $\nu \rightarrow 0$ отсутствует диссипация, а источник, находящийся в эллиптической области, возбуждает плазменные колебания. Характеристики отражаются от поверхности источников. Стоком характеристик могут быть и их асимптоты, — например, сепаратрисы седел (ср. [3, 17, 19]). Все эти обстоятельства позволяют считать, что наличие области гиперболическости само по себе есть причина $\operatorname{Re} z \neq 0$ при $\nu \rightarrow 0$ у источника (подобно тому, как в изотропной плазме для $\operatorname{Re} z \neq 0$ нужно наличие поверхности $\varepsilon = 0$). Отличная от нуля диссипация и $\operatorname{Re} z \neq 0$ здесь возникают, как можно заключить из приведенных аргументов, из-за ухода возбужденных источником плазменных колебаний на бесконечность по характеристикам, проходящим через источник (ср. случай однородной плазмы), или из-за группировки характеристик в узел или фокус. Подобная ситуация иллюстрируется рис. 5, где показаны характеристики точечного заряда, находящегося в гиперболической области.

⁺⁾ Фокус, как сток плазменных колебаний, был недавно рассмотрен Пилией и Федоровым [18].

Таким образом, "холодное" приближение при учете неоднородности видимо всегда достаточно для нахождения импеданса в резонансных условиях.

4. "Холодное" приближение не описывает поле и потенциал вблизи "холодных" особенностей; для их нахождения необходимо "навесить" пространственную дисперсию. В настоящее время это сделано в плоскостной плазме (см., например, [2, 3]), в изотропной плазме, когда пространственная дисперсия определяется оседанием частиц [20] и в однородной магнитоактивной плазме [21]. Два последних случая мы и обсудим: первый достаточно хорошо известен (см. [2, 3]).

Роль пространственной дисперсии при оседании легко может быть рассмотрена для случая поглощающего сферического зонда в изотропной плазме [20]. В силу сферической симметрии электрическое поле имеет одну лишь радиальную компоненту E , а из-за оседания в связи электрической индукции D с E присутствует и член с производной первого порядка. С точностью до этого члена эта связь может быть найдена разложением линеаризованного кинетического уравнения по параметру $V_T/\omega r \ll 1$, V_T - тепловая скорость электронов:

$$D = \varepsilon(r)E + i \frac{V_T}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\varepsilon} \omega^2} \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial E}{\partial r} \quad (9)$$

Используя эту связь легко найти распределение электрического поля и потенциал. Оказывается, что при наличии плазменного резонанса, при $\varepsilon < 0$, электрическое поле - это "холодное" поле, а при $\varepsilon > 0$ - это поле плазменной волны, бегущей к зонду и поглощающейся на нем вместе с частицами. С возбуждением этой плазменной волны и связано в этом случае сопротивление зонда, причем в нулевом приближении по параметру $V_T/\omega a$, a - радиус зонда, это сопротивление совпадает с тем, которое получается в "холодном" приближении при $\nu \rightarrow 0$. Независимость импедансно-подобных свойств от величины и типа диссипации в резонансных условиях хорошо известна [11, 22, 2, 3]. Рассмотренный пример демонстрирует это и для связи (9). Вне резонансных условий связь (9) позволяет найти действительную поправку

($\sim V_T / \omega a$) к чисто реактивному "холодному" импедансу зонда. В этом случае нетрудно также найти шумы зонда, определяемые также лишь оседающими частицами.

Для магнитоактивной плазмы нетрудно найти выражение для потенциала ψ_q^H точечного заряда с учетом пространственной дисперсии и, если плазма однородна [21]. Наибольший интерес представляет окрестность направлений, где "холодный" потенциал сингулярен. Используя Фурье-представление и метод перевала нетрудно получить

$$\psi_q^H = q \cdot i \left(\frac{2}{\pi |\epsilon_1 \epsilon_3| r_T} \right)^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \mu \Gamma z \right)^{1/6}} \int_0^{\infty} e^{i p t^2 - i t^2} dt, \quad (10)$$

где

$$p = \Delta / \left(\frac{1}{2} \mu \Gamma r_0^2 z \right)^{1/3}, \quad \Delta = r_1 - \mu z,$$

а выражение для Γ см. 21.

При $|p| \gg 1$ будем иметь

$$\psi_q^H = \begin{cases} i a / (2 |\epsilon_1 \epsilon_3| \Delta r_1)^{1/2} \times [1 - \exp\{-i \left(\frac{2|p|}{3} \right)^{3/2} / \sqrt{2} r_0\}], & p > 0 \\ q / (2 |\epsilon_1 \epsilon_3| \Delta r_1)^{1/2} \times [1 - \exp\{-i \left(\frac{2|p|}{3} \right)^{3/2} \}] & \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, пространственная дисперсия устраняет особенности (при $r \neq 0$) в потенциале ψ_q^H . Значение потенциала "больших" источников вблизи "холодных" особенностей можно найти, если вычислить потенциал источника по "холодному" распределению заряда, используя (10, 11). Такой расчет дает, в частности, что в нулевом приближении по параметру r_0/a импеданс шара совпадает с "холодным" значением (7).

Итак, для "больших" источников уточнение описания плазмы - переход от "холодного" описания при $\nu \rightarrow 0$ к описанию с учетом пространственной дисперсии - не меняет импеданса "больших" источников. Это показывает ценность "хо-

лодного" описания (которое, конечно, проще описания с пространственной дисперсией) и указывает на необходимость развития методов анализа (в частности, численных) граничных задач уравнения (3).

5. При сильной пространственной дисперсии - что имеет место не для "больших" источников или для "больших" в случае необходимости учета эффектов в дебаевском слое на их поверхности (ср. [23]) - важную роль начинают играть эффекты затухания Ландау, приводящие к $\text{Re } \tilde{\epsilon} \neq 0$ и в отсутствие возбуждения плазменных колебаний и оседания частиц. Эти эффекты могут быть связаны как с антифизическими (пролетными) частицами [10, 13], так и с финитными частицами - частицами, захваченными статической потенциальной ямой источника (ср. [10]). Вклад первых в импеданс и шумы источников в ряде случаев может быть учтен для "малых" источников с помощью известных выражений для тензора диэлектрической проницаемости и корреляционной функции микротоков однородной плазмы [24, 25, 26] или (для "больших" источников) с помощью пришивки численного исследования одномерных явлений в дебаевском слое [23].. Наиболее интересный, на наш взгляд, эффект здесь - это смена знака $\text{Re } \tilde{\epsilon}$ для движущихся источников [24, 25, 27, 28]. Подобные эффекты хорошо известны в электронике. В "холодной" изотропной однородной плазме при $\omega_p \rightarrow 0$ движение приводит к тому, что $\text{Re } \tilde{\epsilon} \sim \frac{\partial}{\partial k_x} |E_{kz}|^2$, $k_x = \frac{\omega}{V_0}$ [25] (ср. [29, 30]), $|E_{kz}|^2$ - квадрат модуля пространственного спектра Фурье электрического поля источника, $V_0 \uparrow \tilde{\epsilon}_0$ - скорость источника. Величина $\frac{\partial}{\partial k_x} |E_{kz}|^2$ играет в этом случае роль производной от функции распределения в затухании монохроматических плазменных колебаний[†]). При произвольной ω_p возникновение $\text{Re } \tilde{\epsilon} < 0$ при движении в однородной изотропной плазме можно интерпретировать, как результат преобладающего излучения источников плазменных волн в области аномальных доплеровских частот. В отличие от точечных источников (ср. [32]) для распределения источников соответствующие условия могут быть легко выполнены подбором геометрии источника. Рассмотрение влияния тепловых скоростей частиц на возможность $\text{Re } \tilde{\epsilon} < 0$ показывает [25, 27],

