МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НИРФИ)

ПРЕПРИНТ № 67

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ.

В.Н.ГОЛЬДБЕРГ

ГОРЬКИЙ - 1975 г.

В области $\overline{G}_{\overset{\circ}{T}} = \{(x,t): 0 \le t \le \overset{\circ}{T},\ 0 \le x \le 1-\nu t\},\ 0 < \overset{\circ}{T} < (\lambda+\nu)^{-1}$,

где постоянные $\lambda, \nu > 0$, рассмотрим задачу

$$p_t + \lambda p_x = P(x,t,p,q), \tag{1}$$

$$q_t - \nu q_x = Q(x,t,p,q), \tag{2}$$

$$p(x,0) = p_0(x),\quad q(x,0) = q_0(x), \tag{3}$$

$$A(t, p(0,t), q(0,t)) = 0 \tag{4}$$

где вещественные функции $p_0, q_0, P, Q, A \in C_2(\overline{G}_{\overset{\circ}{T}} \times R^2)$.

При анализе теоремы существования и единственности решения задачи (I)-(4), установленной в [I], возникает задача о продолжаемости по t решения в том случае, когда в $G_{T^*} = \{(x,t) \in \overline{G}_{\overset{\circ}{T}},\ t < T^*\},\ 0 < T^* < \overset{\circ}{T}$, существует единственное решение $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) \in C_1(G_{T^*})$ задачи (I)-(4) и $|\overset{\circ}{p}|, |\overset{\circ}{q}| < M < \infty$ в G_{T^*}, $M = Const$,

$$|A_p(t, \overset{\circ}{p}(0,t), \overset{\circ}{q}(0,t))| > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t < T^* \tag{5}$$

но $\inf\limits_{0 \le t < T^*} |A_p(t, \overset{\circ}{p}(0,t), \overset{\circ}{q}(0,t))| = 0$. При условии

$J \equiv \int\limits_0^{T^*} |A_p(\tau, \overset{\circ}{p}(0,\tau), \overset{\circ}{q}(0,\tau))|^{-1} d\tau < \infty$ эта задача изучалась в [2,3]. Здесь она исследуется в случае $J = \infty$

Работа состоит из двух параграфов. При некоторых естественных предположениях в § I устанавливается теорема I, утверждающая, что $\overset{\circ}{p} \in C_1(\overline{G}_{T^*})$, $\overset{\circ}{q} \in C_1(\overline{G}_{T^*})$, а в § 2 доказывается теорема 3 о существовании в $\overline{G}_T$, $T^* < T \le \overset{\circ}{T}$, $T - T^*$ достаточно малое, двух и только двух C_1 - решений $(\overset{i}{p}, \overset{i}{q})$, $i = 1,2$, задачи (I)-(4)[+)] и показывается, что

+) В настоящей работе вводится такое определение C_1 -решения задачи (I)-(4) в $\overline{G}_T$ при $T^* < T \le \overset{\circ}{T}$, что функции $p, q, q_x, q_t \in C(\overline{G}_T)$, а функции p_x, p_t могут иметь разрыв непрерывности первого рода на характеристике $x = \lambda(t - T^*)$ при $T^* \le t \le T$.

$\overset{1}{p}_t, \overset{1}{p}_x \in C(\overline{G}_T)$, а $\overset{2}{p}_t, \overset{2}{p}_x \overline{\in} C(\overline{G}_T)$ +).

Теоремы I и 3 допускают обобщение на случай, когда ρ , P , A – n -векторы, q , Q – m -векторы, λ , ν – положительные диагональные матрицы соответствующих размеров. Основные результаты, полученные в этом направлении, содержатся в [4], а два дополнительные утверждения ($\overset{\circ}{q} \in C_2(\overline{G}_{T^*})$, и соответствующий аналог теоремы 2 данной статьи), необходимые для завершения такого обобщения, устанавливаются в общем случае так же, как в настоящей работе.

Введем некоторые обозначения: $\varkappa(\tau,x,t) = \lambda\tau + x - \lambda t$, $y(\tau,x,t) = -\nu\tau + x + \nu t$; $(\varrho(x,t), \Theta(x,t))$ – точка пересечения границы области $\overline{G}_T$ с характеристикой $\xi = \varkappa(\tau,x,t)$ при продолжении ее для $\tau \le t$; $\overline{G}_T^{T^*} = \{(x,t): T^* \le t \le T, \ 0 \le x \le \varkappa(t,0,T^*)\}$, $\overline{\mathcal{D}}_T^{T^*} = \overline{G}_T \setminus \overline{G}_T^{T^*}$, где $T^* < T \le \overset{\circ}{T}$; $\|f\|_T = \max\limits_{\overline{G}_T} |f(x,t)|$, где $f \in C(\overline{G}_T)$, $0 < T \le T^*$; $C(a,b,c,\ldots)$ – различные положительные постоянные, зависящие от постоянных a , b , c ,..., и, может быть, от данных задачи (I)-(4) и решения $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$ в области G_{T^*} ; C_i , $i=1,2,\ldots$ – фиксируемые положительные постоянные; $\mathcal{F}[p,q]_{(x,t)} = \mathcal{F}(x,t,p(x,t),q(x,t))$, где $p(x,t)$, $q(x,t)$, $\mathcal{F}(x,t,u,v)$ – произвольные непрерывные функции, определенные в областях $\mathcal{D} \in \overline{G}_T$ и $\mathcal{D} \times R^2$ соответственно;

$$\mathcal{P}[f_1,f_2,f_3,f_4] = P_t[f_1,f_2]_{(x,t)} + P_p[f_1,f_2]_{(x,t)} f_3(x,t) + P_q[f_1,f_2]_{(x,t)} f_4(x,t)$$

где $f_i(x,t)$, $i=1,2,3,4$, произвольные непрерывные функции, определенные в области $\mathcal{D} \in \overline{G}_T$, а P_t понимается как частная производная функции $P(x,t,p,q)$ по второму аргументу.

+) Для сравнения заметим, что в случае $J < \infty$ при $t > T^*$, вообще говоря, не существуют даже непрерывные обобщенные решения задачи (I)-(4) [2].

§ I. Гладкость функций $\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}$ в $\overline{G}_{T^*}$

Ниже предполагается, что при некоторых $\gamma_0, \eta_0 > 0$

$$A_{pp}(t, \overset{\circ}{p}(0,t), \overset{\circ}{q}(0,t)) \geqslant \gamma_0 > 0 \quad \text{на } [T^* - \eta_0, T^*) \tag{6}$$

Далее в § I функции $\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}$ обозначаются через p, q соответственно.

Лемма I. Функция $q \in C_2(G_{T^*})$.

