Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 68

ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КООРДИНАТНОМ И ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

М.А. Антонец, И.А. Шерешевский.

Горький – 1974 г.

Р е з ю м е

В работе исследуются s -числа некоторых относительно компактных возмущений равномерно эллиптических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в $L_2(R^n)$. Изучается дискретный спектр возмущенных операторов и свойства собственных функций, связанные с относительной компактностью возмущений в $L_p^\alpha(R^n)$.

§ 1. Введение

1.1. Пусть A_X есть замкнутый оператор в банаховом пространстве X, $\overline{D(A_X)}=X$ и оператор B является относительно компактным возмущением A_X. Рассмотрим банахово пространство Y, такое, что $D(A_X)\subset Y$, множество $D'(A_Y)=\{x\in D(A_X), A_X x\in Y\}$ плотно в Y и предположим, что сужение оператора A_X на $D'(A_Y)$ продолжается до замкнутого в Y оператора. Область определения полученного оператора обозначим $D(A_Y)$. Если $D'(A_Y)\supset D(A_Y)$ и B компактен относительно A в Y, то $D([A+B]_Y)=D(A_Y)$ [2]. Так как любой собственный вектор x оператора $A+B$ в X содержится в $D(A_X)$ и $Ax\in D(A_X)$, то $x\in D'(A_X)\subset D([A+B]_Y)$ и, следовательно, x является собственной функцией оператора $A+B$ в Y. Таким образом, в этом случае все собственные функции оператора $A+B$ в X содержаться в $D'(A_Y)$. Поэтому получение признаков компактности оператора B относительно A в различных пространствах позволяет более детально изучить свойства собственных функций оператора $A+B$ в X.

1.2. Если X –гильбертово пространство, A и B – самосопряженные операторы, то представляет интерес поведение s-чисел $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ оператора $B: D(A)\to X$ при $i\to\infty$ или, что то же самое, поведение s-чисел оператора $B(A-\lambda E)^{-1}$ в X для λ из резольвентного множества оператора A. Знание s-чисел оператора $B(A-\lambda E)^{-1}$ полезно при установлении существования волновых операторов пары A, $A+B$. В работе [3] показано, что для существования волновых операторов достаточно ядерности оператора $B(A-\lambda E)^{-m}$ хотя бы для одного целого $m\geq 0$.

Если B компактен относительно A, то предельные спектры операторов A и $A+B$ совпадают. Если при этом

$\inf A=0$, то оператор $A+B$ может иметь не более чем счетное число отрицательных собственных значений, накопляющихся к нулю.

Заметим, что для каждой положительной последовательности $\Pi=\{\pi_j\}_{j=1}^{\infty}$, такой, что $\pi_j\to 0$ при $j\to\infty$ и $\pi_{j+1}\le\pi_j$, множество σ_Π вполне непрерывных операторов B, s-числа которых удовлетворяют условию $s_j(B)\le C(B)\cdot\pi_j$, является двусторонним идеалом в кольце ограниченных операторов в X. При этом, если C_1 и C_2 – вполне непрерывные операторы, $C_1\in\sigma_\Pi$, $0\le C_2\le C_1$, то $C_2\in\sigma_\Pi$ [1]. Следующая лемма связывает свойства s-чисел оператора $B(A-\lambda E)^{-1}$ и отрицательного спектра оператора $A+B$.

Лемма 1.1. Пусть $A\ge 0$, B – самосопряженные операторы в X и B компактен относительно A. Пусть E_λ – спектральная функция оператора $A+B$, непрерывная справа. Тогда, если $B(A-\lambda E)^{-1}\in\sigma_\Pi$, то и $E_0(A+B)E_0\in\sigma_\Pi$.

Доказательство. Покажем, что оператор AE_0 ограничен. Действительно, из относительной компактности B следует [4], что для $x\in\mathfrak{D}(A)$, $\|Bx\|_X\le\varepsilon\|Ax\|_X+C(\varepsilon)\|x\|_X$, $\varepsilon>0$. Очевидно, для $\varkappa\in XE_0\varkappa\in\mathfrak{D}(A)$ и $\|AE_0\varkappa\|_X\le\|(A+B)E_0\varkappa\|_X+\|BE_0x\|_X$. откуда $\|AE_0\varkappa\|_X\le C_1(\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}\|x\|_X$.

Из ограниченности оператора AE_0 следует, что $BE_0=$ $=B(A-E)^{-1}(A+E)E_0\in\sigma_\Pi$. Кроме того, так как $E_0(A+B)E_0\le 0$ то $0\le E_0AE_0\le -E_0BE_0$, а значит и $E_0AE_0\in\sigma_\Pi$. Следовательно, $E_0(A+B)E_0\in\sigma_\Pi$. Лемма доказана.

1.3. Приведенные соображения применяются в работе к случаю возмущений равномерно эллиптических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами дифференциальными операторами меньшего порядка с негладкими коэффициентами. Ранее относительно компактные возмущения дифференциальных операторов изучались в работах Бирмана [11], Бальслева [13,14], Конба [4], Икебе и Като [10]. Результаты нашей работы, касающиеся "координатного представления" обобщают результаты этих работ. Некоторые результаты об относительной компактности возмущений оператора Лапласа в "импульсном представлении" содержится в работе Фадеева [15].

Определения исследуемых операторов и формулировка теорем, связывающих свойства коэффициентов возмущения с его относительной компактностью в пространствах $L_p(R^n)$, и поведением s-чисел возмущения в $L_2(R^n)$ собраны в § 2. Все результаты приводятся в "координатной" и "импульсной" формулировках, т.е., как для дифференциальных операторов, так и для соответствующих операторов умножения на функцию.

В § 3 приводятся доказательства сформулированных теорем.