[†]) Роль производной от спектра поля недавно была переоткрыта Рудаковым при исследовании взаимодействия ленгмювских солитонов с пучком [31].

[28], что $\operatorname{Re} \chi < 0$ в некоторых случаях (особенно при движении поперек статического магнитного поля) может возникнуть и при $V_0 \ll V_T$, V_T — тепловая скорость электронов.

Что же касается роли финитных частиц, то расчеты их вклада в ВЧ характеристики источников в настоящее время отсутствуют. В то же время финитные частицы — нелинейные (неустойчивые) осцилляторы при определенной функции распределения могут давать отрицательный вклад в диссипацию электрического поля (см., например, [30]). Более того, как отметил А.В.Гапонов, финитные частицы могли бы приводить и к неустойчивости возмущенной области у источника.

Итак, исследование свойств уравнения "холодного" приближения в резонансных условиях, в том числе численными методами, увеличение случаев "навешивания" пространственной дисперсии на "холодные" решения и учет влияния "финитных" частиц — основные проблемы, требующие рассмотрения.

С удовольствием пользуемся возможностью отметить, что первая работа одного из авторов (совместно с Г.В.Городинским) в обсуждаемой области была выполнена по предложению В.Л.Гинзбурга. Нам хотелось бы также отметить влияние, оказанное на вышеизложенное В.Б.Гильденбургом и его работами и поблагодарить В.В.Железнякова за поддержку настоящей работы.

В. Голанц, А. Пилип УФН 109, 418 (1971)

ЛИТЕРАТУРА

1. M.P. Bachynski, RCA Rev., 28 (I), III (1967); T.R. Kaiser, J.K.E. Tunaley, Space Sci. Rev., 8 (I), 32 (1968); Plasma Waves in Space and in the Laboratory, Thomas J.Q. and Landmark B.J. and N.Y. Elsevier, vol. I (1969); vol. 2 (1970); K.G. Balmain, Radio Sci., 7 (8-9), 771 (1972).
2. Н.С. Ерохин, С.С. Моисеев, Вопросы теории плазмы, под ред. М.А. Леонтовича, т. 7, 146, Атомиздат, М., (1973).
3. В.Г. Гильденбург, Ю.М. Жидко, И.Г. Кондратьев, М.А. Миллер, Известия ВУЗов, "Радиофизика", X, 9-10, 1358 (1967).
4. Л.Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
5. А.А. Андронов, Г.В. Городинский, Известия ВУЗов, "Радиофизика", 5, 254 (1963).
6. М.Л. Левин, Известия ВУЗов, "Радиофизика", УП, 180 (1934).
7. B. Rooy, M. Feix et L.R.O. Storey Plasma Phys., 14, 275 (1972).
8. А.А. Андронов, В.Я. Эйрман, ЖТФ, 39, 365 (1969).
9. А.Л. Альперт, А.В. Гуревич, А.П. Питаевский, "Искусственные спутники в разряженной плазме", Наука, М., (1964).
10. N. Herlofson, Ark. Fys., 3, 247 (1951); T.R. Kaiser, R.L. Closs, Phyl. Mag., 43, I (1952).

- 12 Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФИЛ, М., (1959).
- 13 T.R.Kaiser, Planet.Space Sci., 9, 639 (1962).
- 14 E.Arbel, Felseu in Electromagnetic Theory and Antennas, Proc.Symp.Copenhagen (1962) p.421, Pergamon Press (1963).
- 15 Ю.В.Чугунов, Известия ВУЗов, "Радиофизика", XI, 50 (1968).
- 16 Ю.В.Чугунов, Радиотехника и электроника, XV1, 388 (1971).
- 17 А.Д.Пилия, В.И.Федоров, ЖЭТФ, 60, 389 (1971).
- 18 А.Д.Пилия, В.И.Федоров, (частное сообщение).
- 19 А.А.Андронов, Ю.В.Чугунов, УФН, в печати.
- 20 А.А.Andronov, Proc. 10th Inter.Conference Phen.in Ion Gase Oxford (1971).
- 21 R.K.Fisher, R.W.Could, Phys.Lett., 31A, N 5, 235 (1970);
Ю.В.Чугунов, Известия ВУЗов, "Радиофизика", XIX (1), 44 (1971).
- 22 В.Б.Гильденбург, ЖЭТФ, 45, 1973 (1963).
- 23 R.S.Harp, Appl.Phys.Lett., 4, 186 (1964);
F.W.Grawford, R.S.Harp, J.Appl.Phys., 35, 3435 (1964); R.W.Could, Phys.Lett., II, (3), 236, (1964); J.Pavkovich, G.S.Kluo, Proc.VIth Inter.Conf.on Phen in Fou Gases Paris, vol.3, 39 (1964).
- 24 M.Feix, Phys.Lett., 12, 316 (1964).
- 25 А.А.Андронов, Космические исследования, IV, 558, (1968).

26. H. N. Khuel, Radio Sci., I, 971 (1966);
2, 73 (1967).
27. А. А. Андронов, ЖЭТФ, 55, 496 (1968).
28. V. Fiala, Trans. IEEE, AP-18, 834 (1970).
29. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний
и волн электромагнитными потоками, ГИТТЛ, М., (1953)
30. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Известия
ВУЗов, "Радиофизика", 10, 1414, (1967).
31. Л. И. Рудаков, ДАН 207, 821 (1972).
32. В. Л. Гинзбург, УФН 69, 537 (1959); В. Л. Гинзбург,
В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 36, 1823 (1959); Нарышкин Л. Г.
ЖЭТФ, 43, 737 (1962).

