

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 69

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТЫХ ВОЛН

Е.Н. Пелиновский.

Горький - 1975 г.

А н н о т а ц и я

Получены выражения для спектра простой волны в среде с произвольной нелинейностью. Для случая степенной нелинейности рассмотрено изменение спектра монохроматической волны, гауссова импульса и узкополосного шума.

Эволюция бегущих волн в нелинейной среде без дисперсии описывается как известно, уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Здесь u — переменная поля, $V(u)$ — нелинейная характеристика среды, определяющая локальную скорость распространения возмущений поля⁺). Наиболее подробно изучена квадратичная нелинейность ($V \sim u$). Хотя решение уравнения (1) — волна Римана — может быть записана в неявной форме сравнительно для произвольных граничных условий, однако в большинстве случаев необходимо иметь явную форму записи простой волны, в частности, ее разложение в ряд или интеграл Фурье. Этот вопрос обсуждался уже давно в акустике применительно к регулярным сигналам [1-3], а позднее и к статистическим [4-6].

Во многих приложениях (электромагнитные волны в изотропном диэлектрике, упругие поперечные волны в твердом теле, волны в плазме и т.д.) нелинейность является более сложной. Хотя заменой переменной $V = V(u)$ уравнение (1) сводится к уже изученному ($\partial V / \partial t + V \partial V / \partial x = 0$), но из-за неоднозначности обратной функции $u(V)$ не удается связать в общем случае характеристики u и V .

В данной работе рассматриваются свойства простых волн, в основном, их спектр в нелинейной среде при $V = \alpha u^n$

⁺ Уравнение (1) можно записать в системе координат, движущейся со скоростью линейных возмущений, так что $V(u)$ есть поправка к скорости, обусловленной нелинейностью.

(α и n — положительные константы). Сначала кратко обсуждается пространственно-временная эволюция волны, приводящая к ее опрокидыванию (неоднозначности функции U). Затем исследуется изменение спектра монохроматической волны и гауссова импульса. Анализируется также распространение узкополосных шумов с амплитудой и фазовой модуляцией.

Эволюция простой волны

Прежде чем рассматривать спектры, приведем некоторые простые но ранее не обсуждавшиеся результаты, относящиеся к скорости нелинейных искажений волны при различных $V(u)$. Будем исходить из решения уравнения (1), определяющего простую волну:

$$u(x, t) = U[x - V(u)t], \quad (2)$$

где функция $U(\xi)$ находится из начального условия: $u(x, 0) = U(x)$. Профиль волны с течением времени деформируется: участки с большей скоростью обгоняют участки с меньшей. Решение (2) справедливо на конечном интервале времени $t \leq t_*$, после чего в волне возникают разрывы (ударные фронты). Величина t_* является важной характеристикой нелинейного процесса. Время t_* вместе с значением поля в момент опрокидывания u_* находятся из системы

$$t_* = \frac{dU^{-1}/du}{dV/du} \Big|_{u=u_*}; \quad \frac{d^2V/du^2}{dV/du} = \frac{d^2U^{-1}/du^2}{dU^{-1}/du} \quad (3)$$

где U^{-1} — функция, обратная U . В частности, для степенной нелинейности $V = \alpha u^n$ при начальном условии в виде положительного синусоидального импульса ($U = U_0 \sin k_0 x$, $0 \leq k_0 x \leq \pi$) получаем следующие значения u_* , $V_* = \alpha u_*^n$, t_* :

+) Заметим, что при некоторых n нельзя задать функцию $U(x)$ в виде непрерывной синусоиды, иначе $V(u)$ на отрицательных участках в волне не будет определена.

$$\frac{u_*}{U_0} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}; \frac{V_*}{V_0} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2}; \frac{t_*}{T_*} = n^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}. \quad (4)$$

Здесь $V_0 = \alpha U_0^n$, $T_* = (k_0 V_0)^{-1}$. Зависимости u_* , V_* и t_* от n приведены на рис. 1. Заметим, что в формуле (4) n не может быть меньше единицы, иначе изменения скорости вблизи $u=0$ настолько велики, что волна является ударной уже при $t=0$. (Разумеется, для других начальных условий, например, для гауссова импульса (см. далее) t_* конечно, и при $n < 1$). С ростом n нелинейность велика в основном на "вершине" волны (вблизи U_0), которой легче "обогнать" основную часть волны, в результате чего t_* уменьшается. Интересно отметить, что в области $1 < n < 2$ $t_* > T_*$ причем время опрокидывания волны в средах с квадратичной ($n=1$) и кубической ($n=2$) нелинейностями одинаково (при одной и той же величине V_0). Если n велико, то форма волны мало отличается от начальной даже при $t \sim t_*$, так как искажается, по существу, лишь одна вершина.