Доказательство. В силу (I) вектор-функция (p, q) есть решение в G_{T^*} системы

$$p(x,t) = p(\varrho(x,t), \theta(x,t)) + \int_{\theta(x,t)}^{t} P[p,q]_{(\varkappa(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{7}$$

$$q(x,t) = q_0(x+\nu t) + \int_{0}^{t} Q[p,q]_{(\psi(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{8}$$

Из (7), (8) вытекает [I], что вектор-функция (p_t, q_t) удовлетворяет в G_{T^*} системе

$$p_t(x,t) = p_t(\varrho(x,t), \theta(x,t)) + \int_{\theta(x,t)}^{t} \mathcal{P}[p, q, p_t, q_t]_{(\varkappa(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{9}$$

$$q_t(x,t) = q_t(x+\nu t, 0) + \int_0^t \left\{ Q_t[p,q] + Q_p[p,q] p_t + Q_q[p,q] q_t \right\}_{(\psi(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{I0}$$

где Q_t - частная производная функции $Q(x,t,p,q)$ по второму аргументу. Покажем, что существует $q_{tt} \in C(G_{T^*})$. Рассмотрим (I0). Обозначим через $\mathcal{F}(x,t) = \int_0^t Q_p[p,q] p_t \Big|_{(\psi(\tau,x,t),\tau)} d\tau$ +). Заменяя $p_t(\psi(\tau,x,t),\tau)$ правой частью (9), нетрудно показать, что $\mathcal{F} \in C_1(G_{T^*})$, и

$$\mathcal{F}_t(x,t) = \frac{\lambda}{\lambda+\nu} \left(Q_p[p,q] p_t \right)_{(x,t)} + \frac{\nu}{\lambda+\nu} \left(Q_p[p,q] p_t \right)_{(x+\nu t, 0)} +$$

+) Выражение $u_t(f_1, f_2)$ при произвольных функциях $u(x,t)$ и $f_i = f_i(\tau,x,t)$, $i=1,2$ всюду понимается как $\left. \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} \right|_{\substack{\xi = f_1 \\ \tau = f_2}}$

$$+\int_0^t \left[\frac{\lambda\nu}{\lambda+\nu} \frac{\partial^2 Q[p,q]}{dx\,\partial p} + \frac{\nu}{\lambda+\nu} \frac{\partial^2 Q[p,q]}{dt\,\partial p} \right] p_t \Big|_{(\gamma(\tau,x,t),\tau)} d\tau +$$

$$+\frac{\nu}{\lambda+\nu} \int_0^t Q_p[p,q]\, \mathcal{F}[p,q,p_t,q_t] \Big|_{(\gamma(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{II}$$

где $\frac{\partial^2 Q}{dx\,\partial p} = Q_{xp} + Q_{pp} p_x + Q_{pq} q_x$; $\frac{\partial^2 Q}{dt\,\partial p}$ определяется аналогично.

Уравнение (I0) представимо в виде

$$q_t(x,t) = R(x,t) + \int_0^t Q_q[p,q] q_t \Big|_{(\gamma(\tau,x,t),\tau)} d\tau$$

где $R \in C_1(G_{T^*})$. Поэтому (см., например, доказательство леммы I в [I]) в G_{T^*} существует $q_{tt} \in C(G_{T^*})$ и

$$q_{tt}(x,t) = \frac{d}{dt}\left[q_t(x+\nu t,0)\right] + Q_t[p,q]_{(x+\nu t,0)} + \mathcal{F}_t(x,t) +$$

$$+ Q_q[p,q] q_t \Big|_{(x+\nu t,0)} + \int_0^t \Big\{ Q_q[p,q] q_{tt} + \big(Q_{qt}[p,q] + Q_{qp}[p,q] p_t + \tag{I2}$$

$$+ Q_{qq}[p,q] q_t \big) q_t \Big\}_{(\gamma(\tau,x,t),\tau)} d\tau$$

В силу (2) существуют $q_{xx}, q_{xt} \in C(G_{T^*})$. Лемма I доказана.

Лемма 2. $\sup\limits_{0 \le t < T^*} |p_t(0,t)| < \infty$

Доказательство. Легко видеть, что функция $p = p(0,t)$ удовлетворяет при $0 \le t < T^*$ уравнению

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{A_t(t,p,q(0,t)) + A_q(t,p,q(0,t))\, q_t(0,t)}{A_p(t,p,q(0,t))} \tag{I3}$$

В силу (I3) и леммы I $p(0,t) \in C_2[0,T^*)$. Зафиксируем произвольные $T^* - \eta_0 < T_0 < T_1 < T^*$. Предположим, что существуют числа $L_0 \in [0,\infty)$ и $t^* \in [T_0, T_1]$ такие, что

$$|p_t(0,t)| \le L_0 + |p_t(0,t^*)| \qquad \text{при} \quad t \in [T_0, T_1] \tag{I4}$$

$$p_{tt}(0,t^*) \ge 0 \tag{I5}$$

Оценим $\rho = |p_t(0,t^*)|$. Обозначим через $\sigma_i = \frac{\partial^i q(0,t^*)}{\partial t^i}$, $i = 1,2$.

Из (I3), учитывая (6), (I5), имеем

$$\gamma_0 \rho^2 \le C(M)\left[1 + \rho + \sigma_1 + \rho\sigma_1 + \sigma_1^2 + \sigma_2\right] \tag{I6}$$

Оценим величины σ_i. Обозначим через α решение уравнения

$$\alpha(x,t) = 1 + \int_{\theta(x,t)}^{t} \left(P_p[p,q]\alpha\right)_{(x(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{I7}$$

Отметим, что $\alpha \in C(G_{T^*})$. При $(x,t) \in G_{T^*}$ определим функцию

$$\beta(x,t) = p_t(x,t) - \alpha(x,t)\,p_t(\rho(x,t),\theta(x,t)) \tag{I8}$$

Из (9), (I0), (I7) следует, что вектор функций (β, q_t) есть решение в G_{T^*} системы

$$\beta(x,t) = \int_{\theta(x,t)}^{t} \left\{ P_t[p,q] + P_q[p,q]q_t + P_p[p,q]\beta \right\}_{(x(\tau,x,t),\tau)} d\tau \tag{I9}$$

$$q_t(x,t) = q_t(x+\gamma t,0) + \int_0^t \left\{ Q_t[p,q] + Q_q[p,q]q_t \right\}_{(y(\tau,x,t),\tau)} d\tau +$$

$$+ \int_0^t Q_p(\xi,\tau,p(\xi,\tau),q(\xi,\tau))\left[\alpha(\xi,\tau)p_t(\rho(\xi,\tau),\theta(\xi,\tau)) + \beta(\xi,\tau)\right]\Big|_{\xi=y(\tau,x,t)} d\tau \tag{20}$$

Пользуясь (I7),(I9),(20) и леммой Гронуолла [6], получим

$$\|\alpha\|_{T_1} \le C(M),\ \|\beta\|_{T_1},\ \|q_t\|_{T_1} \le C(M)\left[1 + \int_0^{T_1} |p_t(0,\eta)|\,d\eta\right] \tag{2I}$$

В силу (I4) $|p_t(0,t)| \le C(T_0,L_0) + \rho$ при $0 \le t < T_1$, и $\int_0^{T_1} |p_t(0,\eta)|\,d\eta \le C(T_0,L_0) + \rho\Delta T$, $\Delta T = T_1 - T_0$. Поэтому, учитывая (I8),(I),(2), имеем

$$\|q_x\|_{T_1},\ \|q_t\|_{T_1},\ \|\beta\|_{T_1} \le C(T_0,M,L_0) + C(M)\rho\Delta T \tag{22}$$

$$\|p_x\|_{T_1},\ \|p_t\|_{T_1} \le C(T_0,M,L_0) + C(M)\rho \tag{23}$$

Из (I2), пользуясь (22),(23) и леммой Гронуолла, получим

$$\|q_{tt}\|_{T_1} \le C(T_0,M,L_0)(1+\rho) + C(M)\rho^2\Delta T \tag{24}$$

Согласно (I6),(22),(24) $\gamma_0\rho^2 \le C_1(1+\rho) + C_2\Delta T\rho^2$, где $C_2 = C_2(M)$ и $C_1 = C_1(T_0,M,L_0)$ некоторые фиксируемые теперь постоянные. Следовательно, если $T^* - T_0 < \frac{1}{2}\gamma_0 C_2^{-1}$, то

$$\rho < \rho^*(T_0,M,L_0) \tag{25}$$

где постоянная ρ^* есть положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\gamma_0 y^2 - C_1 y - C_1 =$