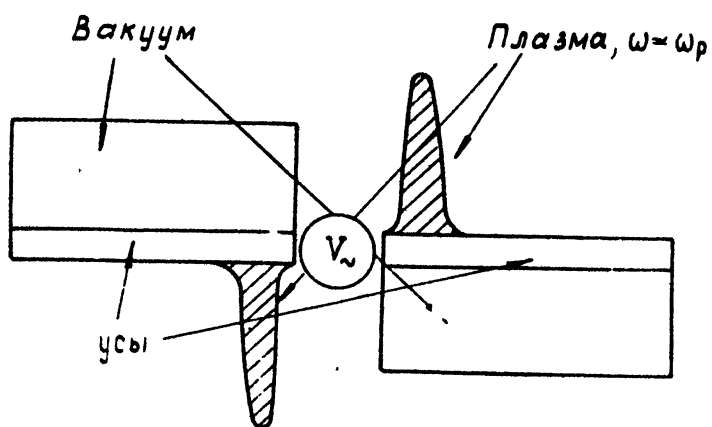


Рис.1.

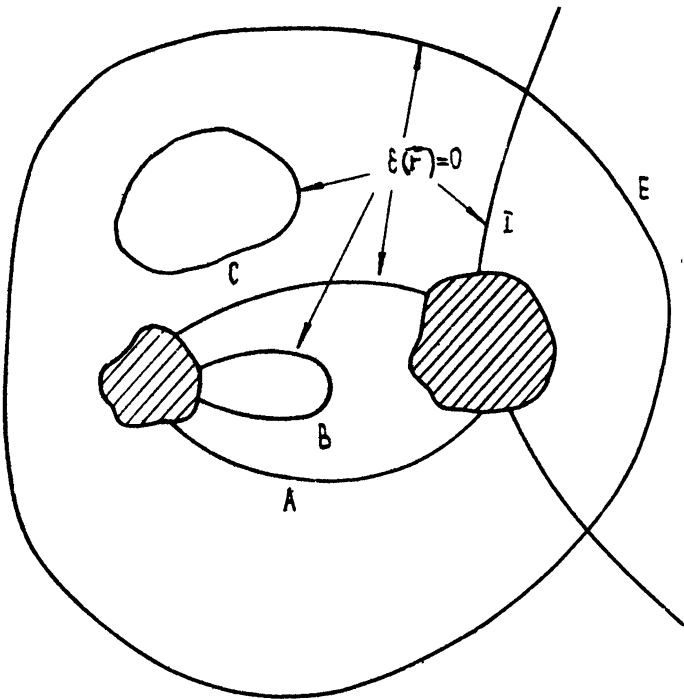


Рис 2

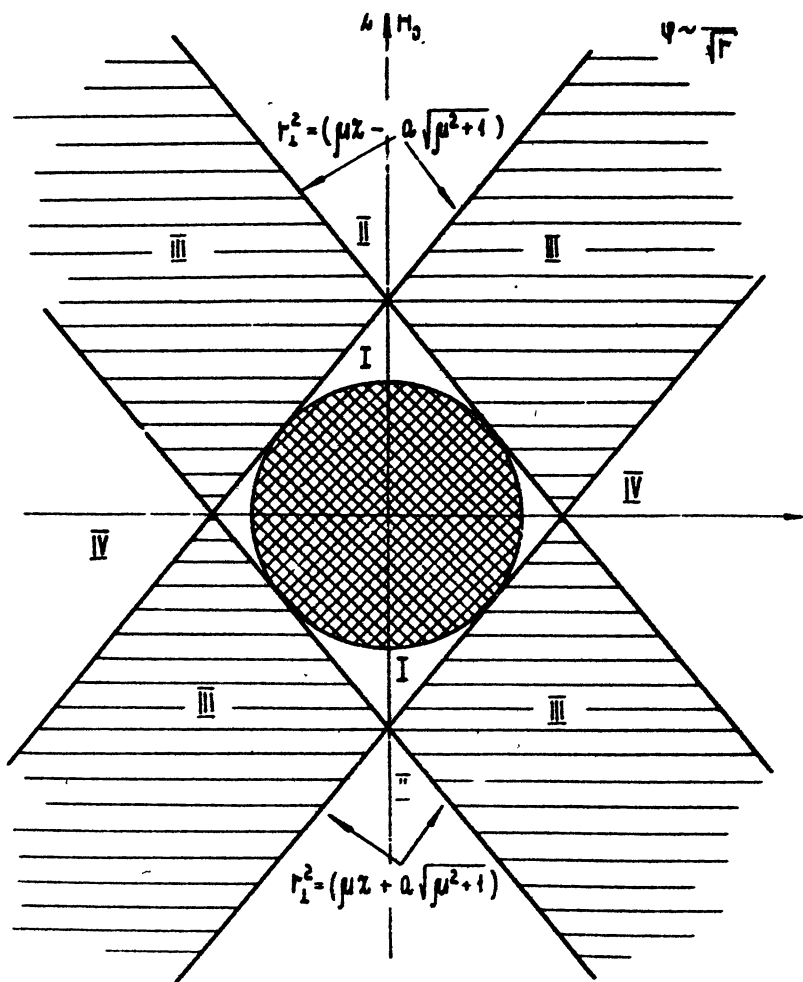


Рис. 3.