Спектральные разложения плоских волн

Пространственный спектр поля $u(x, t)$ определяется интегралом Фурье:

$$s(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} U[x - v(u)t] e^{-ikx} dx. \quad (5)$$

Функция $u(x)$ неявная, поэтому перейдем в (5) к интегрированию по характеристике $z = x - v(u)t$ при постоянном t . Используя (2), после некоторых преобразований приведем (5) к виду (ср. [4])

$$s(k, t) = \frac{1}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{dv}{dz} e^{-ik\{z + tV[U(z)]\}} \quad (6)$$

Формула (6) уже пригодна для нахождения спектра простых волн, так как подинтегральная функция записана в явном виде. Удобно, однако, привести выражение (6) к более наглядной форме. Рассматривая S как "спектр" произведения функций dU/dz и $\exp(-iktV)$, по известной теореме о спектрах можно написать

$$S(k, t) = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} h G(k-h, kt) S(h, 0) dh, \quad (7)$$

где

$$G(h, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left\{ -i \left[h z + \xi V(u) \right] \right\}. \quad (8)$$

В формуле (7) hG имеет смысл функции Грина, которая из-за нелинейности зависит от входного сигнала. В такой форме (7) удобна, например, для анализа спектра волны, генерируемой монохроматическим источником. Возможна и другая форма записи $S(k, t)$. Введем новую функцию

$$W(U, \xi) = \int_0^U \exp \left[-i \xi V(v) \right] dv \quad (9)$$

Тогда (6) представима в виде:

$$S(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W[U(z), kt] e^{-ikz} dz \quad (10)$$

Отсюда следует, что спектр сигнала совпадает со "спектром" функции W (которая зависит от k), характеризующей нелинейность. Формула (10) может оказаться удобной для анализа шумовых сигналов в нелинейной среде, так как спектр определяется лишь через одну случайную функцию. В таблице 1 приведен вид W для некоторых зависимостей $V(u)$.

Аналогичные формулы могут быть получены для спектра произвольной функции $R(u)$:

$$S_R(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R[u(x, t)] e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} h G(k-h, kt) S_R(h, 0) dh = (11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_R[U(z), kt] e^{-ikz} dz,$$

где

$$w_R(U, \xi) = \int_0^{R(U)} \exp[-i\xi V(v)] dR(v) \quad (12)$$

В частности, для спектра скорости $V(u)$, которая как уже отмечалась описывается уравнением простой волны с квадратичной нелинейностью, получаем известное выражение [4-6]

$$S_V(k, t) = \frac{i}{kt} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-ik(z+tv)} - \dots \right\} dz \quad (13)$$

Изменение спектра монохроматической волны

Рассмотрим изменение спектра простой волны в среде со степенной нелинейностью ($\psi = \alpha u^n$, n - целое число). Предположим, что начальное возмущение имеет вид

$$u(x, 0) = U_0 \sin k_0 x \quad (14)$$

Тогда из формулы (7) для спектра волны получаем

$$S(k, t) = \frac{U_0 k_0}{2ik} \left[G(k - k_0, kt) + G(k + k_0, kt) \right] \quad (15)$$

Функцию G можно вычислить с помощью известной формулы из теории бесселевых функций [7]

$$\exp \left\{ i x \begin{pmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ i^m \end{pmatrix} J_m(x) e^{i m \psi}, \quad (16)$$

где $J_m(x)$ - функция Бесселя. Опуская громоздкие выкладки, приведем выражение для спектра волны при нечетной зависимости $V(u)$ ($n = 2m-1$; $m = 1, 2, \dots$):

$$S(k, t) = -i\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{\ell}(t) \delta(k - \ell k_0) \quad (17)$$