= 0. Заметим, что постоянную ϱ^* можно предполагать определенной при любых $0 \le L_0 < \infty$, $T^* - \min(\gamma_0, \frac{1}{2}\gamma_0 C_2^{-1}) < T_0 < T^*$. Докажем теперь, что либо I) справедлива лемма 2; либо 2) найдется такое число $0 < \theta^* < T^*$, что $p_t(0,t)$ есть отрицательная невозрастающая функция при $\theta^* \le t < T^*$, и $\lim\limits_{t \to T^*} p_t(0,t) = -\infty$. Зафиксируем произвольное $T^* - \min(\gamma_0, \frac{1}{2}\gamma_0 C_2^{-1}) < T_0 < T^*$. Априори возможны случаи а) $|p_t(0,T_0)| < \varrho^*(T_0, M, 0)$; б) $p_t(0,T_0) \geqslant \varrho^*(T_0, M, 0)$; в) $p_t(0,T_0) \le -\varrho^*(T_0, M, 0)$. Рассмотрим каждый из этих случаев. Пусть имеет место случай а). Тогда либо а.I) $|p_t(0,t)| \le \varrho^*(T_0, M, 0)$ на $[T_0, T^*)$, и, следовательно, справедливо утверждение I), либо а.2) найдется такое число $T_0 < t_0 < T^*$, что $|p_t(0,t_0)| > \varrho^*(T_0, M, 0)$. Рассмотрим случай а.2). Положим $\tau^* = \inf\limits_{T_0 \le \tau \le t_0} \{\tau : |p_t(0,\tau)| = \varrho^*(T_0, M, 0)\}$.

Величина $p_t(0,\tau^*) \ne \varrho^*(T_0, M, 0)$, ибо в противном случае (I4),(I5), а значит, и (25) имели бы место при $T_1 = t^* = \tau^*$, $L_0 = 0$. Поэтому $p_t(0,\tau^*) = -\varrho^*(T_0, M, 0)$, и, как легко видеть, $p_{tt}(0,\tau^*) < 0$. Функция $p_{tt}(0,t) < 0$ на (τ^*, T^*). Действительно, если при некотором $\tau^* < \tilde{t} < T^*$ $p_{tt}(0,t) < 0$ на $[\tau^*, \tilde{t})$ и $p_{tt}(0,\tilde{t}) = 0$, то $p_t(0,\tilde{t}) < -\varrho^*(T_0, M, 0)$, что противоречит (I4),(I5),(25) при $T_1 = t^* = \tilde{t}$, $L_0 = 0$. Итак, в случае а.2) альтернатива I)-2) справедлива. Рассмотрим случай б). Обозначим через $L = p_t(0,T_0) + 1$. Тогда либо

$$\text{б.I)}\ -\varrho^*(T_0, M, L) < p_t(0,t) < L \qquad \text{на } (T_0, T^*) \tag{26}$$

и, следовательно, утверждение I) справедливо; либо б.2) найдется такое $T_0 < \theta_0 < T^*$, что при $t_0 = \theta_0$ одно из неравенств (26) обращается в равенство. Рассмотрим случай б.2). Пусть $T_0 < \tau^* \le \theta_0$ таково, что оба неравенства (26) имеют место на $[T_0, \tau^*)$, а при $t = \tau^*$ одно из неравенств (26) обращается в равенство. Допустим, что $p_t(0,\tau^*) = L$. Заметим, что $p_{tt}(0,\tau^*) \geqslant 0$. Функция $p_t(0,t)$ либо всюду неотрицательная на $[T_0, \tau^*]$, либо в некоторой точке $t_0 \in (T_0, \tau^*)$ принимает свое наименьшее на $[T_0, \tau^*]$ отрицательное значение. Поэтому (I4),(I5) имеют место при $T_1 = \tau^*$, $L_0 = 0$ и t^* равном либо τ^*, либо t_0. В силу (I4),(25) $p_t(0,\tau^*) < \varrho^*(T_0, M, 0)$. С другой стороны $p_t(0,\tau^*) = L > \varrho^*(T_0, M, 0)$. Отсюда следует, что $p_t(0,\tau^*)=-\varsigma^*(T_0,M,L)$, $p_{tt}(0,t)\leq 0$ на $[\tau^*,T^*)$. Действительно, $p_{tt}(0,\tau^*)\leq 0$ и если $p_{tt}(0,\sigma)>0$ при некотором $\tau^*<\sigma<T^*$, то $p_t(0,t)$ принимает в некоторой точке $t_0\in[\tau^*,\sigma)$ свое наименьшее на $[\tau^*,\sigma]$ отрицательное значение, не большее, чем $(-1)\varsigma^*(T_0,M,L)$. Поэтому (I4),(I5) имеют место при $T_1=t^*=t_0$, $L_0=L$, и, согласно (25) $|p_t(0,t_0)|<\varsigma^*(T_0,\hat{M},L)$. Таким образом, $p_{tt}(0,t)\leq 0$ на $[\tau^*,T^*)$, и, следовательно, альтернатива I)-2) справедлива в случае б.2). Легко видеть, что в случае в) альтернатива I)-2) также справедлива. Покажем теперь, что утверждение 2) альтернативы I)-2) не имеет места. Допустим противоположное. Тогда $p(0,t)\in C[0,T^*]$. Поэтому в силу (7)-(8) $(p,q)\in C(\overline{G}_{T^*})$. Из (2I) вытекает, что $|q_t|,|\alpha|,|\beta|\leq C(M)$ в G_{T^*} и в силу (20) $q_t\in C(\overline{G}_{T^*})$. Положим $q^*=q(0,T^*)$, $q^*_t=q_t(0,T^*)$, $\left(p^*=p(0,T^*)\right)$. Легко видеть, что

$$A_p(T^*,p^*,q^*)=0,\ A_t(T^*,p^*,q^*)+A_q(T^*,p^*,q^*)q^*_t=0 \tag{27}$$

Поэтому из (I3) для любого $t<T^*$ и достаточно близкого к T^* при некотором $\tau\in(t,T^*)$ имеем [7]

$$|p_t(0,t)|=\left|\frac{\frac{d}{dt}\left[A_t(t,p(0,t),q(0,t))+A_q(t,p(0,t),q(0,t))q_t(0,t)\right]}{\frac{d}{dt}\left[A_p(t,p(0,t),q(0,t))\right]}\right|_{t=\tau} \tag{28}$$

Из (I2), учитывая (I8), имеем

$$\|q_{tt}\|_t\leq C(M)\left[1+|p_t(0,t)|+\int_0^t\|q_{tt}\|_\eta\,d\eta\right],\ \theta^*<t<T^*$$

Поэтому $|q_{tt}(0,t)|\leq C(M)\left[1+|p_t(0,t)|\right]$, и из (28) вытекает, что $|p_t(0,t)|\not\to\infty$ при $t\to T^*$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Функции $p\in C(\overline{G}_{T^*})$, $q\in C_1(\overline{G}_{T^*})$ и $p_x,p_t,q_{tt},q_{xt},q_{xx}$ равномерно ограничены в G_{T^*}.

Лемму 3 нетрудно доказать, пользуясь (I7)-(20),(I2), леммами I, 2 и леммой Гронуолла [6]. В силу леммы 3 имеем (27).