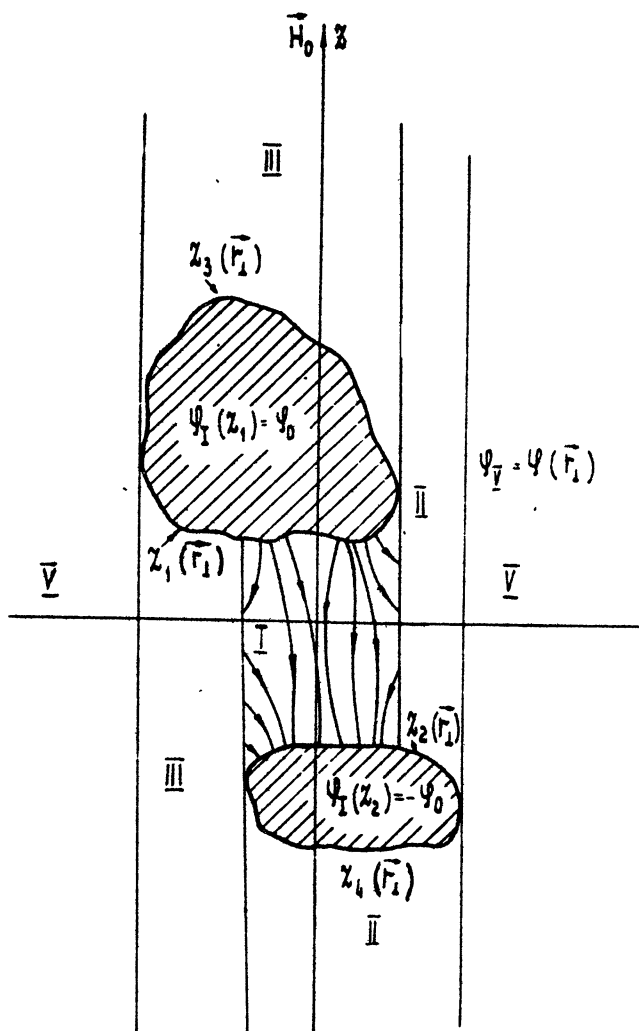


Рис 4

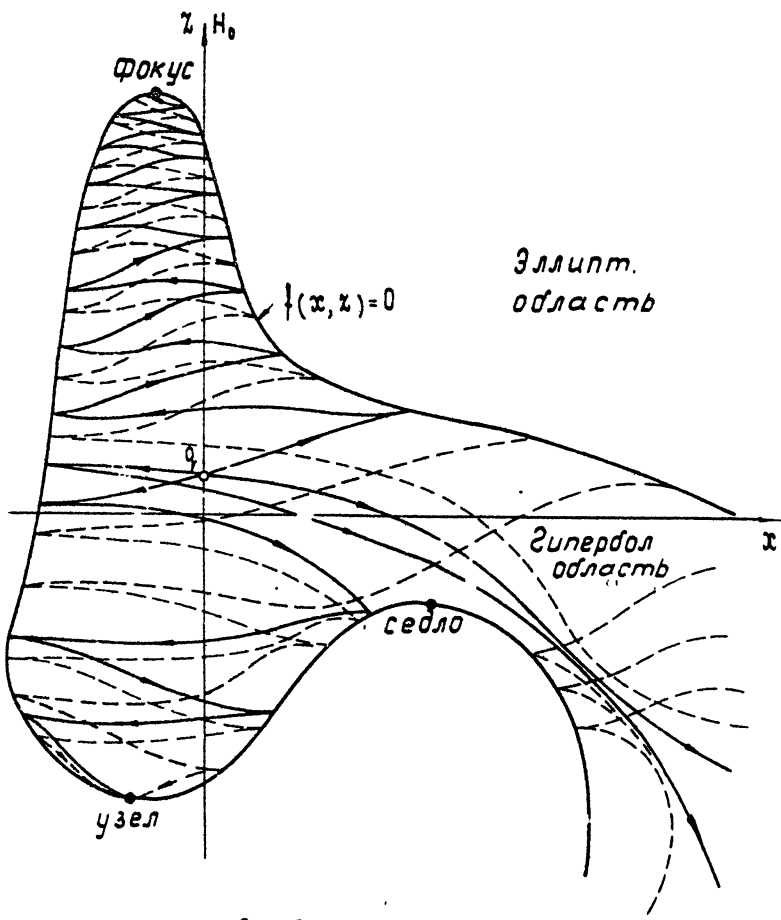


Рис. 5.

QUASI-ELECTROSTATICS OF SOURCES IN RAREFIED PLASMA

A. Andronov, Yu. Chugunov

Radiophysical Research Institute, Gorky, USSR

We are going to discuss the basic concepts of the theory of quasi-stationary electric fields of sources (antennas, probes) in a rarefied (collisionless) plasma. Due to the resonance properties of a plasma the corresponding field structure and the mathematical problems concerned are rather curious. The analysis carried out seems to be of great interest ⁺).

I. The first complete investigation of the alternating electric field structure in plasma was carried out by Landau in the second part of his famous paper [5]. He considered the field E of the charged plane in an isotropic plasma. Close to plasma resonance $\omega \approx \omega_p$

⁺) The comparison of the theory given below with the experiment one may find in [1]. The similar quasi-electrostatic problems were discussed in the theory of wave interaction in a homogeneous plasma (see, for example [2,3]) and in the theory of electromagnetic field interaction with a bounded plasma (see, for example [4]).

this field is

$$\epsilon = 4\pi\sigma \frac{1 - e^{-ik_p z}}{\omega^2} \quad (1)$$

$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, $k_p = \frac{\sqrt{3e}}{z_0}$ is the plasma wave number, z_0 is Debye radius, σ is the charge per 1cm^2 of the plane, z is the distance from the plane. Thus, at $\omega \rightarrow \omega_p$ $\epsilon \rightarrow \infty$ at all z . It turns out however that if we abandon the idealizations and conditions considered by Landau (nonone-dimensional fields, inhomogeneous or anisotropic plasma) singularity in the electric field vanishes. However the behaviour of the electric field of sources at frequencies at which the excitation of natural longitudinal oscillations occurs is usually rather peculiar: the electric field either does not decrease at all far away from the source or decreases substantially weaker than in vacuum. This behaviour of the source fields may be considered as the main resonance property.

2. Let us consider, for example, the case discussed by Landau (homogeneous isotropic plasma) without one-dimensional idealization. At $\omega = \omega_p$ it is not difficult to find the potential φ_0 of the point charge for $z \gg z_0$ [6] (c.f. [7, 8])

$$\varphi_0 = \frac{1 - e^{-ik_p z}}{\epsilon z} \quad (2a)$$

at $\omega \rightarrow \omega_p$

$$\varphi_0 \approx \frac{ik_p}{\epsilon} + \frac{z}{6z_0^2} \quad (2b)$$

i.e. the electric field is radial and constant: $E = -\frac{1}{6z_p^2}$
 This leads to a number of peculiarities in properties of sources the dipole charge is concentrated at its gap (Fig I) and its impedance Z depends only on the value of the gap [9] etc. What a surprising resonance behaviour! However the situation considered (homogeneous plasma) is rather ideal.

3. If the source is "large" - dimensions are large in comparison with the space dispersion parameter - a sufficiently complete description of source properties may be done if the space dispersion is neglected. Equation for the potential φ in this case is the equation of the Poisson type

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\epsilon_{ij}(\bar{z}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (3)$$

The components of the tensor ϵ_{ij} may turn to zero; to make the solution of equation (3) unambiguous one must take into account the anti-Hermitian part of the tensor ϵ_{ij} , - i.e. collisions ν have to be in fact taken into account. That is why collisionless solutions of equation (3) are the limited solutions at $\nu \rightarrow 0$. The simplest examples which may be considered by this way are a sphere in the radially-inhomogeneous isotropic plasma and a sphere in the homogeneous anisotropic plasma.