где

$$A_{\ell} = 2U_0 \prod_{\nu=0}^{m-2} \sum_{q_{\nu}=-\infty}^{\infty} J_{q_{\nu}}(\ell \tau_{\nu}) J_{\ell-q_{\nu}}(\ell \tau_{m-1}) \frac{\ell - q_{\nu}}{\ell^2 \tau_{m-1}};$$

$$q_{\nu} = \sum_{\tau=0}^{m-2} q_{\nu}(n-2\tau); \tau = V_0 k_0 t; \tau_{\nu} = 2^{1-n} (-1)^{m+\nu} \binom{n}{\nu} \tau;$$

$\binom{n}{\nu}$ - биномиальный коэффициент. В частности, при квадратичной нелинейности ($n = 1$) отсюда следует известное выражение для спектра волны Римана [1,2]

$$A_{\ell}^{(n=1)} = \frac{2U_0}{\ell \tau} J_{\ell}(\ell \tau) (-1)^{\ell+1} \quad (18)$$

Используя (17), получаем ряд Фурье для поля $u(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} A_{\ell}(t) \sin \ell k_0 x \quad (19)$$

который является обобщением ряда Бесселя-Фубини, найденного ранее для волн в квадратичной среде, на случай произвольной нечетной степенной нелинейности.

Итак, монохроматическая волна генерирует в нелинейной среде гармоники со всеми волновыми числами, кратными k_0 , причем по мере распространения искажается только амплитудный спектр. На небольших временах $t \ll t_*$ в спектре существенны гармоники с $l \leq n$, их амплитуда пропорциональна t . Заметим, что величина, например, второй гармоники убывает с увеличением n как $2^{1-n} \binom{n-1}{m-1}$, что подтверждает сделанный ранее вывод о слабом изменении формы волны при большом n . На спектральном языке это означает, что генерируется группа гармоник, являющихся разложением $V(u)$ в конечный ряд Фурье и энергия распределяется между многими гармониками. Амплитуда следующей группы ($n+1 < l < 2n$) растет пропорционально t^2 и т.д.

Аналогично получаем формулу для спектра волны с четной характеристикой $V(u)$ ($n=2m$; $m=1,2,\dots$).

$$S(k,t) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l(t) \delta[k - (2l+1)k_0], \quad (20)$$

где

$$B_l = \frac{-iU_0}{2l+1} e^{i(2l+1)\tau_m} \prod_{\nu=0}^{m-1} \sum_{q_\nu=-\infty}^{\infty} J_{q_\nu}[(2l+1)\tau_\nu] \left\{ J_{q_\nu}[(2l+1)\tau_m] + i J_{l-q_\nu+1}[(2l+1)\tau_m] \right\}; \quad q_\nu = \sum_{\nu=0}^{m-2} q_{\nu+1} (m-\nu);$$

$$\tau_m = -2^{-n} \binom{n}{m} \tau; \quad \tau_\nu = (-1)^{m-\nu+1} \binom{n}{\nu} 2^{1-n} \tau \quad \text{при } \nu=0,1,\dots,m-1.$$

Аналогом ряда Бесселя-Фурье для простой волны в этом случае является ряд

$$\begin{aligned} \psi(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ P_l(t) \sin[(2l+1)(k_0 x - \tau_m)] + \right. \\ \left. + R_l(t) \cos[(2l+1)(k_0 x - \tau_m)] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь P и R — соответственно действительная и мнимая части функции $i V_0 \exp[-i(2\ell+1)\tau_m]$. Из (20) и (21) следует, что в среде с четной характеристикой генерируются только нечетные гармоники, пропорциональные $(2\ell+1)k_0$. В этом случае по мере распространения изменяется как амплитудный, так и фазовый спектр. Как уже указывалось, если $n = 2m-1$, то фазовый спектр не меняется. Амплитуды гармоник также уменьшаются с ростом n , на малых временах, в частности, амплитуда третьей гармоники при больших n пропорциональна $n^{-1/2}$. Рассмотрим более подробно простую волну в среде с кубической нелинейностью ($n=2$). Ряд Бесселя-Фубини в этом случае имеют вид:

$$u(x,t) = U_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \left\{ J_2\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\tau\right] \sin\left[(2\ell+1)(k_0 x - \tau/2)\right] + J_{\ell+1}\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\tau\right] \cos\left[(2\ell+1)(k_0 x - \tau/2)\right] \right\}. \quad (22)$$

Амплитуда $2\ell+1$ — гармоники выражается формулой

$$U_{2\ell+1}(\tau) = \frac{U_0}{2\ell+1} \sqrt{J_2^2\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\tau\right] + J_{\ell+1}^2\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\tau\right]}. \quad (23)$$