Условимся обозначать через $\varphi(t)$ и $\varphi(t,p)$ произвольные функции класса $C_1([0,T^*]\times R^1)$, обращающиеся в ноль вместе с первыми производными по t и по p в точке (T^*,p^*).

Лемма 4. Функция $p = p(0,t)$ удовлетворяет при $0 \le t < T^*$ уравнению

$$\frac{dp}{dt} = \frac{C_1(t-T^*) + C_2(p-p^*) + \varphi_1(t,p)}{C_3(t-T^*) + C_4(p-p^*) + \varphi_2(t,p)} \qquad (29)$$

где $C_4 = A_{pp}(T^*, p^*, q^*) \neq 0$.

Доказательство. Учитывая (27), рассмотрим (13). В силу леммы 3 при $(t,p) \in [0,T^*] \times R^1$

$$A_p(t,p,q(0,t)) = C_3(t-T^*) + C_4(p-p^*) + \varphi(t,p) \qquad (30)$$

Аналогично представимы $A_t(t,p,q(0,t))$, $A_q(t,p,q(0,t))$. Остается показать, что при $0 \le t \le T$

$$q_t(0,t) = q_t^* + C_5(t-T^*) + C_6(p(0,t)-p^*) + \varphi(t,p(0,t)) \qquad (31)$$

Согласно (10)

$$q_t(0,t) = H_0(t) + \mathcal{F}_1(0,t) + \mathcal{F}_2(0,t) \qquad (32)$$

где $H_0(t) = q_t(\nu t, 0)$; $\mathcal{F}_1(x,t) = \int\limits_0^t S(\chi(\tau,x,t),\tau)\,d\tau$; $S(x,t) =$

$= Q_t[p,q]_{(x,t)} + Q_q[p,q]_{(x,t)} q_t(x,t)$; $\mathcal{F}_2(x,t) = \int\limits_0^t Q_p[p,q]p_t\Big|_{(\chi(\tau,x,t),\tau)} d\tau$

Так как $H_0 \in C_1[0,T^*]$, то при $0 \le t \le T^*$ $H_0(t) = H_0(T^*) + H_0'(T^*)(t-T^*) + \varphi(t)$. Покажем, что аналогично представимы $\mathcal{F}_i(0,t), i=1,2$.

В силу леммы 3 при $0 \le t \le T^*$

$$\mathcal{F}_1(0,t) = \mathcal{F}_1(0,T^*) + \int\limits_0^t [S(\chi(\tau,0,t),\tau) - S(\chi(\tau,0,T^*),\tau)]d\tau + S(0,T^*)(t-T^*) -$$

$$- \int\limits_t^{T^*} [S(\chi(\tau,0,T^*),\tau) - S(0,T^*)]d\tau = \mathcal{F}_1(0,T^*) + (t-T^*)\Big\{S(0,T^*) +$$

$$+ \int\limits_0^{T^*} \Big[\frac{dS(\chi(\tau,0,t),\tau)}{dt}\Big]\Big|_{t=T^*} d\tau\Big\} + \varphi(t)$$

Учитывая (9), запишем $\mathcal{F}_2(0,t)$ в виде $\mathcal{F}_2(0,t) = \sum\limits_{i=1}^{3} H_i(t)$, где

$$H_1(t) = \int\limits_0^{\nu t(\lambda+\nu)^{-1}} Q_p[p,q]p_t\Big|_{(\chi(\tau,0,t),\tau)} d\tau; \quad H_2(t) = \gamma \int\limits_0^t Q_p[p,q]_{(\xi_t,\pi_t)} p_t(0,\xi)\,d\xi;$$

$$H_3(t)=\gamma\int_0^t Q_p[p,q]_{(\xi_t,\pi_t)}\left\{\int_\varrho^{\pi_t} f[p,q,p_t,q_t]_{(x(\sigma,0,\varrho),\sigma)}d\sigma\right\}d\varrho\ ;$$

$$\gamma=\lambda(\lambda+\nu)^{-1},\ \xi_t=\lambda\nu(t-\varrho)(\lambda+\nu)^{-1},\ \pi_t=(\lambda\varrho+\nu t)(\lambda+\nu)^{-1}.$$

Легко видеть, что $H_s\in C_1[0,T^*], s=1,3$. При $0\le t\le T^*$

$$H_2(t)=H_2(T^*)+\gamma Q_p(T^*,p^*,q^*)(p(0,t)-p^*)+H_4(t)+H_5(t)\ ,\text{ где}$$

$$H_4(t)=\gamma\int_0^t\left\{Q_p[p,q]_{(\xi_t,\pi_t)}-Q_p[p,q]_{(\xi_{T^*},\pi_{T^*})}\right\}p_t(0,\varrho)d\varrho,$$

$$H_5(t)=-\gamma\int_t^{T^*}\left\{Q_p[p,q]_{(\xi_{T^*},\pi_{T^*})}-Q_p(T^*,p^*,q^*)\right\}p_t(0,\varrho)d\varrho$$

В силу леммы 3 $H_4\in C_1[0,T^*]$, а $H_5=\varphi(t)$. Теперь (3I) очевидно. Лемма 4 доказана.

Ниже предполагается, что $\Delta\equiv C_2C_3-C_1C_4\neq 0$.

Лемма 5. Существует и конечен $\lim\limits_{t\to T^*}p_t(0,t)$

Действительно, определим на $[0,T^*)$ функцию $\tau=\tau(t)$, полагая $\tau=\int_0^t|A_p(\eta,p(0,\eta),q(0,\eta))|^{-1}d\eta$, и обозначим через $p(\tau)=p(0,t(\tau))$, $0\le\tau<\infty$, где $t=t(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\tau(t)$. В силу леммы 4 $(t(\tau),p(\tau))$ есть решение на $[0,\infty)$ системы

$$\frac{dt}{d\tau}=C_3(t-T^*)+C_4(p-p^*)+\varphi_2(t,p);\ \frac{dp}{d\tau}=C_1(t-T^*)+C_2(p-p^*)+\varphi_1(t,p)$$

стремящееся при $\tau\to\infty$ к состоянию равновесия (T^*,p^*) . В силу теоремы Бендиксона [8], неравенства $t(\tau)<T^*$ и леммы 2 имеет место утверждение леммы 5.

Из (29),(30),(5) при $0\le t<T^*$ имеем

$$\left[C_3(t-T^*)+C_4(p(0,t)-p^*)+\varphi_2(t,p(0,t))\right]\frac{dp(0,t)}{dt}=$$

$$=C_1(t-T^*)+C_2(p(0,t)-p^*)+\varphi_1(t,p(0,t))$$

Отсюда в силу леммы 5 следует, что $p_t(0,T^*-0)$ совпадает с одним из корней w_i, $i=1,2$, уравнения $(C_3+C_4 w)w = C_1 + C_2 w$, и так как $\Delta \neq 0$, то $C_3 + C_4 w_i \neq 0$, $i=1,2$. Очевидно, что $(C_3-C_2)^2 + 4C_1C_4 \geq 0$. Поэтому соответствующее уравнению (29) характеристическое уравнение $\lambda^2 - (C_2+C_3)\lambda + \Delta = 0$ имеет действительные корни. Следовательно, особая точка (T^*, p^*) уравнения (29) есть либо седло (если $\Delta < 0$), либо узел (если $\Delta > 0$) [5]

Замечание I. Если $C_2 + C_3 = 0$, то $\Delta < 0$, и, следовательно, $(C_3-C_2)^2 + 4C_1C_4 > 0$. Поэтому $w_1 \neq w_2$. Занумеруем корни w_i так, чтобы имело место равенство $w_1 = p_t(0,T^*-0)$.