We take in the first case $\epsilon(z) = \epsilon_\infty + \frac{a^2}{4z^2}$, a is the radius of the sphere (this corresponds to the plasma inhomogeneity due to particles absorption on the sphere surface $\left[\frac{1}{4z} \right]$) and obtain $E = E_z = \frac{1}{\epsilon_\infty z^2 + \frac{a^2}{4}}$ and again

at $\epsilon_{\infty} = 0$ $E = \text{const}$ at all z ! At $\epsilon_{\infty} = 0$ ϵ may turn to zero. In this case in the approximation considered $\epsilon = \infty$ $\epsilon = 0$ and the impedance has the finite real part (at $\nu \rightarrow 0$) due to the finite value of dissipation in the vicinity of the surface $\epsilon = 0$ at $\nu \rightarrow 0$ (c.f. [II,4]). In the general case in the isotropic plasma the possible geometry of surfaces $\epsilon = 0$ is shown in Fig.2. The analysis of a number of problems (the dipole field in a plasma with $\epsilon = \epsilon_{\infty} + \frac{a^2}{4z^2}$, a point charge in the infinite "linear" layer, a potential in the medium with dielectric permittivity depending on the angle of the cylindrical system of coordinate, etc) shows that the presence of the surface $\epsilon = 0$ leads (at $\nu \rightarrow 0$) to the field singularity on this surface and to dissipation in its vicinity. It is naturally to think that this have to be valid also in the general case ⁺). If it is so then the frequency region where $\epsilon = 0$ exists is the region with $R = \text{Re } Z$ differs from zero. The frequencies at which the surface $\epsilon = 0$ goes to infinity or disappears at the source (the case B in Fig.2) are the frequencies where $R \rightarrow 0$. Thus, the inhomogeneous "cold" approximation permits to describe completely the source impedance characteristics in an isotropic

⁺)The known exception of this rule is the case when the lines $E = \text{const}$ coincide with the electric field lines in vacuum and hence the vacuum electric field is not changed in the medium with $\epsilon(z)$, i.e. has no singularities at $E=0$. We consider this case being unstable to the distortions of ϵ .

plasma.

It is clear that this might be valid also in the magnetoactive plasma where there is additional „weakening“ of resonance properties by the anisotropy so that even the uniform approximation may often be used for impedance calculation. Really, let us consider a potential of the sphere in an homogeneous magnetoactive plasma at $\varepsilon_1, \varepsilon_3 < 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_3$, are the components of the "cold" dielectric permittivity tensor. In this case the longitudinal oscillations exist in plasma and the equation for the potential becomes the hyperbolic equation ($\vec{z}_0 \uparrow \uparrow H$, H is the constant magnetic field):

$$|\varepsilon_1, \varepsilon_3| \Delta_{\perp} \varphi - |\varepsilon_3| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

The potential of the sphere may be found (at $V \rightarrow 0$) by substitution of $z' = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} z$ (which transforms equation (3) into Poisson equation, see [I2, I3]) and the known solution of the metal ellipsoid in vacuum if we require that at $z \rightarrow \infty$ the potential of the sphere would be close to the potential of the point charge q at $\varepsilon_1, \varepsilon_3 < 0$ [I4, I5] ($\mu^2 = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right|$):

$$\varphi_q = \frac{q}{\sqrt{|\varepsilon_1, \varepsilon_3| \cdot |\mu^2 z^2 - z_1^2|}} \times \begin{cases} \text{sign } \varepsilon_1, \mu z = z_1 \\ -1, \mu z = -z_1 \end{cases} \quad (5)$$

For the potential of the sphere we obtain [I5]

$$\varphi_s = \frac{q}{a[|\varepsilon_1, \varepsilon_3|(\mu^2 + 1)]^{1/2}} \left[\text{sign } \varepsilon_1 A_2 \text{th} \sqrt{\frac{\mu^2 a^2 - \xi^2}{a^2(\mu^2 + 1)}} + i \frac{\pi}{2} \right], \quad (6)$$

$$z_1^2 / (\xi + a^2) - \mu^2 z^2 / (\xi - \mu^2 a^2) = 1,$$

and for its impedance

$$Z = \frac{1}{\omega a [|\epsilon_1 \epsilon_3| (\mu^2 + 1)]^{1/2}} \left[\frac{\epsilon_1}{2} + i \operatorname{sign} \epsilon_1 \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}) \right]. \quad (7)$$

Fig. 3 shows regions of space where different branches of $Azth$ are to be used. The boundaries of the regions are characteristics of equation (5) which are tangent to the sphere. In the regions (II, IV) at $z \rightarrow \infty$ $\psi_s \rightarrow \psi_0$; on the other hand in the regions (III) $\psi_s \sim \frac{1}{\sqrt{z}}$ at $z \rightarrow \infty$, i.e. ψ_s decreases slower than in vacuum. One may show that the latter leads to $R_2 Z \neq 0$ at $\psi \rightarrow 0$.

Let now $\epsilon_1 = 0$ (the similar situation occurs at $\epsilon_3 = 0$). In this case equation (4) degenerates into quasi-one-dimensional one

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

and here it is possible to define the distribution of the potential of any source [16]. The electric field for one source at $\epsilon_1 = 0$ is shown in Fig. 4. Again far enough from the source parts is the electric field constant! For sources of a more complex geometry in the presence of the plasma inhomogeneity the peculiarities of the potential behaviour appear to be even more curious. Here the inhomogeneity may lead to the change of equation (3) type (elliptic into hyperbolic one or vice versa). In the last case the singular points of characteristics

(focus, node and saddle) located at the parabolic boundary is of great importance (as it was noted first by Piliya and Fedorov [17]). The focus and the node are the attraction points of characteristic, i.e. they are in fact the points where plasma oscillations⁺ excited by the source are absorbed. As the investigation of the plane geometry problems shows [3,17,19] out of the singular points the characteristics are reflected from the parabolic boundary, in its vicinity at $\nu \rightarrow 0$ the dissipation is absent and the source in the elliptic region excites the plasma oscillations. Characteristics are reflected also from the surface of sources. The characteristics may also be attracted by their asymptotes, - for example, separatrixes of saddles (c.f. [3,17,19]). All these facts permit to consider the presence of the region of hyperbolicity itself as the cause of $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ at $\nu \rightarrow 0$ of the source (similar to that of the isotropic plasma where the presence of the surface $\epsilon = 0$ only is necessary for $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$). As it may be concluded from the examples and arguments given the dissipation and $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ for $\nu \rightarrow 0$ occur here due to the plasma oscillations going to the infinity along the characteristics passing through the source (compare the case of a homogeneous plasma) or because of grouping of characteristics into a node or a focus. This situation is illustrated by Fig.5. The characteristics of a

⁺The focus as the absorption point of plasma oscillations was recently considered by Piliya and Fedorov [18].

point charge in the hyperbolic region is shown there.

Thus, the "cold" inhomogeneous approximation is evidently always sufficient to find the impedance in resonance conditions.

4. "Cold" approximation does not describe the field and the potential close to the "cold" singularities. To find them there we need spacial dispersion to be taken into account. At present it has been done in a plane-layered plasma (see, for example, [2,3]), in an isotropic plasma when the spacial dispersion is defined by the particle absorption [20], and in the homogeneous magneto-active plasma [21]. We shall discuss two last cases: the first one is fairly well known (see [2,3]).