В § 4 мы указываем некоторые возможности обобщения полученных результатов, и, в частности, получаем оценки отрицательного дискретного спектра возмущенного оператора, более точные, чем те, которые непосредственно следуют из леммы 1.1.

Авторы выражают благодарность Г.М.Жислину за внимание к работе и полезные дискуссии.

§ 2. Определения и основные результаты

2.1. Пусть $a(\xi)$ неотрицательная измеримая функция $\xi \in R^n$ и

$$C_1(1+|\xi|^{\alpha_1}) \geqslant 1+a(\xi) \geqslant C(1+|\xi|^{\alpha}) \quad \infty > \alpha \geqslant \alpha_1 \geqslant 0 \ , \ C_1, C > 0 \qquad (2.1)$$

$$a(0) = 0. \qquad (2.2)$$

Пусть P множество всех финитных из $L_\infty(R^n)$ и $\mathfrak{D}$ множество быстро убывающих бесконечно дифференцируемых на R^n функция. Для $p \in [1,\infty)$, $\overline{\mathfrak{D}}^{L_p} = L_p$ и $\overline{P}^{L_p} = L_p$. Определим оператор A соотношением:

$$(A\psi)(\xi) = a(\xi)\psi(\xi), \qquad (2.3)$$
$$\psi(\xi) \in P.$$

Для бесконечно дифференцируем х $a(\xi)$ определим оператор $\hat{A}$.

$$(\hat{A}\psi)(x) = \mathcal{F}^{-1}[a(\xi)\mathcal{F}\psi(x)] \ , \ \psi(x) \in \mathfrak{D} \qquad (2.4)$$

Здесь $\mathcal{F}$ - преобразование Фурье, $x \in R^n$. Для $p \in [1,\infty)$ оператор A единственным образом продолжается до замкнутого в $L_p(R^n)$ оператора, который мы обозначим A_p . Это следует, из того, что $A+E$ отображает P на P и $\|(A+E)^{-1}\psi\| \leq \|\psi\|_{L_p}$ для $\psi \in P$.

Покажем существование единственного замкнутого расширения оператора $\hat{A}$ в $L_p(R^n)$. Очевидно, $\hat{A}$ отображает $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}$ и из неравенств (2.1) и гладкости функции $a(\xi)$ следует, что на $\mathcal{D}$ оператор $(\hat{A}+E)$ есть оператор свертки с функцией из $L_1(R^n)$. По неравенству Юнга [5] такой оператор ограничем в $L_p(R^n)$, $p\in[1,\infty)$, откуда и следует утверждение. Соответствующие замыкания мы обозначим $\hat{A}_p$.

Операторы A_2 и $\hat{A}_2$ самосопряжены и унитарно эквивалентны в $L_2(R^n)$:

$$\hat{A}_2=\mathcal{F}^{-}A_2\mathcal{F}. \tag{2.5}$$

Это соотношение позволяет определить замкнутый оператор $\hat{A}_2$, не требуя гладкости функции $a(\xi)$. Из условий (2.1) и (2.2) следует, что спектр операторов A_2, $\hat{A}_2$ содержится в полуоси $[0,\infty]$.

Ниже мы рассмотрим некоторые классы возмущений операторов A_p, $\hat{A}_p$. При изучении оператора $\hat{A}_p$, $p\neq 2$ мы дополнительно предположим, что функция $(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}(1+a|\xi|)^{-1}$ является множителем Марцинкевича [6].

2.2. Введем для $q\in[1,\infty]$ пространства Марцинкевича $M_q(R^n)$ [7] всех измеримых на R^n функций $\psi(\xi)$, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_{M_q}=\sup_{\Omega\in R^n,\ mes\Omega<\infty}\left\{(mes\Omega)^{1/q-1}\int_\Omega|\psi(\xi)|d\xi\right\}.$$

Пусть оператор B задан формальным соотношением

$$(B\psi)(\xi)=\int\vartheta(\xi-\xi')\xi'^{m}\psi(\xi')d\xi',\ \vartheta(\xi)\in M_q(R^n), \tag{2.6}$$

где $m=(m_1\dots m_n)$ – целочисленный вектор, $m_i\geq 0$, $\xi^m=\xi_1^{m_1}\cdots\xi_n^{m_n}$, $|m|=\sum_{i=1}^{n}m_i$. В § 3 мы покажем, что для $\psi\in\mathcal{D}$, $B\psi\in L_p(R^n)$, $p>q$.

Теорема 2.1. Пусть $|m|<\alpha$, $\varkappa=\alpha-|m|$, $q\in[1,n/(n-\varkappa)]$ при $\varkappa\leq n$ или $q\in[1,\infty]$ при $\varkappa>n$, $p>q$ и $\vartheta(\xi)\in M_q(R^n)$. Тогда оператор B продолжается до ограниченного линейного оператора из $\mathcal{D}(A_p)$ в $L_p(R^n)$ и для него справедливы оценки

$$\|B\|_{D(A_p)\to L_p} \le C(p,q,\varkappa)\cdot\|\vartheta\|_{M_q}, \tag{2.7}$$

$$\|B\psi\|_{L_p} \le \varepsilon\|A_p\psi\|_{L_p} + C(\varepsilon)\|\psi\|_{L_p}, \quad \psi\in D(A_p). \tag{2.7a}$$

Пусть $L_q^{\gamma}(R^n)$ – лиувиллевские пространства [6].