Теорема I. Функции $p \in C_1(\overline{G}_{T^*})$, $q \in C_2(\overline{G}_{T^*})$.

Действительно, так как $p_t(\varsigma(x,t),\theta(x,t)) \in C(\overline{G}_{T^*})$, справедлива лемма 3 и имеет место (9), то $p_t \in C(\overline{G}_{T^*})$. В силу (I) и $p_x \in C(\overline{G}_{T^*})$. Пользуясь теперь (II) и (I2), нетрудно последовательно установить, что $\mathcal{F}_t \in C(\overline{G}_{T^*})$ и $q_{tt} \in C(\overline{G}_{T^*})$. В силу (2) $q_{xt}, q_{xx} \in C(\overline{G}_{T^*})$.

Теорема 2. Величина $\Delta < 0$

Действительно, исходя из (I3) и учитывая, что $q(0,t) \in C_2[0,T^*]$, вычислим постоянные C_2, C_3 в (29). Легко видеть, что $C_2 = -[A_{tp}(T^*,p^*,q^*) + A_{qp}(T^*,p^*,q^*)q_t^*]$ и $C_3 = -C_2$. Согласно замечанию I $\Delta < 0$.

§ 2. Построение решения задачи (I)-(4) в $\overline{G}_T$ при $T > T^*$.

I°. Определение. Вектор-функция (p,q), определенная в $\overline{G}_T$, $T^* < T \leq \mathring{T}$, называется решением задачи (I)-(4) в $\overline{G}_T$, если $p \in C(\overline{G}_T)$, $p \in C_1(\overline{G}_T^{T^*})$, $p \in C_1(\overline{\mathcal{D}}_T^{T^*})$, $q \in C_1(\overline{G}_T)$ и (p,q) удовлетворяет (I)-(4) при соответствующих $(x,t) \in \overline{G}_T$.

Замечание 2. Если (p,q) есть решение задачи (I)-(4) в $\overline{G}_T$, $T^* < T \leq \mathring{T}$, и $\mathring{p}_t(0,T^*) = p_t(0,T^*+0)$ +), то в силу (9) и леммы Гронуолла [6] $p_t(\lambda(t-T^*)+0,t) = p_t(\lambda(t-T^*)-0,t)$ при $T^* < t \leq T$, и, следовательно, $p \in C_1(\overline{G}_T)$.

+) Выражение $p_t(0,T^*+0)$ ниже понимается как $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} p_t(0,T^*+\varepsilon)$.

Лемма 6. Пусть (p,q) есть решение задачи (I)-(4) в $\overline{G}_T$, $T^*< T\leq \mathring{T}$. Тогда $q\in C_2(\overline{D}_T^{T^*})$, $q\in C_2(\overline{G}_T^{T^*})$.

Доказательство леммы 6, аналогичное доказательству леммы I, опускается. Отметим, что вектор-функция (p,q,p_t,q_t,q_{tt}) удовлетворяет в $\overline{G}_T$ системе (7)-(I0), (I2).

Для произвольного $T^*< T\leq \mathring{T}$ введем следующие обозначения:

I) $\mathfrak{N}_T$ - множество вектор-функций $u=(u^1,u^2,u^3,u^4,u^5)$, определенных в $\overline{G}_T$, и таких, что $u^i\in C(\overline{G}_T)$, $i=1,2,4$, и $u^j\in C(\overline{G}_T^{T^*})$, $u^j\in C(\overline{D}_T^{T^*})$ $j=3,5$ (функции u^3,u^5, вообще говоря, двузначные на характеристике $x=\lambda(t-T^*)$), и $(u^1,u^2,u^3,u^4,u^5)=(\mathring{p},\mathring{q},\mathring{p}_t,\mathring{q}_t,\mathring{q}_{tt})$ в $\overline{G}_{T^*}$;

$$\|u\|_T=\sum_{i=1,2,4}\max_{\overline{G}_T}|u^i|+\sum_{j=3,5}\Big[\max_{\overline{G}_T^{T^*}}|u^j|+\max_{\overline{D}_T^{T^*}}|u^j|\Big]$$

$$S_R(T)=\{u: u\in\mathfrak{N}_T,\ \|u\|_T\leq R\},\quad 0<R<\infty;$$

2). $\Omega(t;u)$ - произвольное отображение $\mathfrak{N}_T$ в $C[T^*,T]$ такое, что если $u_s\in S_R(T)$, $s=1,2$, то при $t\in[T^*,T]$

$$|\Omega(t;u_1)-\Omega(t;u_2)|\leq C(R)(t-T^*)^2\|u_1-u_2\|_T,$$

$$|\Omega(t;u_1)|\leq C(R)(t-T^*)^2$$

3). $\omega(t)$ - произвольная функция класса $C_1[T^*,T]$ такая, что $\omega(T^*)=\omega'(T^*)=0$.

4). $\widetilde{\Omega}(t;u)$, $\widetilde{\omega}(t)$ - выражения вида $(t-T^*)^{-1}\Omega(t;u)$, $(t-T^*)^{-1}\omega(t)$ соответственно.

Лемма 7. Пусть (p,q) есть решение задачи (I)-(4) в $\overline{G}_T$, $T^*< T\leq \mathring{T}$. Тогда при $T^*\leq t\leq T$

$$A_t(t,p(0,t),q(0,t))+A_q(t,p(0,t),q(0,t))q_t(0,t)=C_1(t-T^*)+ C_2(p(0,t)-p^*)+\Omega^1(t;\widetilde{u})+\omega^1(t) \tag{33}$$

$$A_p(t,p(0,t),q(0,t))=C_3(t-T^*)+C_4(p(0,t)-p^*)+\Omega^2(t;\widetilde{u})+\omega^2(t) \tag{34}$$

где вектор-функция $\widetilde{u}=(p,q,p_t,q_t,q_{tt})$

Доказательство. Покажем, что при $t \in [T^*, T]$

$$q_t(0,t) = q_t^* + C_5(t - T^*) + C_6(p(0,t) - p^*) + \Omega(t;\tilde{u}) + \omega(t) \qquad (35)$$

Действительно, (32) имеет место при $t \in [T^*, T]$. Преобразуем $\mathcal{F}_i(0,t)$, $i = 1, 2$. Принимая во внимание теорему I, при $T^* \leq t \leq T$ имеем

$$\mathcal{F}_1(0,t) = \mathcal{F}_1(0,T^*) + (t - T^*)\Big\{S(0\, T^*) + \int_0^{T^*} \frac{dS(\chi(\tau,0,t),\tau)}{dt}\Big|_{t=T^*}\Big\}d\tau +$$

$$+ \omega(t) + \int_{T^*}^{t}\Big[S(\chi(\tau,0,t),\tau) - S(0,T^*)\Big]d\tau \qquad (36)$$