Зависимость U_m от τ представлена на рис. 2. На малых временах $\tau \ll 1/2\ell+1$ справедливы следующие приближенные формулы для U_m

$$\frac{U_1}{U_0} \approx 1 - \frac{\tau^2}{8}; \quad \frac{U_{2\ell+1}}{U_0} \approx \frac{(2\ell+1)^{\ell-1}}{2^{2\ell} \sqrt{\ell!}} \tau^{\ell} \quad (\ell=1, 2, \dots) \quad (24)$$

В частности $U_3/U_0 \approx \tau/4$, что разумеется легко может быть получено непосредственно из (1) в первом порядке теории возмущений. Заметим, что отличие в формулах (23) и (24) для амплитуд первой и третьей гармоник не превышает 25% на интервале $0 < \tau < 1$ ($\tau=1$ соответствует образова-

нию ударной волны). Это связано с упоминавшейся уже выше малостью искажения формы волны. Наоборот, для высших гармоник область применимости приближенных формул (24), соответствующих ℓ порядку теории возмущений, сужается, поскольку именно они дают основной вклад в образование ударной волны-процесса не описываемого в рамках любого конечного порядка теории возмущений. Относительная величина амплитуд генерируемых гармоник остается малой для всех τ . Так, в момент опрокидывания простой волны $U_3/U_1 \approx 0,21$. Для сравнения приведем известные значения амплитуд высших гармоник в момент опрокидывания простой волны в среде с квадратичной нелинейностью [1]: $U_2/U_1 \approx 0,4$; $U_3/U_1 \approx 0,23$.

Искажение спектра гауссова импульса

Для анализа распространения сигналов с широким спектром воспользуемся формулой (10). Разлагая неполную гамма-функцию в ряд, представим функцию W в виде^{*)}

$$w(U, kt) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ikt\alpha)^m}{m!(nm+1)} U^{nm+1} \quad (25)$$

Пусть в начальный момент времени задано возмущение в виде гауссова импульса

$$U(x) = U_0 \exp(-b^2 x^2) \quad (26)$$

Тогда, подставляя (25) и (26) в (10) получаем спектр

$$S(k, t) = S(k, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iktV_0)^m}{m!(nm+1)^{3/2}} \exp \frac{nmk^2}{(nm+1)4b^2} \quad (27)$$

Отсюда следует, что при любом n изменяется как амплитудный, так и фазовый спектр (для монохроматической волны фазовый спектр не изменялся, если $n = 2\ell - 1$). На не-

^{*)} В формулах этого пункта n — произвольное положительное число.

больших временах, удерживая первых три слагаемых в (27), получаем амплитудный спектр:

$$|S(k,t)/S(k,0)| \approx 1 + \frac{k^2 t^2 V_0^2}{(n+1)^3} \exp \frac{nk^2}{2\beta^2(n+1)} \quad (28)$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{(n+1)^3}{(2n+1)^{3/2}} \exp \left[- \frac{n^2 k^2}{2\beta^2(n+1)(2n+1)} \right] \right\}.$$

При k меньших k_* , где

$$k_*^2 = \beta^2 \frac{3(n+1)(2n+1)}{n^2} \ln \frac{(n+1)^2}{2n+1} \quad (29)$$

(k_* определяет эффективную ширину спектра $V(u)$, выражение стоящее в фигурных скобках отрицательно, а при $k > k_*$ — положительно; следовательно энергия уходит из области малых волновых чисел вверх по спектру для любых n . С точностью до t^4 граница между этими областями остается неподвижной. Типичная картина изменения спектра импульса изображена на рис. 3.

Формула (28) применима лишь при условии, что

$$\frac{k^2 t^2 V_0^2}{(n+1)^3} \exp \frac{nk^2}{2\beta^2(n+1)} \ll 1 \quad (30)$$

Поскольку время образования ударной волны из гауссова импульса, как легко показать, равно

$$t_* = T_* \sqrt{e/n}, \quad T_* = (\beta V_0)^{-1} \quad (31)$$

то, используя (31), можно найти из (30) область волновых чисел $k \ll k_0$, для которой справедлива приближенная формула (28), описывающая спектр волны при $t \leq t_*$. В част-

ности, если n достаточно велико, то $k_0 \gg k_*$, и, следовательно, как уже отмечалось с помощью теории возмущений можно правильно описать спектр простой волны.