Теорема 2.2. Если $\vartheta(\xi)\in L_q^{\gamma}(R^n)$, $\gamma>0$, $1<q<p$ и для некоторого целого $K>0$, $K\alpha-|m|-n(1-1/q)-\beta>0$ то
1) оператор $B(A_p+E)^{-K}$ вполне непрерывен в $L_p(R^n)$
2) при $p=2$ для числа $N(\varepsilon)$ s-чисел оператора больших $\varepsilon>0$ в $L_2(R^n)$ имеет место оценка.

$$N(\varepsilon)\le C\cdot\varepsilon^{-\max(n/\gamma,\, n/\beta)}, \quad \varepsilon\to 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим оператор B_1, заданный формальным соотношением:

$$(B_1\psi)(\xi)=\xi^m\int\vartheta(\xi-\xi')\psi(\xi')d\xi' = \tag{2.9}$$

$$=\sum_{\ell\le m} C_{\ell m}\int(\xi-\xi')^{\ell}\vartheta(\xi-\xi')(\xi')^{m-\ell}\psi(\xi')d\xi'.$$

Если $\xi^{\ell}\vartheta(\xi)\in M_q$, то для $\psi\in D$, $B_1\psi\in L_p$, так как из (2.9) следует, что оператор B_1 является суммой операторов типа B. Для оператора B_1 справедливы теоремы аналогичные теоремам 2.1, 2.2.

Теорема 2.1'. Пусть $|m|<\alpha$, $\varkappa_\ell=\alpha-|m-\ell|$, $\ell\le m$, $q_\ell\in\left[1,\frac{n}{n-\varkappa_\ell}\right]$ при $\varkappa_\ell\le n$, или $q_\ell\in[1,\infty]$ при $\varkappa_\ell>n$, $q_\ell<p$ и $\xi^{\ell}\vartheta(\xi)\in M_{q_\ell}$. Тогда оператор B_1 продолжается до ограниченного линейного оператора из $D(A_p)$ в $L_p(R^n)$ и для него имеют место оценки

$$\|B_1\|_{D(A_p)\to L_p} \le \sum_{\ell\le m} C(q_\ell,p,\varkappa_\ell)\|\xi^{\ell}\vartheta(\xi)\|_{M_{q_\ell}} \tag{2.10}$$

$$\|B_1\psi\|_{L_p} \le \varepsilon\|A_p\psi\|_{L_p} + C(\varepsilon)\|\psi\|_{L_p}, \quad \psi\in D(A_p). \tag{2.10a}$$

Теорема 2.2'. Если $\xi^{\ell}\vartheta(\xi)\in L^{\gamma}_{q_\ell}(R^n)$, $q_\ell < p$, $\ell \le m$ и для некоторого целого $K>0$, $K\alpha - |m-\ell| - n(1-1/q_\ell) > \beta > 0$ то 1) оператор $B_1(A_p+E)^{-K}$ вполне непрерывен в $L_p(R^n)$; 2) при $p=2$ для числа $N(\varepsilon)$ s-чисел оператора $B_1(A_2+E)^{-K}$ в $L_2(R^n)$, больших $\varepsilon>0$, справедлива оценка (2.8).

Следствие 2.1. 1) Если $\gamma > n$ то при достаточно большом K операторы $B(A_2+E)^{-K}$, $B_1(A_2+E)^{-K}$ ядерные.

2) Если в условиях теорем 2.2., 2.2'. можно положить $K = 1$, то при $\gamma > n$ для пары A_2, A_2+C ($C = B_1 + B$) существуют волновые операторы.

Первое утверждение немедленно следует из оценки (2.8). Для доказательства второго достаточно заметить, что при сделанных предположениях оператор $B_1 + B$ компактен относительно A_2 и воспользоваться упомянутым в § 1 признаком существования волновых операторов.

2.3. Положим

$$S_q=\{\vartheta(x),\ \sup_{x'\in R^n}\int_{|x|\le 1}|\vartheta(x-x')|^q\,dx<\infty\} \tag{2.11}$$

Пусть оператор $\hat{B}$ задан формальным соотношением:

$$(\hat{B}\psi)(x)=\vartheta(x)\,\partial^m\psi(x), \tag{2.12}$$

где $\partial^m=\dfrac{\partial^{m_1+\dots+m_n}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}$, $m_i \ge 0$. Очевидно, для любой функции $\psi\in C_0^\infty$, $\hat{B}\psi\in L_p$ для $p\le q$.

Теорема 2.3. Пусть $|m|<\alpha$, $\varkappa=\alpha-|m|$, $\vartheta(x)\in S_q$, $q>n/\varkappa$ при $p\varkappa\le n$, и $p\le q$. Тогда оператор $\hat{B}$ продолжается до ограниченного линейного оператора из $D(\hat{A}_p)$ в $L_p(R^n)$ и для него справедливы оценки

$$\|\hat{B}\|_{D(\hat{A}_p)-L_p}\le C\cdot\sup_{x'\in R^n}\Big\{\int_{|x-x'|\le 1}|\vartheta(x')|^q\,dx'\Big\}^{1/q}. \tag{2.13}$$

$$\|\hat{B}\psi\|_{L_p}\le\varepsilon\|\hat{A}_p\psi\|_{L_p}+C(\varepsilon)\|\psi\|_{L_p},\ \psi\in D(\hat{A}_p),\ \varepsilon>0. \tag{2.13a}$$

Обозначим $\vartheta_\gamma(x)=(1+|x|^2)^{\gamma/2}\vartheta(x)$, $\gamma>0$.

Теорема 2.4. Если $\vartheta_\gamma(x)\in S_q$, $q\geq p$ и для некоторого целого $k\geq 1$, $k\alpha-|m|-n/q>\beta>0$ то
1) оператор $\hat{B}(\hat{A}_p+E)$ вполне непрерывен в $L_p(R^n)$;
2) при $p=2$ для числа $N(\varepsilon)$ s-чисел оператора $\hat{B}(\hat{A}_2+E)^{-k}$ в $L_2(R^n)$, больших $\varepsilon>0$, справедлива оценка (2.8).