Проведем последовательно следующие преобразования подынтегрального выражения в $\int_{T^*}^{t}$: I) заменим $p(\xi,\tau)$, $q(\xi,\tau)$, $q_t(\xi,\tau)$, где $\xi = \chi(\tau,0,t)$, соответственно на $p(\xi,T^*) + \int_{T^*}^{\tau} p_t(\xi,\eta)d\eta$, $q(\xi,T^*) + \int_{T^*}^{\tau} q_t(\xi,\eta)d\eta$, $q_t(\xi,T^*) + \int_{T^*}^{\tau} q_{tt}(\xi,\eta)d\eta$; полученное подынтегральное выражение обозначим через $Z_1(t,\tau;\tilde{u})$, 2) заменим в $Z_1(t,\tau;\tilde{u})$ функции p_t, q_t, q_{tt} при $\eta > T^*$ на u^3, u^4, u^5 соответственно, где u^j, $j = 3,4,5$ – компоненты произвольной вектор-функции $u = \{u^i\} \in \mathcal{U}_T$; полученное выражение обозначим через $Z_1(t,\tau;u)$. В силу теоремы I $\int_{T^*}^{t} Z_1(t,\tau;u)d\tau = \Omega(t;u)$, и, следовательно, $\int_{T^*}^{t} Z_1(t,\tau;\tilde{u})d\tau = \Omega(t;\tilde{u})$. При $t > T^*$ $\mathcal{F}_2(0,t) = \sum_{i=1}^{3} H_i(t)$. В силу теоремы I

$$H_2(t) = H_2(T^*) + \gamma Q_p(T^*, p^*, q^*)(p(0,t) - p^*) + \omega(t) + H_6(t) + H_7(t), \text{ где}$$

$$H_6(t) = \gamma \int_0^{\theta(t)} \Big\{Q_p[p,q]_{(\xi_t,\pi_t)} - Q_p[p,q]_{(\xi_{T^*},\pi_{T^*})}\Big\} p_t(0,\rho)d\rho,$$

$$\theta(t) = T^* - \nu\lambda^{-1}(t - T^*)$$

$$H_7(t) = \gamma \int_{\theta(t)}^{t} \Big\{Q_p[p,q]_{(\xi_t,\pi_t)} - Q_p(T^*,p^*,q^*)\Big\} p_t(0,\rho)d\rho$$

Отметим, что $H_6(t) \in C_1[T^*, T]$, и $H_6^{(s)}(T^*) = H_4^{(s)}(T^*)$, $s = 0,1$

Проведем последовательно следующие преобразования подынтегрального выражения в интеграле $H_7(t)$: 1) заменим $p(\xi_t,\pi_t)$, $q(\xi_t,\pi_t)$ на $p(\xi_t,T^*)+\int\limits_{T^*}^{\pi_t} p_t(\xi_t,\eta)d\eta$, $q(\xi_t,T^*)+\int\limits_{T^*}^{\pi_t} q_t(\xi_t,\eta)d\eta$ соответственно; полученное подынтегральное выражение обозначим через $Z_2(t,\rho;\tilde{u})$; 2) заменим в $Z_2(t,\rho;\tilde{u})$ функции $p_t(\xi_t,\eta), p_t(0,\rho), q_t(\xi_t,\eta)$ на $u^3(\xi_t,\eta)$, $u^3(0,\rho)$, $u^4(\xi_t,\eta)$ соответственно, где u^j , $j=3,4$ – компоненты произвольной вектор-функции $u=\{u^i\}\in\mathcal{H}_T$; полученное выражение обозначим через $Z_2(t,\rho;u)$. В силу теоремы I $\int\limits_{\theta(t)}^{t} Z_2(t,\rho;u)d\rho=\Omega(t;u)$, и, следовательно, $\int\limits_{\theta(t)}^{t} Z_2(t,\rho;\tilde{u})d\rho=\Omega(t;\tilde{u})$

Итак, при $T^*\le t\le T$

$$H_2(t)=H_2(T^*)+\gamma Q_p(T^*,p^*,q^*)(p(0,t)-p^*)+H_4(T^*)+H_4'(T^*)(t-T^*)+ \\ +\omega(t)+\Omega(t;\tilde{u}) \tag{37}$$

Аналогично устанавливается, что при $T^*\le t\le T$

$$H_3(t)=H_3(T^*)+H_3'(T^*)(t-T^*)+\omega(t)+\Omega(t;\tilde{u}) \tag{38}$$

Учитывая (36)-(38), из (32) нетрудно получить (35). Теперь для доказательства (33), (34) остается воспользоваться формулой Тейлора и заметить, что при $T^*\le t\le T$, $q(0,t)=q^*+q_t^*(t-T^*)+\omega(t)+\Omega(t;\tilde{u})$. Последнее равенство устанавливается с помощью преобразований уравнения (8), аналогичных изложенным. Лемма 7 доказана.

Замечание 3. Если (p,q) есть решение задачи (I)-(4) в $\bar{G}_T$, $T^*<T\le\dot{T}$, и $A_p(t,p(0,t),q(0,t))\ne 0$ на $[T^*,T]$, то функция $p=p(0,t)$ удовлетворяет при $T^*\le t\le T$ уравнению

$$\frac{dp}{dt}=\frac{C_1(t-T^*)+C_2(p-p^*)+\Omega^1(t;u)+\omega^1(t)}{C_3(t-T^*)+C_4(p-p^*)+\Omega^2(t,u)+\omega^2(t)} \tag{39}$$

где вектор-функция $u=(p,q,p_t,q_t,q_{tt})$.

Отметим, что какова бы ни была вектор-функция $u\in\mathcal{H}_T$, $T^*<T\le\dot{T}$, особая точка (T^*,p^*) уравнения (39) есть седло.

2^0. Пусть вектор-функция $u \in \mathfrak{N}_T$, $T^* < T \leq \mathring{T}$, а $\rho(t;u)$ есть произвольное решение уравнения (39) на $[T^*, T]$ +) такое, что $\rho(T^*;u) = \rho^*$.
Для $s=0,1$ обозначим через

$$z_s(x,t;u) = \begin{cases} \dfrac{d^s \rho(t-\lambda^{-1}x;u)}{dt^s} & \text{при } (x,t) \in \overline{G}_T,\ t \geq \lambda^{-1}x + T^* \\ \dfrac{\partial^s \mathring{\rho}(\varrho(x,t), \theta(x,t))}{\partial t^s} & \text{при } (x,t) \in \overline{G}_T,\ t < \lambda^{-1}x + T^* \end{cases}$$

Проведем последовательно следующие преобразования правых частей уравнений (7)-(10),(12):

1) в (7), (9) заменим $\dfrac{\partial^s \rho(\varrho(x,t), \theta(x,t))}{\partial t^s}$ на $z_s(x,t;u)$, $s=0,1$;

2) в (11) в выражение $\dfrac{\lambda}{\lambda+\nu}\left(\mathcal{Q}_\rho[\rho,q]\rho_t\right)_{(x,t)}$ вместо $\rho_t(x,t)$ подставим правую часть (9);

3) всюду в (7)-(10), (12) заменим $\rho, q, \rho_t, q_t, q_{tt}$ на u^1, u^2, u^3, u^4, u^5 соответственно.

Обозначим через $V(u)$ вектор-функцию, полученную в результате проведенных преобразований правых частей уравнений (7)-(10), (12). Таким образом, если (ρ, q) есть решение задачи (1)-(4) в $\overline{G}_T$, и $A_\rho(t, \rho(0,t), q(0,t)) \neq 0$ на $(T^*, T]$, то, полагая $\tilde{u} = (\rho, q, \rho_t, q_t, q_{tt})$ и $\rho(t;\tilde{u}) = \rho(0,t)$, получим, что вектор-функция $\tilde{u} \in \mathfrak{N}_T$ есть решение уравнения

$$u = V(u) \tag{40}$$

Лемма 8. Пусть вектор-функция $u = \{u^i\} \in \mathfrak{N}_T$, $T^* < T \leq \mathring{T}$, есть решение уравнения (40) в $\overline{G}_T$. Тогда вектор-функция (ρ, q), где $\rho = u^1$, $q = u^2$, есть решение задачи (1)-(4) в $\overline{G}_T$, и $u^3 = \rho_t$, $u^4 = q_t$, $u^5 = q_{tt}$.