The role of the spacial dispersion due to particle absorption may be easily considered for the case of the absorbing spherical probe in the isotropic plasma [20]. Here the electric field has only radial component E and due to the absorption the term with the first order derivative in the relation of the electric induction D with E is present. Up to this term $D - E$ relation may be found by the expansion of the linearized kinetic equation over the parameter $V_T/\omega z \ll 1$, V_T is the thermal velocity of electrons

$$D = \epsilon(z)E + \frac{V_T}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\pi} \omega^3} \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial E}{\partial z} \quad (9)$$

Using this relation one may easily find the distribution of the electric field and the potential. It turns out

that if the plasma resonance is present the electric field is the "cold" field for $\epsilon < 0$ and is the field of a plasma wave travelling to the probe and absorbed by it together with particles for $\epsilon > 0$. With the excitation of this plasma wave the resistance of the probe is associated. In the zero approximation over the parameter $V_T/\omega a$, a is the radius of the probe, this resistance coincides with those obtained in the "cold" approximation at $v \rightarrow 0$. Independence of impedance-like properties on the value and type of dissipation in resonance conditions is well known [II, 22, 2, 3]. The example considered shows that for relation (9). Out of the resonance condition relation (9) permits to find the real correction ($\sim V_T/\omega a$) to the purely reactive "cold" impedance of the probe. In this case it is not as well difficult to find the probe noises defined also only by the absorbing particles.

For the magneto-active plasma it is easy to find the expression for the potential φ_q^H of a point charge q , taking into account the "weak" spacial dispersion if the plasma is homogeneous [2I]. Of interest is the vicinity of directions where the "cold" potential is singular. Using Fourier analysis and the steepest descent method we obtain

$$\varphi_q^H = q \int \left(\frac{2}{\pi |\epsilon, \epsilon_3| z_1} \right)^{1/2} \frac{1}{(\frac{1}{2} \mu r \bar{z})^{1/6}} \int_0^\infty e^{i p t^2 - i t^6} dt, \quad (10)$$

where

$$\rho = \Delta / \left(\frac{1}{2} \mu \Gamma z_0^2 z \right)^{1/3}, \quad \Delta = z_1 - \mu z,$$

and the expression for Γ see [21].

At $|\rho| \rightarrow 1$ we shall have

$$f_{pq}^H = \begin{cases} i\alpha / (2|\epsilon_1 \epsilon_3| \Delta z_1)^{1/2} \times [1 - \exp\{ - (\frac{2|\rho|}{3})^{3/2} / \sqrt{2} z_0 \}], & \rho < 0 \\ q / (2|\epsilon_1 \epsilon_3| \Delta z_1)^{1/2} \times [1 - \exp\{ (\frac{2\rho^2}{3})^{3/2} / \sqrt{2} z_0 \}], & \rho > 0 \end{cases} \quad (II)$$

Thus the "weak" spacial dispersion eliminates the singularities (at $z \neq 0$) in the potential f_{pq}^H . The potential of "large" sources in the vicinity of "cold" singularities may be found if we calculate the potential of the source over the "cold" charge distribution using (IO,II). This calculation shows, in particular, that in the zero approximation over the parameter z_0/α the impedance of a sphere coincides with the "cold" value (7).

So, for "large" sources the more exact plasma description - the description with the "weak" spacial dispersion - instead of the "cold" description at $\nu \rightarrow 0$ does not change the impedance of the sources. This shows the significance of the "cold" approximation (which is of course simpler than the description with the spacial dispersion) and requires the methods (in particular, numerical) to solve the "cold" boundary problems of equation (3) to be developed.

5. With "strong" spacial dispersion occurred for "small" sources or for "large" ones if one takes into account the effects in Debye layer on their surface (c.f. [23]) Landau damping becomes important. It leads to $\text{Re} \tilde{\chi} \neq 0$ in the absence of plasma oscillations excitation and particle absorption. These effects may be associated both with the infinite (transit) particles [10,13] and with finite particle-particle trapped by the static potential well of the source (c.f. [10]). The contribution of the first in the impedance and noises of the "small" sources may be often calculated with the help of the known expressions for the dielectric permittivity tensor and the current correlation function of the homogeneous plasma [24,25,26] or (for "large" sources) by matching of the numerical investigation of the one-dimensional transit-time phenomena in Debye layer to the "cold" solution [23] . The most interesting effect here is the change of sign of $\text{Re} \tilde{\chi}$ for moving sources [24,25,27,28] . The similar effects are well known in electronics. For the "cold" isotropic homogeneous plasma at $\omega_p \rightarrow 0$ the source motion leads to $\text{Re} \tilde{\chi} \sim \frac{\partial}{\partial K_x} |E_{K_x}|^2, K_x = \frac{\omega}{V_0}$ [25] (c.f. [29,30]), $|E_{K_x}|$ is the square modulus of the spacial Fourier spectrum of the source electric field, $\vec{V}_0 \parallel \vec{x}_0$ is the velocity of the source. The value $\frac{\partial}{\partial K_x} |E_{K_x}|$ plays here the role of the distribution function derivative in monochromatic plasma oscillation damping⁺). For arbitrary ω_p

⁺ The role of the derivative of the field spectrum was recently rediscovered by Rudakov at the investigation of Langmuir scintillation interaction with the beam [31].

the condition for $\text{Re} \tilde{\chi} = 0$ may be interpreted as a result of prevailing of plasma wave radiation at anomalous Doppler frequencies. In contrast to point sources (c.f. [32]) for distributed sources the corresponding conditions may be easily fulfilled by the choice of the source geometry. The consideration of the influence of particle thermal velocities on the possibility of $\text{Re} \tilde{\chi} = 0$ shows [25,27,28] that $\text{Re} \tilde{\chi} = 0$ in some cases (especially for the motion transverse the static magnetic field) may occur even for $V_e \sim V_T$, V_T is the thermal velocity of electrons.

As for the role of finite particles the calculation of their contribution to HF characteristics of sources are now absent. At the same time finite particles nonlinear (nonisochronic) oscillators for inverse distribution function may give rise to the negative dissipation of the electric field (see, for example, [30]). Moreover as Academician A.V.Gaponov noted finite particles might lead also to the instability of the disturbed plasma region near by the source.

Thus, the investigation (by numerical methods too) of properties of the "cold" approximation equation in resonance condition, increasing the number of cases for which the spacial dispersion solution is matched to the "cold" solution, and the calculation of the finite particle contribution are the main problems of HF quasielectrostatic theory of sources to be considered.

With pleasure we use the opportunity to note that the first paper of one of the authors (in collaboration with G.V.Gorodinsky) in the field discussed has been done on Academician V.L.Ginzburg proposal.

We should like also to point out the use of contacts we had with Dr. V.B.Gil'denburg and thank Professor V.V.Zheleznyakov for the support of the present work.