Рассмотрим оператор $\hat{B}_1$, задаваемый формальным выражением

$$(\hat{B}_1\psi)(x)=\partial^m\vartheta(x)\psi(x)=\sum_{\ell\leq m}{}^{\ell}\hat{C}_m(\partial^\ell\vartheta(x))\partial^{m-\ell}\psi(x). \tag{2.14}$$

Если $\partial^\ell\vartheta(x)\in S_q$, то при $q\geq p$ и $\psi\in C_0^\infty$, $B_1\psi\in L_p$. Для оператора $\hat{B}_1$ справедливы теоремы, аналогичные теоремам 2.3, 2.4.

Теорема 2.3'. Пусть $|m|<\alpha$, $\varkappa_\ell=\alpha-|m-\ell|$, $\ell\leq m$, $\partial^c\vartheta(x)\in S_q$, $q_\ell>n/\varkappa_\ell$ и $p\leq\min_\ell\{q_\ell\}$. Тогда оператор $\hat{B}_1$ продолжается до ограниченного линейного оператора из $D(\hat{A}_p)$ в $L_p(R^n)$ и для него справедливы оценки

$$\|\hat{B}_1\|_{D(\hat{A}_p)\to L_p}\leq C\cdot\max_{\ell\leq m}\left\{\sup_{x'}\int_{|x-x'|\leq 1}|\partial^\ell\vartheta(x)|^q d^\ell x\right\}^{1/p} \tag{2.15}$$

$$\|\hat{B}_1\psi\|_{L_p}<\varepsilon\|\hat{A}_p\psi\|_{L_p}+C(\varepsilon)\cdot\|\psi\|_{L_p},\ \varepsilon>0,\ \psi\in D(\hat{A}_p) \tag{2.15a}$$

Теорема 2.4'. Если $\partial^\ell\vartheta_\gamma(x)\in S_{q_c}$, $\min q_\ell\geq p$, $\ell\leq m$ и для некоторого целого $k>0$, $k\alpha-|m-\ell|-n/q_\ell$, то
1) оператор $\hat{B}$, $(\hat{A}_p+E)^{-k}$ вполне непрерывен в $L_p(R^n)$;
2) при $p=2$ для числа $N(\varepsilon)$ s-чисел оператора $\hat{B}_1(\hat{A}_2+E)^{-k}$ в $L_2(R^n)$, больших $\varepsilon>0$, справедлива оценка (2.8).

Также, как и выше, из теорем 2.4, 2.4' можно получить признак существования волновых операторов для пары $\hat{A}_2$, $\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{B}_1$. Этот признак несколько слабее полученного в [17] для случая $m=0$. В случае $m\neq 0$ в [17] операторы определены как квадратичные формы, поэтому полученный там критерий существенно отличается от нашего.

2.4. Из леммы 1.1. следует, что для числа отрицательных собственных значений оператора A_2+B+B_1 $(\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{B}_1)$, меньших ε, $\varepsilon > 0$, справедлива такая же оценка, как для числа s-чисел оператора $(B+B_1)(A_2+E)^{-1}$ (или $(\hat{B}+\hat{B}_1)\cdot(A_2+E)^{-1}$), больших $\varepsilon > 0$. Соответствующая оценка для этого оператора содержится в теореме 2.2 (2.2'.). Таким образом, эти теоремы позволяют оценивать асимптотику отрицательного дискретного спектра операторов A_2+B+B_1, $\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{B}_1$. Такие оценки являются, по-видимому, довольно грубыми и в некоторых случаях могут быть значительно улучшены. Соответствующие результаты приведены в § 4.

§ 3. Доказательство основных теорем

3.1. В этом разделе мы приведем доказательства теорем, сформулированных в предыдущем параграфе.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\vartheta_1(x)\in L_{q_1}(R^n)$, $\psi\in L_p$ и

$$q_1^{-1} + p^{-1} = p_1^{-1}\,,\quad p_1 \geq 1. \tag{3.1}$$

Тогда $\|\vartheta_1\cdot\psi\|_{L_{p_1}} \leq \|\vartheta_1\|_{L_{q_1}}\cdot\|\psi\|_{L_p}$. Следовательно, оператор $V_1: L_p \to L_{p_1}$, определяемый равенством $(V_1\psi)(\xi)=\vartheta_1(\xi)\psi(\xi)$ ограничен и

$$\|V_1\|_{L_p\to L_{p_1}} \leq \|\vartheta_1\|_{L_{q_1}}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. Пусть $\vartheta(\xi)\in M_q(R^n)$. Тогда оператор $V_2: L_{p_1}\to L_p$ определяемый равенством $(V_2\psi)(\xi)=\int\vartheta(\xi-\xi')\psi(\xi')d\xi'$ ограничен, если

$$p_1^{-1} + q^{-1} = 1+p^{-1}. \tag{3.3}$$

При этом

$$\|V_2\|_{L_{p_1}\to L_p} \leq C(p,p_1,q)\cdot\|\vartheta\|_{M_q}(R^n). \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $\chi_\Omega(\xi)$ – характеристическая функция множества $\Omega\in R^n$, $\operatorname{mes}\Omega<\infty$. Так как $M_\infty = L_\infty$, то

$$\left\|\int\vartheta(\xi-\xi')\chi_\Omega(\xi')d\xi'\right\|_{M_\infty} \leq (\operatorname{mes}\Omega)^{1-1/q}\|\vartheta\|_{M_q}. \tag{3.5}$$

С другой стороны,

$$\left\|\int\vartheta(\xi-\xi')\chi_\Omega(\xi')d\xi'\right\|_{M_q} \leq \tag{3.6}$$

$$\leq \sup_{\Omega'\subset R^n,\,\operatorname{mes}\Omega'<\infty}\left\{(\operatorname{mes}\Omega')^{1/q-1}\int_{\Omega'}\int_{\Omega}|\vartheta(\xi-\xi')d\xi\,d\xi'\right\}\leq \operatorname{mes}\Omega\cdot\|\vartheta\|_{M_q}.$$

Неравенства (3.5), (3.6) позволяют применить интерполяционную теорему Стэйна–Уэйса [8], из которой следует ограниченность оператора V_2 при условии (3.3) и оценка (3.4) для его нормы. Лемма доказана.