Доказательство леммы 8, аналогичное доказательству леммы 1 из [1], опускается.

+) Под решением уравнения (39) на $[T^*, T]$ ниже всегда подразумевается решение класса $C_1[T^*, T]$.

3^0. Установим существование функций $p(t;u)$. Для $0<\varepsilon,\rho<\infty$, $T^*\le T\le \mathring{T}$, обозначим через

$$Ш_\rho = \{(t,p): T^*\le t\le T,\ p\in R^1,\ (t-T^*)^2+(p-p^*)^2\le \rho^2\}$$

$$K^\varepsilon_{w_i}(T)=\{(t,p): T^*<t\le T,\ (w_i-\varepsilon)(t-T^*)\le p-p^*\le (w_i+\varepsilon)(t-T^*)\}$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ такое, что $|C_3+C_4 w|\geqslant \frac{1}{2}|C_3+C_4 w_i|$ при $w\in[w_i-\varepsilon, w_i+\varepsilon]$, $i=1,2$, и $K^\varepsilon_{w_1}(\mathring{T})\bigcap K^\varepsilon_{w_2}(\mathring{T})=\varnothing$. В силу свойств функций $\Omega^i(t;u)$, $\omega^i(t)$ и неравенства $\Delta\ne 0$ имеют место следующие утверждения:

I) по любому $0<R<\infty$ найдется такое число $0<\rho_0(R)<\infty$, что каковы бы ни были $T^*<T\le\mathring{T}$ и вектор-функция $u\in S_R(T)$ в круге $Ш_{\rho_0(R)}$ не существует отличных от (T^*,p^*) особых точек уравнения (39);

2) по любому $0<R<\infty$ найдется число $T^*<T_0(R)\le\mathring{T}$ такое, что $K^\varepsilon_{w_i}(T_0(R))\in Ш_{\rho_0(R)}$, $i=1,2$, и каковы бы ни были вектор-функция $u\in S_R(T_0(R))$ и точка $(t,p)\in K^\varepsilon_{w_i}(T_0(R))$, $i=1,2$,

$$\left|C_3+C_4\frac{p-p^*}{t-T^*}+\widetilde{\Omega}^2(t;u)+\widetilde{\omega}^2(t)\right|\geqslant\frac{1}{4}|C_3+C_4 w_i| \tag{41}$$

Обозначим через

$$\psi(w,t;u)=[C_1+C_2 w+\widetilde{\Omega}^1(t;u)+\widetilde{\omega}^1(t)][C_3+C_4 w+\widetilde{\Omega}^2(t;u)+\widetilde{\omega}^2(t)]^{-1}-w$$

$$\psi(w)=[C_1+C_2 w][C_3+C_4 w]^{-1}-w;\quad \varphi(w,t;u)=\psi(w,t,u)-\psi(w)$$

Так как $\psi(w_i)=0$ и $\psi'(w_i)<0$, то $\psi(w_i+\varepsilon)<0$, $\psi(w_i-\varepsilon)>0$, $i=1,2$, при достаточно малом $\varepsilon>0$. Легко видеть, что $\varphi(w_i\pm\varepsilon,t;u)=\widetilde{\omega}^{\pm}(t)+\widetilde{\Omega}^{\pm}(t;u)$. Поэтому по любому $0<R<\infty$ найдется такое $T^*<T_1(R)\le\le T_0(R)$, что $|\varphi(w_i\pm\varepsilon,t;u)|\le\frac{1}{2}|\psi(w_i\pm\varepsilon)|$, если $T^*\le t\le T_1(R)$, и, следовательно, $\psi(w_i+\varepsilon,t;u)<0$, $\psi(w_i-\varepsilon,t;u)>0$. Отсюда следует [8], что каковы бы ни были $0<R<\infty$ и $u\in S_R(T_1(R))$ имеют место следующие утверждения:

I) на $[T^*, T_1(R)]$ существуют решения $p_i(t;u)$, $i=1,2$, уравнения (39) такие, что $p_i(T^*;u)=p^*$, $\frac{dp_i(T^*;u)}{dt}=w_i$ и точка $(t,p_i(t;u))\in K^\varepsilon_{w_i}(T_1(R))$;

при $T^* \le t \le T_1(R)$; в силу (41) $\left| \frac{dp_i(t,u)}{dt} \right| \le C + C(R)(t-T^*)$;
2) каково бы ни было $T^* < \theta \le T_1(R)$ на $[T^*,\theta]$ не существует решений уравнения (39), проходящих через точку (T^*,p^*) и отличных от решений $p_i(t;u)$, $i=1,2$.

Для произвольных $u_1, u_2 \in S_R(T_1(R))$, $0<R<\infty$, оценим $\left| \frac{d^s[p_i(t,u_1) - p_i(t;u_2)]}{dt^s} \right|$, $s=0,1; i=1,2$. Обозначим через $v_i(t) = p_i(t;u_1) - p_i(t;u_2)$. В силу (39)

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{\Delta}{t-T^*} \cdot \frac{h_1(t)}{\ell_1(t)\ell_2(t)} v_i(t) + \frac{h_2(t)}{(t-T^*)^2\ell_1(t)\ell_2(t)} \tag{42}$$

где $\ell_j(t) = C_3 + C_4 \frac{p_i(t;u_j) - p^*}{t-T^*} + \widetilde{\Omega}^2(t;u_j) + \widetilde{\omega}^2(t)$,

$h_1(t) = 1 + C_2\widetilde{\Omega}^2(t,u_2) - C_4\widetilde{\Omega}^1(t,u_1) + C_2\widetilde{\omega}^2(t) - C_4\widetilde{\omega}^1(t)$,

$h_2(t) = [C_1(t-T^*) + C_2(p_i(t;u_2)-p^*) + \omega^1(t) + \Omega^1(t;u_1)]\widehat{\Omega}^2 -$
$- [C_3(t-T^*) + C_4(p_i(t;u_1)-p^*) + \omega^2(t) + \Omega^2(t;u_1)]\widehat{\Omega}^1$,

$\widehat{\Omega}^j = \Omega^j(t;u_2) - \Omega^j(t,u_1)$

Обозначим через $g_s(t) = h_s(t)\ell_1^{-1}(t)\ell_2^{-1}(t)$, $s=1,2$. Из свойств функций $p_i(t;u_j)$ и (41) вытекает, что по любому $0<R<\infty$ найдется такое число $T^* < T_2(R) \le T_1(R)$, что при любом $T^* < t \le T_2(R)$

$$C_7 \le g_1(t) \le C_8, \quad |g_2(t)| \le C(R)(t-T^*)\|u_2 - u_1\|_t^2 \tag{43}$$

Пользуясь (43) и учитывая, что $v_i(t) \to 0$ при $t \to T^*$, нетрудно показать, что при $T^* \le t \le T_2(R)$

$$v_i(t) = \int_{T^*}^{t} g_2(\tau) \exp\left[\Delta \int_{\tau}^{t} g_1(\eta)(\eta - T^*)^{-1} d\eta\right] d\tau \tag{44}$$

Из (44) и (42) в силу (43) имеем

$$\max_{T^* \le t \le T_2(R)} \left| \frac{d^s v_i(t)}{dt^s} \right| \le C(R)(t-T^*)^{2-s} \|u_2 - u_1\|_{T_2(R)}, \quad s=0,1; \ i=1,2 \tag{45}$$

4^0. Установим теперь существование решений задачи (I)-(4) при $t > T^*$.