REFERENCES

1. M.P. Bachynski, RCA Rev. 28 (1), III (1967); T.R. Kaiser, J.K.E. Tunaley, Space Sci. Rev. 8 (1), 32 (1968); Plasma Waves in Space and in the Laboratory, Thomas J.Q. and Landmark B.J. eds N.Y. Elsevier, vol. I (1969); vol. 2 (1970); K.G. Balmain, Radio Sci. 7, (8-9), 771 (1972).
2. V.E. Coland, A.D. Pilya, UFN 104, 413 (1971).
3. N.S. Erokhin, S.S. Moiseev, Problems of the Theory of Plasma, vol. 7, 146, Atomizdat M., 1973. Ed. Za. A. Mertsovich.
4. V.G. Gil'denburg, Ya. M. Zlidko, I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller, Izv. VUZ. Radiofizika, X, N 9-10, 1358 (1967).
5. L.D. Landau, ZhETF, 16, 574 (1946).
6. A.A. Andronov, G.V. Gorodinsky, Izv. VUZ. Radiofizika, 5, 254 (1963).
7. M.L. Levin, Izv. VUZ. Radiofizika, VII, 180 (1964).
8. B. Rooy, M. Feix et L.R.O. Storey Plasma Phys. 14, 275 (1972).
9. A.A. Andronov, V. Ya. Midman ZTF 29, 335 (1969).
10. A.L. Al'pert, A.V. Gurevich, L.P. Pitaevsky, Artificial Satellites in the Rarefied Plasma, Nauka, M. (1964).
11. N. Herlofson, Ark. Fys. 3, 247 (1951); T.R. Kaiser, R.L. Closs, Phyl. Mag. 43, I (1952).
12. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media, GIL, M. (1959).
13. T.R. Kaiser, Planet Space Sci. 2, 639 (1962).

14. E. Arbel, Felsen Electromagnetic Theory and Antennas. Proc. Symp. Copenhagen (1962) p. 421, Pergamon Press (1963)
15. Yu. B. Chugunov, Izv. VUZ. Radiofizika, XI, 50 (1968).
16. Yu. V. Chugunov, Radiotekhnika i Elektronika, XXI, 366 (1971).
17. A. D. Piliya, V. I. Fedorov, ZhETF, 69, 389 (1971).
18. A. D. Piliya, V. I. Fedorov, (a private communication).
19. A. A. Andronov, Yu. V. Chugunov, UFN, in press.
20. A. A. Andronov, Proc. 10th Inter. Conference Phen. in Ion Gase, Oxford (1971).
21. R. K. Fisher, R. W. Gould, Phys. Lett. 31A, N 5, 235 (1970).
Yu. V. Chugunov, Izv. VUZ. Radiofizika, XIX, (1), 44 (1971);
R. K. Fisher, Gould R. W., Phys. Fluids 14, (4), 857 (1971).
22. V. B. Gil'denburg, ZhETF 45, 1978 (1963).
23. R. S. Harp, Appl. Phys. Lett. 4, 186 (1964); F. W. Crawford, R. S. Harp, J. Appl. Phys. 35, 3435 (1964); R. W. Gould, Phys. Lett. 11, (3), 236 (1964); J. Pavkovich, G. S. Kino. Proc. 11th Inter. Conf. on Phen. in Fou Gases, Paris, vol. 3, 39 (1964).
24. M. Feix, Phys. Lett. 12, 316 (1964).
25. A. A. Andronov, Kosmicheskie issledovaniya, VI, 558 (1966).
26. H. H. Khuel, Radio Sci. 1, 971 (1966); 2, 73 (1967).
27. A. A. Andronov, ZhETF 55, 496 (1968).
28. V. Fiala, Trans. IEEE AP-18 (6), 834 (1970).
29. V. M. Lopukhin, Excitation of Electromagnetic Oscillations and Waves by Electromagnetic Currents, GITTL, (1953).
30. A. V. Gaponov, M. I. Petelin, V. K. Yulpatov, Izv. VUZ. Radiofizika, 10, 1414 (1967).

31. L.I.Rudakov, DAN 207,821 (1972).
32. V.L.Ginzburg UFN, 69,537 (1959); V.L.Ginzburg,
V.Ya Eidman, ZhETF 36,1823 (1959); L.G.Naryshkin
ZhETF 43,737 (1962).