Пусть $\psi \in \mathcal{D}$. Тогда $\xi^m \psi \in \mathcal{D}$ для всех m и $\xi^m \psi \in L_p(R^n)$. Из доказанной леммы следует, что если $\vartheta(\xi) \in M_q$, то $B\psi \in L_p$, $p \geq q$, где оператор B определен соотношением (2.6).

В силу (2.1), для доказательства ограниченности оператора $B(A+E)^{-1}$ в $L_p(R^n)$ достаточно показать ограниченность в $L_p(R^n)$ оператора V, $(V\psi)(\xi) = \int \vartheta(\xi-\xi')(1+|\xi'|^2)^{-(\alpha-|m|)/2}\psi(\xi')d\xi'$. Так как $(1+|\xi|^2)^{-(\alpha-|m|)/2} \in L_{q_1}$ при $q_1 > n/(\alpha-|m|)$ то из (3.1), (3.3) следует, что оператор V можно представить в виде композиции $V_2 \cdot V_1$, где $\vartheta_1(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-(\alpha-|m|)/2}$, если $q_1^{-1} + q_2^{-1} = 1$ при некотором q_1, $q_1 > n/(\alpha-|m|)$. Последнее условие удовлетворяется, если $q < n/(n-\alpha+|m|)$. Оценка (2.7) следует теперь из (2.1), (3.2) и (3.4). Для доказательства оценки (2.7а) введем в $L_p(R^n)$ оператор (вообще говоря, неограниченный) K_γ умножения на функцию $(1+|\xi|^2)^\gamma$. Пусть $\chi_R(\xi)$ – характеристическая функция шара радиуса R в R^n. Тогда

$$(B\varphi)(\xi) = \int \vartheta(\xi-\xi')\chi_R(\xi')\xi'^m\varphi(\xi')d\xi' +$$

$$+\int \vartheta(\xi-\xi')(1-\chi_R(\xi'))(1+|\xi'|^2)^{-\alpha/2}\xi'^m(1+|\xi'|^2)^{\alpha/2}\varphi(\xi')d\xi'.$$

Поэтому

$$\|B\varphi\|_{L_p} \leq R^{|m|}\cdot C\cdot\|\vartheta\chi_R\|_{L_p\to L_p}\cdot\|\varphi\|_{L_p} + C\|\vartheta\|_{M_{q_1}}\cdot\|(1-\chi_R)\xi^m K_\alpha\|\cdot$$

$$\cdot L_{q_2}\|K_{-\alpha}\varphi\|_{L_p} \leq C\cdot\|\vartheta\|_{M_{q_1}}\cdot\|(1-\chi_R)\xi^m K_\alpha\|_{L_{q_2}}\cdot(\|A\varphi\|_{L_p} + \|\varphi\|_{L_p}) + C(R)\|\varphi\|_{L_p}.$$

Так как $\|(1-\chi_R)\xi^m K_\alpha\|_{L_{q_2}} \to 0$ при $R\to\infty$, то из этой оценки следует (2.7а). Теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2.2. Из (2.1) следует, что достаточно доказать утверждения теоремы для оператора V,

$$(V\psi)(\xi) = \int \vartheta(\xi-\xi')(1+|\xi|^2)^{-(k\alpha-|m|)/2}\psi(\xi')d\xi'.$$

Определим в $L_p(R^n)$ операторы K_β и J_γ соотношениями

$$(K_\beta\psi)(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-\beta/2}\psi(\xi), \quad \beta>0$$

$$(J_\gamma\psi)(\xi)=\int G_\gamma(|\xi-\xi'|)\psi(\xi')d\xi', \quad \gamma>0,$$

где $G_\gamma(|\xi|)$ – ядро Бесселя-Макдональда [6]. Операторы K_β и J_γ ограничены в любом $L_p(R^n)$, $p\in[1,\infty]$ и по определению пространств $L_p^\gamma(R^n)$ оператор J_γ является изометрическим изоморфизмом $L_p \to L_p^\gamma$. Поэтому

$$(V\psi)(\xi)=\iint \vartheta_\gamma(\xi-\xi')G_\gamma(\xi'-\xi'')(1+|\xi''|^2)^{-\frac{K\alpha-|m|}{2}}\psi(\xi'')d\xi'd\xi'',$$

где $\vartheta(\xi)=(J_\gamma\vartheta_\gamma)(\xi)$, $\vartheta_\gamma(\xi)\in L_q(R^n)$. Отсюда следует, что оператор V можно представить в виде композиции $V_\gamma\cdot(K_{-\delta_1}J_\gamma K_{\delta_2})$, где $(V_\gamma\psi)(\xi)=\int\vartheta_\gamma(\xi-\xi')(1+|\xi'|^2)^{-\delta_1/2}\psi(\xi')d\xi'$,

$\delta_2>\delta_1>n(1-1/q)$, $\delta_2=K\alpha-|r|$.