Теорема 3. Найдется такое $T^* < \theta_0 \le \overset{\circ}{T}$, что при любом $T^* < \theta \le \theta_0$ в $\overline{G}_\theta$ существуют два и только два решения $(\overset{i}{p}, \overset{i}{q})$, $i = 1, 2$, задачи (I)-(4), и $\overset{1}{p} \in C_1(\overline{G}_\theta)$, $\overset{2}{p} \overline{\in} C_1(\overline{G}_\theta)$.

Доказательство. Выберем произвольное $0 < R < \infty$. Пусть числа $\varepsilon, T_2(R)$ и функции $p_i(t; u)$, $i = 1, 2$, те, которые введены в 3^0. Зафиксируем любое $T^* < T \le T_2(R)$. В шаре $S_R(T)$ пространства $\mathcal{H}_T$ рассмотрим уравнения

$$u = V_i(u), \quad i = 1, 2 \tag{46}$$

где оператор V_i получается из введенного в 2^0 оператора V при $p(t; u) = p_i(t; u)$. Из свойств функций $p_i(t; u)$ и неравенства (45) вытекает, что каковы бы ни были вектор-функции $u_j \in S_R(T)$, $j = 1, 2$, вектор-функции $V_i(u_j) \in \mathcal{H}_T$, и

$$\| V_i(u_1) - V_i(u_2) \|_T \le C(R)(T - T^*) \| u_1 - u_2 \|_T \tag{47}$$

$$\| V_i(u_j) \|_T \le C_9 + C(R)(T - T^*) \tag{48}$$

Положим $R_0 = C_9 + 1$. Пользуясь (47),(48), выберем $T^* < \theta_0 \le T_2(R_0)$ так, чтобы в шаре $S_{R_0}(\theta_0)$ к уравнениям (46) был применим принцип сжатых отображений. Обозначим через $u_i = (\overset{1}{u}_i, \overset{2}{u}_i, \overset{3}{u}_i, \overset{4}{u}_i, \overset{5}{u}_i)$ соответствующие решения уравнений (46). По лемме 8 вектор-функции $(\overset{i}{p}, \overset{i}{q}) = (\overset{1}{u}_i, \overset{2}{u}_i)$ есть решения задачи (I)-(4) в $\overline{G}_{\theta_0}$, и так как $\overset{i}{p}(0,t) = \overset{1}{u}_i(0,t) = p_i(t; u_i)$ на $[T^*, \theta_0]$, то $\overset{0i}{p}_t(0, T^* + 0) = w_i$. В силу замечания 2 $\overset{1}{p} \in C_1(\overline{G}_{\theta_0})$. Согласно замечанию I $w_2 \ne w_1$, и, следовательно, $\overset{2}{p} \overline{\in} C_1(\overline{G}_{\theta_0})$. Отметим, что в силу свойства I) функций $p_i(t; u)$, леммы 7 и неравенства (41)

$$A_p(t, \overset{i}{p}(0,t), \overset{i}{q}(0,t)) \ne 0 \quad \text{при} \quad t \in (T^*, \theta_0], \ i = 1, 2 \tag{49}$$

Допустим теперь, что (p, q) есть решение задачи (I)-(4) в $\overline{G}_\theta$, $T^* < \theta \le \theta_0$. Покажем, что либо $(p, q) = (\overset{1}{p}, \overset{1}{q})$, либо $(p, q) = (\overset{2}{p}, \overset{2}{q})$ в $\overline{G}_\theta$. Существует такое $T^* < \sigma \le \theta_0$, что $A_p(t, p(0,t), q(0,t)) \ne 0$ на $(T^*, \sigma]$. Допустим противное. Тогда найдется убывающая последовательность чисел t_n, сходящаяся к T^*, такая, что $A_p(t_n, p(0, t_n), q(0, t_n)) = 0$, $A_t(t_n, p(0, t_n), q(0, t_n)) + A_q(t_n, p(0, t_n), q(0, t_n)) \, q_t(0, t_n) = 0$. Поэтому в силу леммы 7 $C_1 + C_2 p_t(0, T^* + 0) = 0$, $C_3 + C_4 p_t(0, T^* + 0) = 0$, что противоречит неравенству $\Delta \neq 0$. Согласно замечанию 3 $\rho = \rho(0,t)$ есть решение на $[T^*, \sigma]$ уравнения (39) при $u = (\rho, q, p_t, q_t, q_{tt})$, проходящее через точку (T^*, ρ^*). Обозначим через $R^* = \max\{R_0, \|u\|_\theta\}$, $\theta^* = \min\{\sigma, \theta_0\}$. Тогда вектор-функции $u, u_i \in S_{R^*}(\theta^*)$, $i = 1, 2$, и согласно свойствам 1) и 2) функций $p_i(t; u)$ либо $\rho(0,t) = p_1(t; u)$, либо $\rho(0,t) = p_2(t; u)$ на $[T^*, \theta^*]$. Пусть для определенности $\rho(0,t) = p_1(t; u)$. Тогда вектор-функции u_1 и u являются решениями уравнения (46) при $i = 1$ в шаре $S_{R^*}(\theta^*)$. Пользуясь (47),(48), выберем такое $T^* < t^* < \theta^*$, чтобы в шаре $S_{R^*}(t^*)$ оператор V_1 удовлетворял условиям принципа сжатых отображений. Тогда $u = u_1$ в $\overline{G}_{t^*}$, и, следовательно, $(\rho, q) = (\overset{1}{\rho}, \overset{1}{q})$, в $\overline{G}_{t^*}$. Обозначим через $T_s = \sup\{T : T \in (T^*, \theta]$, $(\rho, q) = (\overset{1}{\rho}, \overset{1}{q})$ в $\overline{G}_T\}$. Покажем, что $T_s = \theta$. Допустим, что $T_s < \theta$. Так как $(\rho, q) = (\overset{1}{\rho}, \overset{1}{q})$ в $\overline{G}_{T_s}$ и имеет место (49), то существует такая функция $\mathcal{F}(t, q)$, определенная и однократно непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $(T_s, q(0, T_s))$, что

$$\rho(0,t) = \mathcal{F}(t, q(0,t)), \quad \overset{1}{\rho}(0,t) = \mathcal{F}(t, \overset{1}{q}(0,t)) \quad \text{на } [T_s, T_s + \delta] \tag{50}$$

где δ – некоторое положительное число. Вектор-функции (ρ, q) и $(\overset{1}{\rho}, \overset{1}{q})$ удовлетворяют в $\overline{G}_{T_s + \delta}$ системе (7),(8). Пользуясь (50) и тем, что $(\rho, q) = (\overset{1}{\rho}, \overset{1}{q})$ в $\overline{G}_{T_s}$, нетрудно получить противоречие с определением величины T_s. Следовательно, $T_s = \theta$

Теорема 3 доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг В.Н., Дифф. уравн., 9, № 10, 1973.
2. Гольдберг В.Н., ДАН СССР, 195, № 3, 1970.
3. Гольдберг В.Н., ДАН СССР, 214, № 2, 1974.
4. Гольдберг В.Н., ДАН СССР, 202, № 3, 1972.
5. Степанов В.В., Курс дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1953.
6. Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, Мир, 1965.
7. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
8. Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.