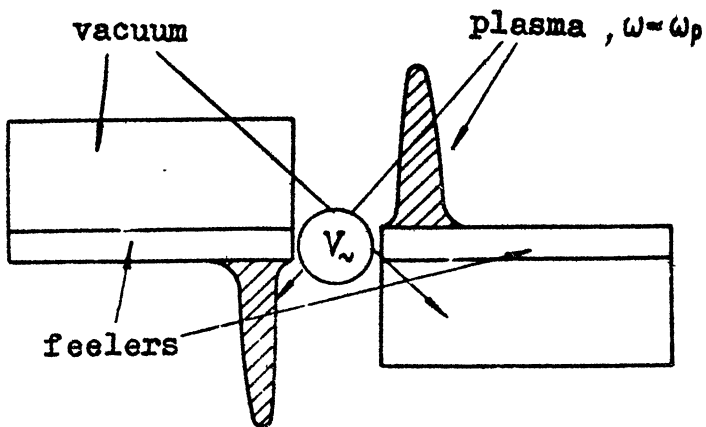


Fig.I

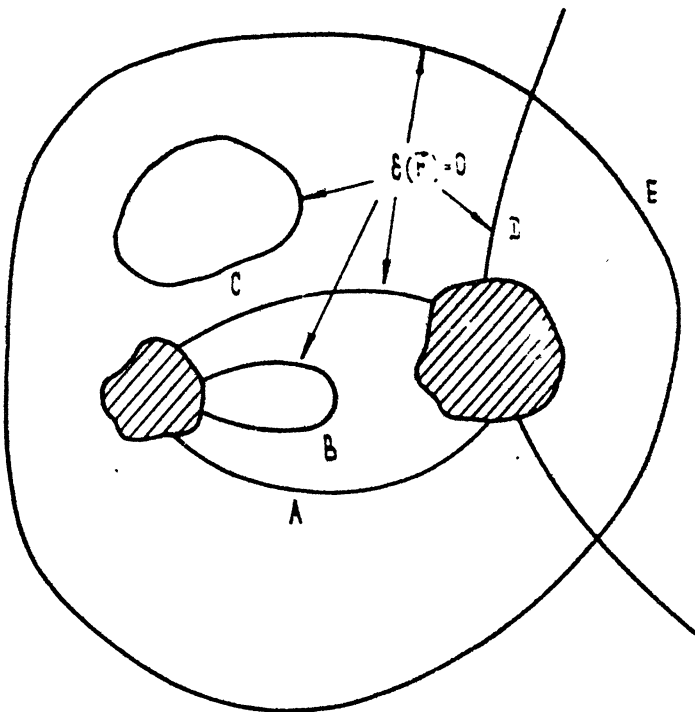


Fig.2

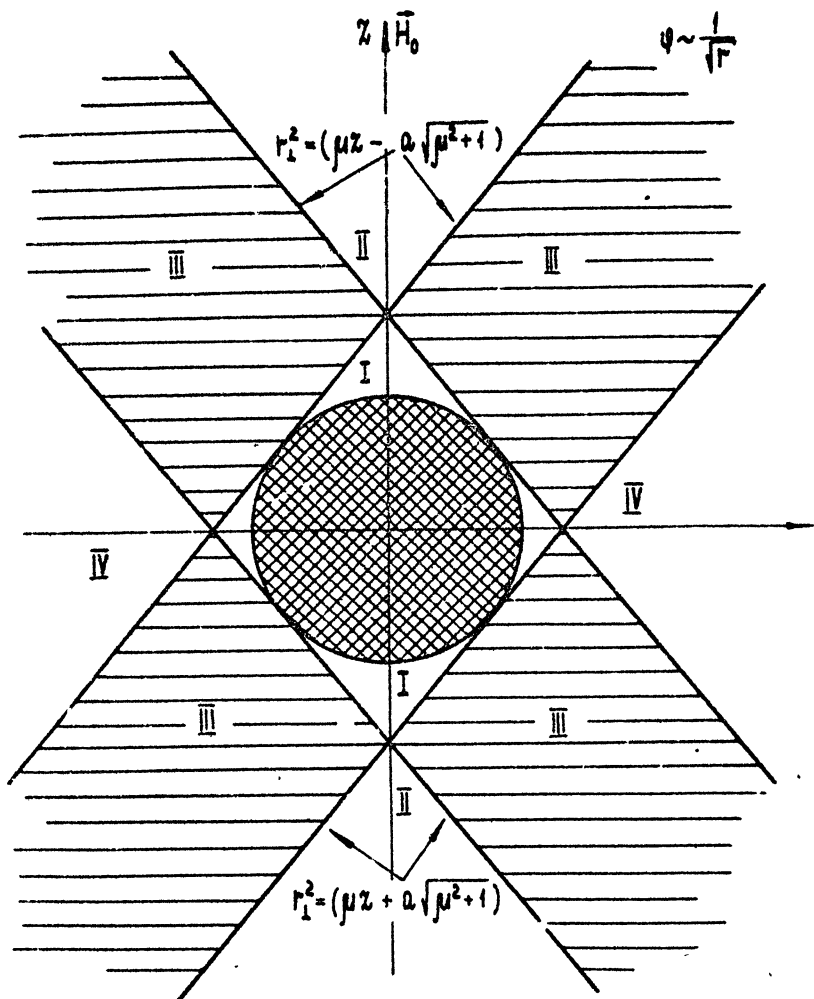


Fig. 3

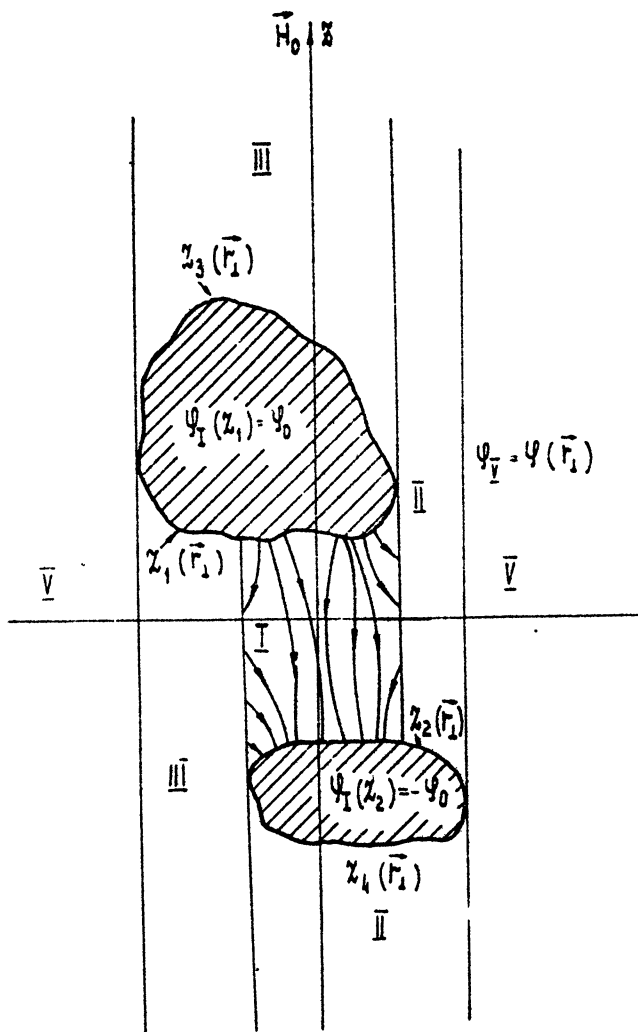


Fig.4

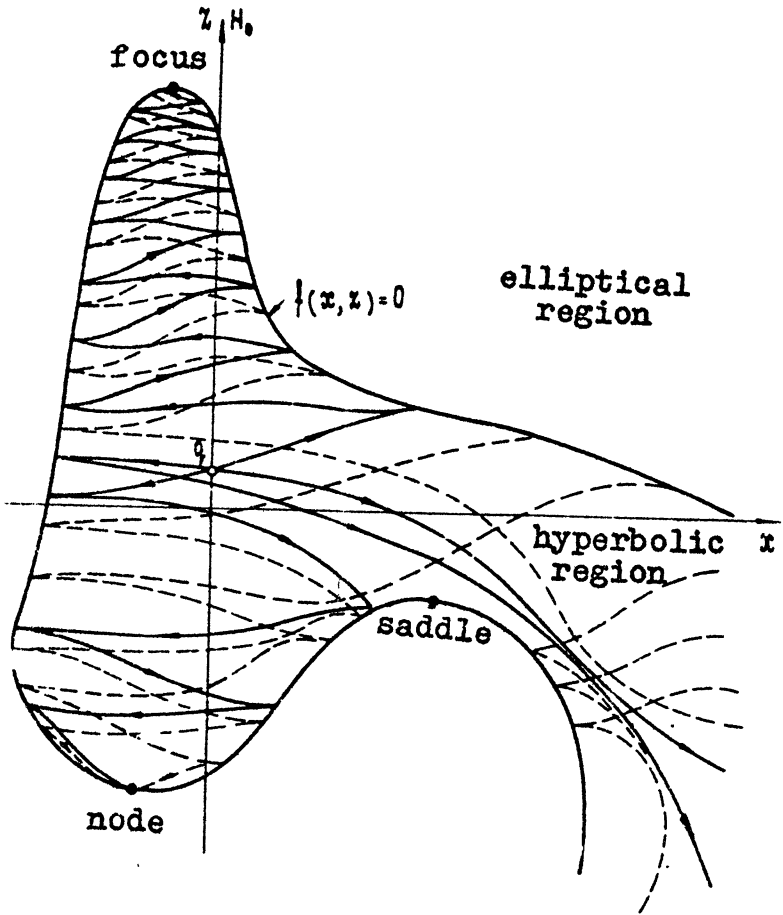


Fig.5