Распространение узкополосных шумов через нелинейную среду

С помощью формул (7), (10) может быть рассмотрено распространение шумовых сигналов в нелинейной среде. Пусть, например, начальное возмущение задано в виде

$$u(x, 0) = U_0(x) \sin [k_0 x + \varphi(x)] \quad (32)$$

где U_0 и φ — случайные функции, мало меняющиеся на интервале k_0^{-1} . Тогда в любой момент времени поле описывается случайной функцией $u(x, t)$ (считаем, что n — целое число).

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_p(t, x) \sin p [k_0 x + \varphi(x) - \tau_m(t, x)] + B_p(t, x) \cos p [k_0 x + \varphi(x) - \tau_m(t, x)] \right\} \quad (33)$$

причем, если $n=2l$, то $\tau_m=0$, $B_p=0$, $p=l$, а если $n=2m$, то $p=2l+1$, а A, B, τ_m отличны от нуля.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда флуктуирует только фаза волны $\varphi(x)$ и ее распределение является нормальным. Тогда корреляционная функция легко находится и равна [8]

$$K(z, t) = \langle u(x, t) u(x+z, t) \rangle = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^2(t) + B_p^2(t)}{2} \cdot \exp \left\{ -p^2 \langle \varphi^2 \rangle [1 - \tau(z)] \right\} \cos p k_0 z, \quad (34)$$

где $\tau(z) = \langle \varphi(x) \varphi(x+z) \rangle / \langle \varphi^2 \rangle$ — коэффициент корреляции фазы. Флуктуации фазы приводят к уменьшению интенсивностей спектральных амплитуд, пропорциональному $\exp(-p^2 \langle \varphi^2 \rangle)$

и по злению на фоне монохроматических линий "пьедестала", ширина которого (и амплитуда) возрастает с увеличением номера гармоники. Суммарная интенсивность волны, определяемая $K(0, t)$, не меняется из-за фазовых флуктуаций. Отметим, что формула (34) справедлива для нелинейной характеристики $V = \alpha u^n$ при любом целом n .

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда при $t = 0$ имеются только амплитудные флуктуации. Как следует из (33) в случае $n = 2m$ с течением времени в волне возникают фазовые флуктуации за счет $\tau_m \{U_0(x)\}$ (Если $n = 2m - 1$, то $\tau_m = 0$ и фазовые флуктуации отсутствуют). Корреляционная функция при этом имеет вид

$$K(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ K_p^{(1)}(x, t) \cos p k_0 z + K_p^{(2)}(x, t) \sin p k_0 z \right\} \quad (35)$$

где

$$K_p^{(1)} = \frac{1}{2} \left\langle \left[A_p(x) A_p(y) + B_p(x) B_p(y) \right] \cos p \Delta \tau \right\rangle - \\ - \frac{1}{2} \left\langle \left[A_p(x) B_p(y) - A_p(y) B_p(x) \right] \sin p \Delta \tau \right\rangle ,$$

$$K_p^{(2)} = \frac{1}{2} \left\langle \left[A_p(x) A_p(y) + B_p(x) B_p(y) \right] \sin p \Delta \tau \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left\langle \left[A_p(x) B_p(y) - A_p(y) B_p(x) \right] \cos p \Delta \tau \right\rangle ,$$

$$y = x + z, \quad \Delta \tau = \tau_m(x, t) - \tau_m(y, t) .$$

По известной двумерной плотности вероятности амплитуды U_0 можно в принципе вычислить функции $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$. Так, при $n = 1$ (квадратичная нелинейность) корреляционная функция рассчитывалась в [5], причем для более общего

случай амплитудно-фазовой модуляции. Если $\mu \neq 1$, то расчеты существенно усложняются. Ограничимся поэтому вычислением только интенсивности шума $K(0, t)^{+}$. Для стационарного (по x) распределения $U_0(x)$ имеем

$$K_p^{(1)}(0, t) = \frac{1}{2} \left[\langle A_p^2 \rangle + \langle B_p^2 \rangle \right]; K_p^{(2)}(0, t) = 0. \quad (36)$$