Оператор V_γ ограничен в L_p по теореме (2.1). Как показано в [9], оператор $K_{-\delta_1}J_\gamma K_{\delta_2}$ вполне непрерывен в L_p при $\delta_2>\delta_1$, $p<\infty$. Следовательно, оператор V вполне непрерывен в L_p, $\infty>p>q$.

При $p=2$ для числа s –чисел оператора $K_{-\delta_1}J_\gamma K_{\delta_2}$, превосходящих $\varepsilon>0$, справедлива оценка (2.8), где $\beta=\delta_2-\delta_1\neq\gamma$. В силу ограниченности оператора V_γ эта же оценка справедлива для оператора V. Теорема доказана.

Утверждения теорем 2.1', 2.2 непосредственно следуют из теорем 2.1, 2.2.

3.3. Доказательство теоремы 2.3. В случае $\alpha=2$, $m=0$, $n=3$ аналогичная теорема доказана в [10]. Случай $\alpha=2$, $m=0,1$ и n – произвольно рассматривался на том же пути в [18]. В общем случае доказательство можно получить, следуя методике этих работ, однако оно довольно громоздко. Мы используем для доказательства результаты работы [16]. Рассмотрим пространства $\ell_q(L_p)$, $1\le q$, $p\le\infty$ локально суммируемых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{\ell_q(L_p)}=\Big\{\sum_i\|\varphi\|^q_{L_p(Q_i)}\Big\}^{1/q}, \tag{3.7}$$

где Q_i – единичный куб в R^n, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ при $i = j$, $\bigcup_i Q_i = R^n$, а также и пространства Бесселевых потенциалов [6] функций из $\ell_q(L_p)$ которые в [16] обозначены $\ell_q(L_p)^\alpha$. Из теорем вложения [16] для этих пространств немедленно следует (2.13). Действительно, для $\psi \in C_0^\infty$

$$\|\hat{B}\psi\|_{L_p} = \|U\partial^m\psi\|_{\ell_p(L_p)} \le \|U\|_{m(L_q)} \|\partial^m\psi\|_{\ell_p(L_s)}, \tag{3.8}$$

где $s^{-1} = p^{-1} - q^{-1}$, $\|U\|_{m(L_q)} = \sup_i \|U\|_{L_p(Q_i)}$. Далее, $\|\partial^m\psi\|_{L_p(L_s)} \le \|J_{|m|}\psi\|_{L_p(L_s)}$ и из теоремы 1.3 [16] в условиях нашей теоремы следует, что

$$\|J_{|m|}\psi\|_{\ell_p(L_s)} = \|\psi\|_{\ell_p(L_s)^{|m|}} \le C\|\psi\|_{\ell_p(L_p)^\alpha} =$$
$$= C\|J_\alpha\psi\|_{L_p} \le C\|\psi\|_{D(\hat{A}_p)},$$

что и доказывает (2.13). Для доказательства (2.13а) следует на последнем шаге воспользоваться неравенством (1.13) из [16]. Теорема 2.3. доказана.

3.4. Доказательство теоремы 2.4. Так как композиция множителей Марцинкевича является снова множителем Марцинкевича, то достаточно доказать утверждение теоремы для оператора $\hat{V}$,

$$(\hat{V}\psi)(x) = \vartheta(x)(J_\varkappa\psi)(x), \quad \varkappa = k\alpha - |m|.$$

По условиям теоремы. оператор V можно представить в виде композиции $\hat{V}_\gamma \cdot (J_{-\delta_1} K_\gamma J_\varkappa)$ где $\varkappa > \delta_1 > \frac{n}{q}$, $\hat{V}_\gamma\psi(x) = \vartheta_\gamma(x)(J_\delta\psi)(x)$. Оператор $\hat{V}_\gamma$ ограничен в L_p по теореме 2.1. Оператор $J_{-\delta_1} K_\gamma J_\varkappa$ вполне непрерывен в L_p при $\delta_1 < \varkappa$. Следовательно, оператор $\hat{V}$ вполне непрерывен в L_p. Оценка (2.8) при $p = 2$ следует из ограниченности оператора $\hat{V}_\gamma$ и соответствующей оценки для оператора $J_{-\delta_1} K_\gamma J_\varkappa$ [9]. Теорема доказана.

Утверждения теорем 2.3', 2.4' непосредственно следуют из теорем 2.3, 2.4.

§ 4. Дополнения и обобщения

4.1. Как указано в § 1, оценки асимптотики дискретного спектра основанные на лемме 1.1, неточны. В некоторых случаях более точные оценки можно получить, основываясь на теоремах 2.2, 2.4 и соображениях, использованных для этой же цели в работах [11] , [12] .

Пусть A , B – самосопряженные операторы, $A \geq 0$ и B компактен относительно A . Обозначим $M(\lambda)$ число собственных значений оператора $A+B$, не превосходящих $-\lambda$, $\lambda \geq 0$ и $N(\lambda)$ – число собственных значений оператора $B(A+\lambda E)^{-1}$, больших или равных единице. Используя аналитичность отрицательных собственных значений оператора-функции $A+\mu^{-1}B$, $\mu > 0$ и неравенство $(B\varphi,\varphi) < 0$, справедливое для любой собственной функции отрицательного спектра оператора $A+\mu^{-1}B$, можно показать, что $M(\lambda) = N(\lambda)$ [11] . Для всех $p > 0$ имеет место неравенство [1] .

$$N(\lambda) \leq \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \mu_i^p \leq \sum_{i=1}^{N(\lambda)} s_i^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} s_i^p = \|B(A+\lambda)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}^p , \tag{4.1}$$

где μ_i – собственные значения, s_i – s-числа оператора $B(A+\lambda)^{-1}$, занумерованные в порядке убывания, $\mathfrak{S}_p$ – идеал кольца вполне непрерывных операторов, $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_p}^p$ – соответствующий след [1] .

