

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиопизический институт (НИФРИ)

Препринт № 70

**ДИФРАКЦИЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ПИЛООБРАЗНЫХ
АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН**

Л.А.Островский, А.М.Сутян.

Горький - 1975 г.

Дифракционные явления в акустических волнах конечной амплитуды, в сущности, только начинают изучаться. Даже для волновых пучков с узким угловым спектром, когда эти явления могут быть описаны в рамках упрощенного уравнения поперечной диффузии [1], обычно приходится либо пренебрегать дифракцией, либо считать малыми нелинейные искажения волны [2].

В тех случаях, когда дифракционные и нелинейные эффекты оказывают одинаково существенное влияние на эволюцию волны (в особенности при наличии разрывов, когда нельзя пренебречь еще и нелинейной диссипацией), отыскивается эффективным другой приближенный подход. Он основан на том обстоятельстве, что дифракция и нелинейность часто проявляются на разных этапах процесса и могут быть учтены раздельно. Такой поэтапный подход уже позволил [3,4] описать изменение угловой структуры поля мощного излучателя, связанную с образованием и затуханием разрывов, при условии, что поле успевает заметно исказиться только в волновой зоне. В данной работе рассматриваются более сложные (и, по-видимому, более реальные практически) задачи об излучении плоской ограниченной апертуры, когда дифрагирующее поле существенно несинусоидально (пилообразно) уже в ближней зоне.

Поставим задачу следующим образом: в пределах излучающей поверхности с площадью S расположенной на плоскости $z=0$ и ограниченной контурами L (фиг.1) создается синфазное и однородное по амплитуде распределение давления акустического поля $p_0(t)$ изменяющееся во времени периодически по "пилообразному" закону. Поле в области $z > 0$ отыскивается, вообще говоря, с учетом как дифрак-

ционных, так и нелинейных эффектов. Такая задача возникает, например, в случае, когда плоская волна конечной амплитуды, создаваемая гармоническим источником, дифрагирует на отверстии z плоском экране, параллельном фронту волны и удаленном от излучателя на расстояние, достаточное для существенных искажений синусоидальной волны. Аналогичная задача может встречаться для направленных "апертурных" антенн различных типов (рупорные, рефлекторные, линзовые), если облучающий элемент создает интенсивное поле, которое существенно искажается на раскрыве антенны. Качественно последующие результаты справедливы в случае плоского гармонического излучателя в свободном пространстве, если искажения волны велики уже в ближней зоне излучателя (см. ниже). Наконец, возможно непосредственное возбуждение пилообразной волны плоским излучателем.

Форму излучающей апертуры (для краткости будем называть ее просто излучателем) предполагаем произвольной, а ее характерный размер d много большим длины волны λ

Процесс распространения волны при $z > 0$ может быть разделен на два этапа.

1. В области, прилегающей к излучателю, точнее, на расстояниях $z \ll R_*$, где R_* - характерный интервал на котором сказывается нелинейность (последний будет определен ниже) нелинейные искажения малы, и дифракционная задача может решаться в линейном приближении. Будем считать, что $z \gg d$ и $\theta \ll 1$, где θ, φ угловые координаты точки наблюдения P (фиг.1), тогда интеграл Кирхгофа, [5], определяющий поле, принимает вид

$$p(z, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_S \frac{1}{R} \left. \frac{\partial p_0}{\partial t} \right|_{t=t-R/c} ds, \quad (1)$$

где R - расстояние от данной точки до элемента ds излучателя.

Поле 1 можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых определяется разрывами, а другая гладкой частью поля. Первая из этих функций имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p_s}{\pi c} \int_S \frac{\delta(t - nT)}{R} ds, \quad (2)$$

где p_s - амплитуда волны, T - ее период, n - целое число, δ - дельта функция Дирака.

Рассмотрим одно слагаемое p_n , соответствующее одиночному скачку давления. Подобное решение для различных случаев уже рассматривалось в литературе [6-9]. Результат дифракции скачка представляет собой импульс длительностью $\tau = (R_1 - R_2)/c$, где R_1, R_2 - расстояние от наиболее удаленной и наиболее близкой к P точек излучателя (фиг. 1). С ростом угла θ амплитуда импульса падает, а длительность растет. Для нас существенно, что интегральная величина импульса не зависит от направления. Действительно, интегрируя p_n по t при фиксированном n и $z \gg d$ получим

$$\Omega = \int_{t_2}^{t_1} p_n dt = S p_s / \pi z c, \quad (3)$$

где $t_2 = nT + R_2/c$, $t_1 = nT + R_1/c$ - соответственно начало и конец импульса.