В частности, для кубической нелинейности интенсивность шума $2l+1$ гармоники

$$K_{2l+1}^{(1)}(0, t) = \frac{1}{2(2l+1)^2} \left\{ \langle U_0^2 J_l^2 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \tau \right] \rangle + \langle U_0^2 \cdot J_{l+1}^2 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \tau \right] \rangle \right\}; \quad \tau = \alpha k_0 U_0^2 t. \quad (37)$$

В случае релеевского распределения амплитуды входящие сюда средние вычисляются и равны

$$\langle U_0^2 J_m^2 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \tau \right] \rangle = \frac{8(m + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2}) \alpha k_0 \sigma^4 t}{x(a^2 + 1/2)} \left\{ (1 + a^{-2}) Q_{m-1/2}(1 + a^{-2}) - Q_{m+1/2}(1 + a^{-2}) \right\}, \quad (38)$$

где $Q_\nu(x)$ — функция Лежандра второго рода [7], $a = 2\sqrt{2} \alpha \sigma^2 k_0 t$, σ^2 — дисперсия $U(x, 0)$ и $m = l, l+1$. Полученные формулы достаточно громоздки. Вычислим поэтому интенсивность генерируемых гармоник на малых временах для произвольного целого n . Разлагая A и B в ряд, имеем

$$A, B \sim U_0 \tau^k \sim U_0^{1+nk}. \quad (39)$$

⁺) Разумеется, полная интенсивность шума сохраняется, однако ее спектральное распределение меняется со временем.

Здесь "к" одинаково для всех гармоник разложение скорости $V(u)$ в ряд Фурье. Вычисляя $K^{(1)}$, например, для Релеевского распределения U_0 , получаем, что интенсивность шумовых гармоник возрастает по сравнению с регулярным сигналом в $(1+nK)!(4/\pi)^{1+nK}$. (Интенсивность основного тона, наоборот, уменьшается при наличии флуктуаций). Ранее этот результат был получен для квадратичной среды [5]. Эффективность генерации шумовых гармоник растет как с номером гармоники, так и с ростом N . Это объясняется тем, что процесс нелинейного взаимодействия происходит гораздо эффективнее в сильных полях, чем в слабых.

На больших временах нужно использовать более точные выражения для амплитуд генерируемых гармоник. Однако здесь необходимо учитывать следующее обстоятельство. Как уже ранее отмечалось, координата образования ударной волны зависит от амплитуды. Поэтому на не малых временах поле содержит как простые, так и ударные волны и решение (33) уже непригодно. Хотя, как легко показать, $\langle t_* \rangle = \infty$ для всех $n \geq 2$ (ср. [9]), но это не означает, что статистический вес простых волн является преобладающим. Действительно, если найти отрезок времени t_0 , на котором опрокидываются волны с амплитудой, большей $\langle U_0 \rangle$ (т.е. при $t = t_0$ вероятность обнаружения ударных волн равна 1/2), то можно видеть, что эта величина конечна $[t_0 \sim (2 \ln 2)^{-n/2}]$. Следовательно, формулы типа (38) мало пригодны, если $t \sim t_0$, для описания волнового поля, так как вклад ударных волн становится определяющим⁺). С этим связана невозможность нахождения высокочастотной части спектра только из решения в виде простой волны (см., также [4-6, 10, 11]). Поэтому корректный анализ распространения шумовых сигналов должен включать в себя ударные волны.

Автор благодарен Л.А.Островскому и В.Е.Фридману за полезные замечания.

⁺) Исключение составляет узкополосный шум со случайной фазой, для которого t_* не зависит от фазы и следовательно, простые и ударные волны "разделены" во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А., Введение в нелинейную акустику, Наука, М., 1966.
2. Blackstock D.T., JASA, 39, 6, 1019 (1966).
3. Fenlon F.H., JASA, 53, 6, 1752 (1973); 54, 2, 465 (1973).
4. Кузнецов В.П., Акуст.ж., 15, 4, 554 (1969); 16, 1, 155 (1970).
5. Руденко С.В., Чиркин А.С., Теория дифракции и распространения волн, т.1, 457, Ереван, 1973; ДАН СССР, 214, 6, 1045 (1974); Акуст.ж., 20, 2, 297 (1974).
6. Саичев А.И., Изв.ВУЗов, Радиопизика (в печати).
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
8. Рытов С.М., Введение в статистическую радиофизику, Наука, М., 1966.
9. Полиновский Е.Н., Фридман В.Е., Акуст. ж., 18, 4, 590 (1972).
10. Tatum T., Kida S., J.Fl.Mech., 55, 4, 659 (1972).
11. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И., ДАН СССР 208, 4, 794 (1973).