Следующая теорема дает оценку правой части неравенства (4.1) для некоторых операторов.

4.2. Теорема 4.1. Пусть $a(\xi) \geq C|\xi|^{\alpha}$ и в условиях теоремы 2.2' $K = 1$. Тогда для отрицательного спектра оператора $A_2 + B + B_1$ имеют место оценки

$$M(\lambda) \leq C \cdot \begin{cases} \lambda^{-n(\alpha-\gamma)/\alpha\gamma'}, & \gamma' < \gamma \quad \text{если } 2\gamma < n,\ 2\gamma \leq \beta \quad (4.2а) \\ \lambda^{-n(\alpha-\gamma')/(\beta-\gamma)\alpha}, & \gamma' < \gamma \quad \text{если } 2\gamma < n,\ \beta < 2\gamma \leq 2\beta \quad (4.2б) \\ \lambda^{-n(\alpha-\beta)/\alpha\beta'}, & \beta' < \beta \quad \text{если } 2\beta < n,\ 2\beta \leq \gamma \quad (4.2в) \\ \lambda^{-n(\alpha-\beta')/(\gamma-\beta)\alpha}, & \beta' < \beta \quad \text{если } 2\beta < n,\ \gamma < 2\beta \leq 2\gamma \quad (4.2г) \end{cases}$$

Доказательство. Согласно (4.1), $M(\lambda) \leq \|(B+B_1)(A_2+\lambda)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}^p$, $p > 0$. По Теореме 2.1' оператор $(B+B_1)J_{-\gamma}K_{\alpha-\beta}$ ограничен в L_2 . Поэтому

$$\begin{aligned} M(\lambda) &\leq \|(B+B_1)J_{-\gamma_1}K_{\alpha-\beta}\|_{L_2\to L_2}^p \cdot \|K_{\beta-\alpha}J_{\gamma}(A_2+\lambda)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}^p \leq \\ &\leq C\|J_{\gamma}K_{\beta-\alpha}K_{\alpha}(\lambda^{2/\alpha})\|_{\mathfrak{S}_p}^p , \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $K_\alpha(\nu)$ — оператор умножения на функцию $(\nu+|\xi|^2)^{-\alpha/2}$. Последнее неравенство в (4.3) следует из ограниченности в L_2 операторов $K_{\beta-\alpha}\mathcal{J}_\gamma K_{\alpha-\beta}\mathcal{J}_{-\gamma}$ и $K_{-\alpha}(\lambda^{\varepsilon/\alpha})(A_2+\lambda)^{-1}$ при всех $\lambda\geqslant 0$. Нетрудно видеть, что

$$\|\mathcal{J}_\gamma K_{\beta-\alpha}K_\alpha(\lambda^{2/\alpha})\|^p_{\sigma_p}\leqslant\lambda^{(\beta-\alpha)p/\alpha}\cdot\|\mathcal{J}_\gamma K_\beta(\lambda^{2/\alpha})\|^p_{\sigma_p}. \tag{4.4}$$

Для оценки следа в правой части неравенства (4.4) воспользуемся тождеством $\mathcal{J}_\gamma K_\beta(\nu^2)=\nu^{\gamma-\beta}\mathcal{F}U_\nu K_\gamma(\nu^2)\mathcal{J}_\beta U_\nu^{-1}\mathcal{F}^{-1}$, где $\mathcal{F}$ — оператор Фурье-Планшереля; а U_ν — унитарный оператор, определяемый равенством $(U_\nu\psi)(\xi)=\nu^{-n/2}\psi(\xi/\nu)$, $\psi\in L_2$. Так как s-числа унитарно эквивалентных операторов совпадают, то

$$\|\mathcal{J}_\gamma K_\beta(\lambda^{2/\alpha})\|^p_{\sigma_p}=\lambda^{p(\gamma-\beta)/\alpha}\cdot\|K_\gamma(\lambda^{2/\alpha})\mathcal{J}_\beta\|^p_{\sigma_p}\leqslant \tag{4.5}$$
$$\leqslant C\lambda^{p(\gamma-\beta)/\alpha}\|K_\gamma(\lambda^{2/\alpha})K_{-\gamma}\mathcal{J}_{\gamma+\varepsilon}\|^p\cdot\|K_\gamma\mathcal{J}_{\beta-\gamma-\varepsilon}\|^p_{\sigma_p},\ \varepsilon>0.$$

Так как $\gamma<n/2$, то по теореме 2.1 оператор $K_\gamma(\lambda^{2/\alpha})K_{-\gamma}\mathcal{J}_{\gamma+\varepsilon}$ ограничен равномерно по λ при $\lambda\geqslant$. Согласно [8], $K_\gamma\mathcal{J}_{\beta-\gamma-\varepsilon}\in\sigma_{n/\gamma'}$ при $\gamma'<\gamma$, $\beta-\gamma-\varepsilon>\gamma$. Оценка (4.2а) следует теперь из (4.3)–(4.5) при $p=n/\gamma'$.

Если $\gamma\in(\beta/2,\beta)$, то $K_\gamma(\lambda^{\varepsilon/\alpha})\mathcal{J}_{\beta-\gamma-\varepsilon}\in\sigma_{\frac{n}{\beta-\gamma-\varepsilon}}$, и при $p=n/(\beta-\gamma-\varepsilon)$ получаем (4.2б).

Оценки (4.2в), (4.2г) получаются, если использовать (4.4) вместо (4.5). Теорема доказана.

4.3. Сформулируем теперь аналогичную теорему для возмущений оператора A_2.