Весьма общий результат (который, по существу, содержится в [6], хотя и не был четко сформулирован) получается для точек, не слишком близких к цилиндру с основанием S и образующей, параллельной оси x . Если выбрать ось y в направлении проекции точки наблюдения на плоскость $x=0$ и считать, что $OA \gg d$ (т.е. $\sin \theta \approx \theta \gg d/2z$), то при интегрировании в (2) можно пренебречь (по сравнению с τ) запаздыванием поля от различных точек на линии $y = \text{const}$. Тогда, полагая $R = z + y\theta$ и $ds = F(y) dy$, где $F(y)_0$ - локальная ширина апертуры в направлении y , получим

$$p_n = \frac{p_s}{\pi z \theta} F \left(\frac{c(t - nT) - z}{\theta} \right) \quad (4)$$

при $t_2 \leq t \leq t_1$, и $p_n = 0$ вне этого интервала. При этом $\tau = d_y \theta$, где d_y - максимальный размер излучателя в направлении y .

Таким образом, форма импульса во времени зависит от χ ширины излучающей апертуры в направлении, перпендикулярном χ . Если, в частности, контур L имеет ось симметрии, то форма импульса в плоскости, проходящей через эту ось и ось z , совпадает (при соответствующем выборе масштаба) с формой самого контура. Например, апертура "гантельного" типа в плоскости, расположенной вдоль гантели, излучает двугорбый импульс.

Что касается области малых углов ($\theta \approx d/2z$), то внутри упомянутого выше цилиндра поле одиночного перепада имеет вид импульса с разрывным фронтом, амплитудой $2\rho_s$ и длительностью τ ($d^2/8cz < \tau < d^2/2cz$) (ср. [8,9]). Отсутствие спада амплитуды с расстоянием объясняется тем, что в нормальном направлении основной вклад вносят компоненты высоких частот, обусловленные наличием разрывов (именно поэтому τ падает с расстоянием).

Вернемся к интересующему нас случаю периодической волны. Для пилообразной при $z=0$ волны с линейным спадом, гладкая часть в интеграле (1) дает постоянную величину $\beta = -\rho_s \int \sin \lambda z$. В зоне Фраунгофера по основной частоте ($z \gg z_\phi = d^2/\lambda$), под относительно небольшими углами ($\theta < \lambda/d$), т.е. примерно в области главного лепестка диаграммы направленности по основной частоте, поле дается периодической последовательностью импульсов вида (2) на пьедестале β . При этом везде, кроме области вблизи "пржекторного" цилиндра ($\theta \approx d/2z$), каждый импульс описывается формулой (4), и поле соответствует волновой зоне в том смысле, что волна уже не меняет своей формы, а ее амплитуда спадает как z^{-1} .

Под углами, большими λ/d , решение имеет вид суперпозиции перекрывающихся импульсов с $\tau > T$. Например, при $T < \tau < 2T$ (или $\lambda/d < \theta < 2\lambda/d$) перекрываются два импульса, при $2T < \tau < 3T$ три и т.д. В результате форма поля сглаживается причем в угловой зависимости амплитуды или интенсивности поля можно проследить немонотонности ("лепестки"), хотя поле нигде в нуль не обращается. Исключение составляет случай прямоугольного излучателя, для которого в плоскостях, параллельных сторонам, поле равно нулю при $\theta = k\lambda/d_y$, где k - целое.

В присоевом цилиндре ($\theta < d/2z$) характер дифракционных эффектов другой. При $z \ll z_\phi$, (ближняя зона по всем частотам) здесь распространяется пилообразная волна (некоторую особенность в этом смысле имеет обсуждаемый ниже случай круглого излучателя). В дальней же зоне ($z \gg z_\phi$) волна состоит из коротких импульсов с плоским разрывным фронтом (для разрывной части волны здесь, очевидно всегда ближняя зона). Она может стать сферически расходящейся при учете конечности длины разрыва δ . Действительно, если $p_0(t)$ является гладкой функцией с минимальным временным масштабом δ/c , то поле на расстоянии $z \gg d^2/\delta$ (зона Фраунгофера по высокой частоте) и $\theta \approx 0$, (точнее $\theta \ll \delta/d$) дается выражением

$$p = \frac{S}{2\pi c z} \left. \frac{\partial p_0}{\partial t} \right|_{t=t-z/c} \quad (5)$$

Такая волна представляет собой последовательность импульсов с длительностью δ/c и амплитудой $p_0 S / \pi z \delta$ и соответствует волновой зоне.

В качестве примера, который будет использован ниже при описании нелинейного этапа, рассмотрим излучатель в виде круга диаметром d (для одиночного скачка давления этот случай обсуждался в [8,9]). На оси ($\theta = 0$) давление определяется формулой $p = p_0(t - z/c) - p_0(t - z/c - d^2/8cz)$ (ср. [8]) и в случае исходной "пилы" представляет собой последовательность прямоугольных импульсов с длительностью $\tau = d^2/8cz - E(d^2/8czT)$, где E — целая часть (функция Антье), и амплитудой $2p_0(1 - \tau/T)$, находящихся на пьедестале $2p_0\tau/T$. Ввиду симметрии это справедливо здесь даже при $z \ll z_\phi$, однако уже при малых отклонениях от оси ($\theta \gg \lambda/d$) волна в ближней зоне остается пилообразной. В дальней же зоне (фиг. 2) образуются импульсы, форма которых изменяется от оси к краю "пржекторной" области.