ТАБЛИЦА I

$V(u)$	$w(u, \xi)$
c	$u \exp(-i\xi c)$
αu^n	$n^{-1} (i\xi \alpha)^{-1/n} \gamma[n^{-1}, i\xi V(u)]$
αu	$(-i\xi \alpha)^{-1} \exp(-i\xi V)$
αu^2	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\xi \alpha}} \Phi(\sqrt{i\xi V})$
$\alpha u + \beta u^2$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\xi \beta}} \exp(i\xi \alpha^2 / \beta) \Phi[\sqrt{i\xi \beta} (u + \alpha / 2\beta)]$
$\alpha u^{1/m}$	$m d^{(m-1)} / d(-i\xi \alpha)^{m-1} [(-i\xi \alpha)^{-1} \exp(-i\xi V)]$
$\alpha \sqrt{u}$	$2 [(\xi \alpha)^{-2} - (i\xi \alpha)^{-1} \sqrt{u}] \exp(-i\xi V)$
$\alpha \sqrt{u} + \beta u$	$\sqrt{\frac{i\pi}{\beta \xi^3}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \exp(i\xi \alpha^2 / \beta) \Phi[\sqrt{i\xi \beta} (\sqrt{u} + \alpha / 2\beta)] \right\}$

(γ - неполная гамма-функция, Φ - интеграл вероятности, m - целое число).

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Зависимости времени опрокидывания t_* , величины поля в точке с бесконечной производной U_* и скорости в данной точке V_* от показателя нелинейности.

Рис. 2. Амплитудный спектр простой волны в среде с кубической нелинейностью.

Рис. 3. Изменение спектра гауссова импульса.

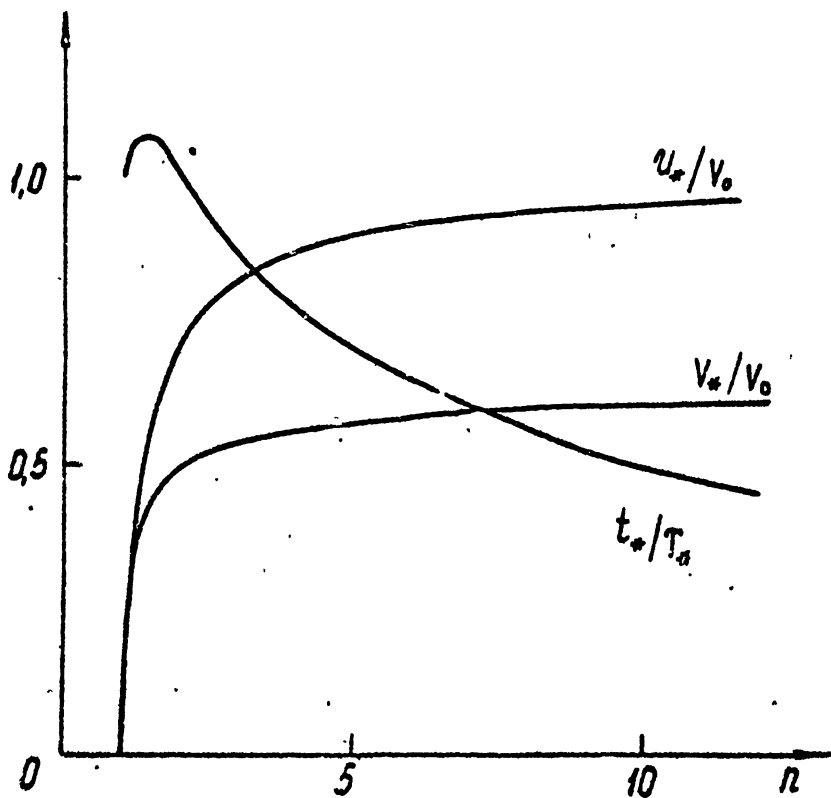


Рис. 1.