Теорема 4.2. Пусть $a(\xi)\geqslant C|\xi|^\alpha$ и в условиях теоремы 2.2' $k=1$. Тогда для отрицательного спектра оператора $\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{B}_1$ имеют место оценки (4.2а)–(4.2г).

Доказательство этой теоремы почти не отличается от приведенного выше доказательства для оператора A_2+B+B_1.

Оценка (4.2а), по-видимому, не может быть существенно улучшена. На это указывает пример оператора энергии атома водорода. Оценки (4.2б), (4.2г) заведомо не точны. Вопрос от точности оценки (4.2в) остается открытым.

4.4. Как указывалось во введении, из теорем, устанавливающих относительную компактность возмущений в пространствах L_p для различных p, следует принадлежность собственных функций оператора A_2+B+B_1 ($\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{B}_1$) пространствам $\mathcal{D}(A_p)$ ($\mathcal{D}(\hat{A}_p)$) с нормой графика. Это утверждение справедливо и для ε-ограниченных возмущений.

В работе [16] показано, что при $\varepsilon>0$ имеет место неравенство

$$\|\vartheta\psi\|_{L_p^\beta(R^n)} \le C\Phi(\vartheta)(\varepsilon\|\mathcal{J}_{-\alpha}\psi\|_{L_p^\beta(R^n)}+C(\varepsilon)\|\psi\|_{L_p^\beta}), \qquad (4.6)$$

если

$$\Phi(\vartheta)=\sup_{x'\in R^n}\sup_{h\in R^n}|h|^{-\beta'}\left\{\int_{S_h^1(x')}|\Delta_h^k\vartheta(x)|^2 d^n x\right\}^{1/2}<\infty, \qquad (4.7)$$

где $k>\beta'>0$ – целое число, $\beta<\beta'<\beta+\alpha$, $z>max(p, \frac{n}{\beta+\alpha-\beta'})$

$$S_h^1(x')=\{x, x\in R^n, |x-x'|<1, |x-x'\pm\frac{h}{2}|<1\}$$

$$\Delta_h^k\vartheta(x)=\Delta_h^1(\Delta_h^{k-1}\vartheta(x)), \quad \Delta_h^1\vartheta(x)=\vartheta(x+\frac{h}{2})-\vartheta(x-\frac{h}{2}).$$

Неравенство (4.6) выражает условие ε-ограниченности оператора умножения на функцию $\vartheta(x)$ относительно $\mathcal{J}_{-\alpha}$ (или $\hat{A}_p$) в пространствах $L_p^\beta(R^n)$. Условия принадлежности собственных функций оператора $\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{B}_1$ пространству $L_p^\beta(R^n)$ составляют содержание следующей теоремы, непосредственно вытекающей из (4.6) и (4.7).

Теорема 4.3. Собственные функции оператора $\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{B}_1$ принадлежат пространству L_p^β если $\vartheta(x)$ удовлетворяет (4.7) для

$$z>max(p, n/(\beta-\beta'+\alpha)), \quad \beta+|m|<\beta'<\beta+\alpha$$

Следует отметить, что теорема 4.3 применима в важном случае оператора Шредингера системы многих частиц во внешних полях.

4.5. Теоремы 2.2, 2.2' можно обобщить на случай, когда функция $\vartheta(x)$ принадлежит анизотропному лиувиллевскому пространству [6], а теоремы 2.4, 2.4' – на случай, когда функция $\vartheta(x)$ убывает с различными скоростями разных направлениях. Для этого достаточно воспользоваться замечанием 4.4 работы [9].

Из неравенства Юнга о свертках следует, что если $\vartheta(\xi)\in L_q$, то в (2.7) константу $C(p,q,\varkappa)$ можно брать не зависящей от q. Это позволяет перенести результаты теорем 2.1, 2.2 на случай функций $\vartheta(\xi)$ вида $\vartheta(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}\vartheta_i(\xi)$, $\vartheta_i\in L_{q_i}$ $(L^{\gamma}_{q_i})$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty}\|\vartheta_i\|_{L_{q_i}}<\infty$.

Следует отметить, также, что все результаты этой работы очевидным образом переносятся на возмущения, представимые в виде конечных сумм операторов типа B, B_1 или $\hat{B}$, $\hat{B}_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, "Наука", М., 1965.
2. Т.Като, Теория возмущений линейных операторов, Мир, М., 1973.
3. М.Ш.Бирман, Изв. АН СССР, сер., мат. 32, 4 (1967).
4. J.M.Combes, Commun.Math.Phys., 12, 283-295 (1969).
5. И.Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, М., 1973.
6. С.М.Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1969.
7. М.А.Красносельский и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, Наука, М., 1966.
8. E.M.Stein, G.Weiss, J.of Math.and Mech. vol.8, n.2 (1959).
9. М.А.Антонец, И.А.Шерешевский, О спектральных свойствах некоторых псевдодифференциальных операторов в , Препринт, НИРФИ, № 1974.
10. T.Ikebe, T.Kato, Arch.for Rat.Mech.and Analysis, v.9, n.I (1962).
11. М.Ш.Бирман, ДАН СССР, т.129, № 2 (1959).

12. J.Schwinger, Proc.Nat.Acad.of Sci., v.47, n.I (I96I).

13. E.Balslev, Math.Scand., I9, (I969), I93-2I0.

14. E.Balslev, Trans.Amer.Math.Soc., II6 (I965), I93-2I7.

15. Л.Д.Фаддеев, Труды МИАН им.Стеклова, т.69 (1963).

16. М.А.Антонец, И.А.Шерешевский, О некоторых пространствах дифференцируемых функций (в печати).

17. М.Ш.Бирман, Функц. анализ и прил., т.3, № 3 (1969).

18. K.Jörgens, Universität Hedelberg, preprint, I964.