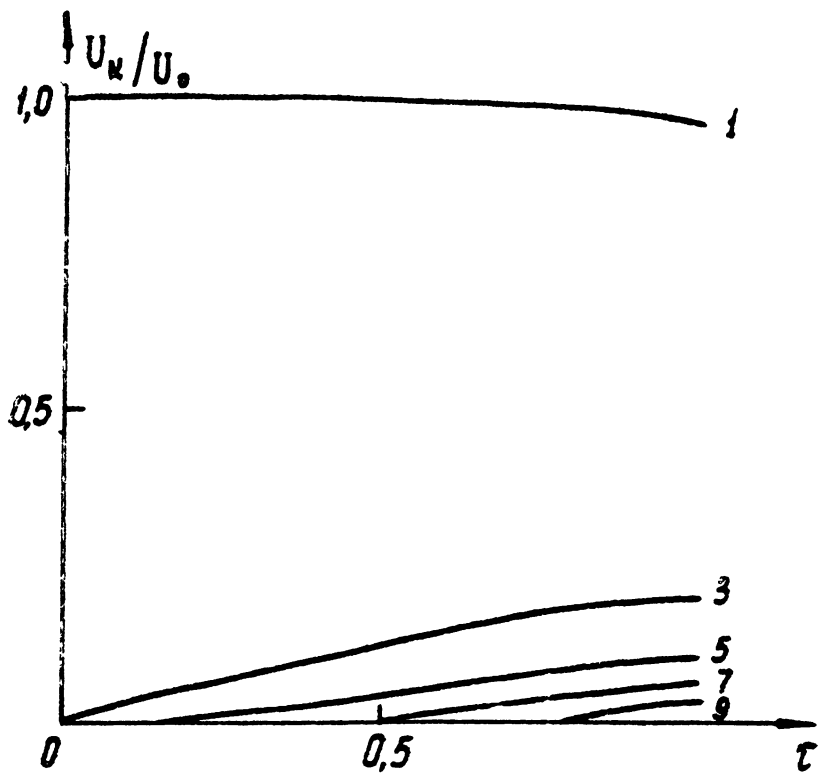


Рис. 2.

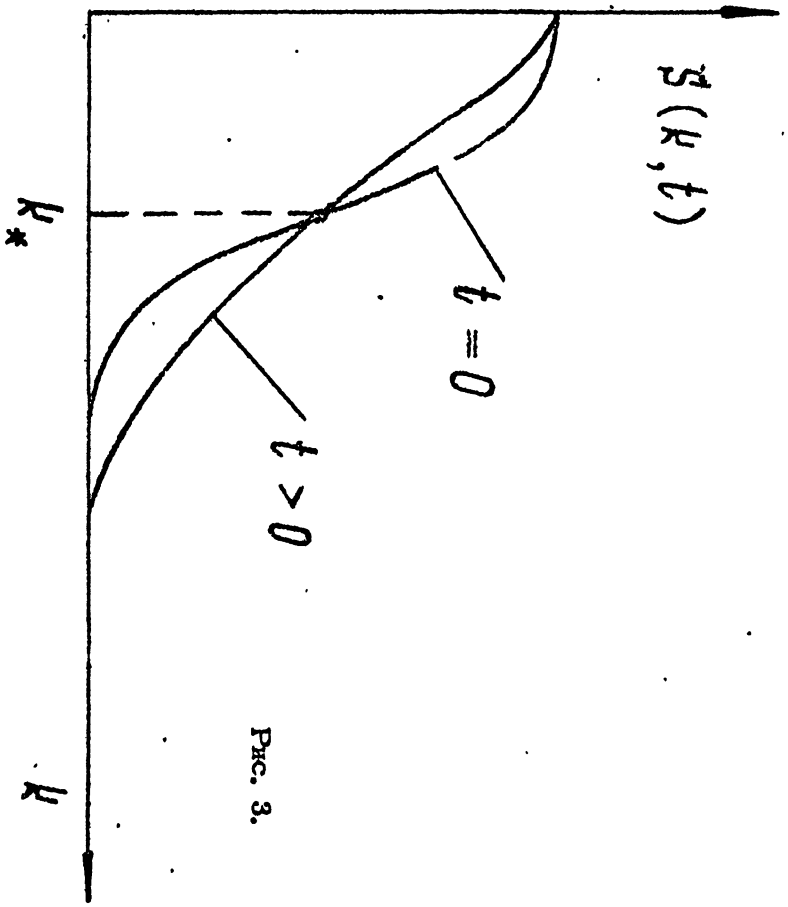


Рис. 3.