Под большими углами ($\theta \gg d/2z$), поле, согласно (4), дается периодической последовательностью импульсов вида

$$p = \sqrt{\tau t - t^2} \quad (0 \leq t \leq \tau), \quad (6)$$

где $\tau = \theta d/c$, $B = \rho_s c / \pi z \theta^2$, находясь на отрицательном пьедестале β . В переменных t $\xi = \rho/B$ импульс (6) представляет собой полуокружность, в соответствии со сказанным выше, а при $\tau > T$ эти полуокружности прекрываются (фиг. 2).

2. Как уже отмечалось, предыдущее рассмотрение справедливо при условии $R_d \ll R_*$, где R_* и R_d — характерные расстояния, на которых существенно сказываются, соответственно, нелинейность и дифракция. Эти расстояния, вообще говоря, зависят от направления. Для выполнения указанного условия достаточно удовлетворить неравенству

$$\sqrt{8 \varepsilon M_s} \ll \lambda/d, \quad (7)$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$, $M_s = \rho_s / \rho c^2$ — акустическое число Маха на излучателе (это неравенство соответствует большим значениям параметра N , введенного в [2]).

Если акустическое число Рейнольдса Re достаточно велико, то на расстояниях порядка R_* , нелинейные искажения накапливаются до существенных величин, даже с учетом дифракционных искажений. Мы будем считать выполненным условие (7), тогда в области вне "проекторного" цилиндра, под углами $\theta^2 \gg 2 \varepsilon M_s$, нелинейные искажения сказываются лишь в волновой зоне, где, согласно (4) дифракционные эффекты уже отсутствуют, и распространение происходит независимо вдоль каждой сферически расходящейся лучевой трубки. В результате нелинейная задача может быть поставлена так (ср. [3]): В некоторой начальной точке $z = R_0$ данной лучевой трубки задано граничное условие $p(R_0, \varphi, \theta, t) = \tilde{p}(t)$, определяемое линейной формулой (4). Распространение вдоль трубки при $z > R_0$ описывается решением в виде квазипростой волны

$$t - \frac{z - R_0}{c} + \frac{\varepsilon v z}{c^2} \ln(z/R_0) = f(v, R_0, \theta, \varphi). \quad (8)$$

где $v = \rho / \rho_s c$ — скорость частиц в волне, f — функция, обратная $\tilde{p}(t)/\rho c$. Соответствующая задача отличается

+) Это неравенство позволяет также пренебречь "саморефракцией", которая является эффектом порядка M_s^2 .

от рассмотренной в [3] существенно более сложной формой $\tilde{p}(t)$ (и, следовательно, $f(v)$). При наличии разрывов (ударных волн) формула (8) должна быть дополнена граничными условиями на разрыве, скорость которого, как известно, равна $c + \varepsilon(v_1 + v_2)/2$, где $v_{1,2}$ — значения, соответствующие волне (8), по разные стороны разрыва.

Практически нелинейные искажения могут быть существенны в основном для относительно небольших углов ($\theta \lesssim \lambda/d$). В этом случае в начале каждой лучевой трубки имеется последовательность разделенных между собой импульсов, и в случае выпуклого контура L , на фронте каждого из них, согласно (4) (см. также [7]) $\partial p / \partial t \rightarrow \infty$, т.е. слабый разрыв возникает уже при $z = R_0^{1/2}$, в дальнейшем нелинейность приводит к его росту и затуханию волны. Пользуясь обычными методами [3], получим, что эволюция скачка описывается уравнением

$$z^2 \ln(z/R_0) = \frac{2c^2}{\varepsilon} \int_0^z \frac{df}{dx} dz, \quad x = (v_1 - v_2)z. \quad (9)$$

Для малых углов ($\theta \ll \lambda/d$), когда $\tau = \theta d/c$ значительно меньше T , форма импульса быстро становится треугольной. Расстояние z_1 , где это произойдет, имеет порядок $R_0 \exp(c^2 \tau_0 / 2\varepsilon v_0 k_0)$, где τ_0, v_0 — длительность и амплитуда при $z = R_0$. Существенно, что, как известно, амплитуда $v_p = v_1 - v_2$ и длительность τ импульса при $z \gg z_1$ определяются только его начальной площадью, которая, согласно (3), не зависит от направления. При $z \gg z_1$ имеем

$$v_p = \sqrt{\frac{2\Omega c^2 \rho}{\varepsilon z \ln(z/R_0)}}, \quad \tau = \frac{2\Omega}{\rho v_p}. \quad (10)$$

Таким образом, при $z \gg z_1$ величина v_p практически перестает зависеть от направления, и на расстоянии z угловое распределение в области $\sqrt{2\varepsilon M_s} < \theta < \theta_*$ (где $z = z_1(\theta_*)$) изотропизируется, хотя волна состоит из разделенных импульсов, и закон затухания иной, чем в пи-образном случае. Эти треугольные импульсы расширяются до тех

*) Некоторый произвол в выборе R_0 здесь мало существенен, поскольку величина поля лишь слабо (логарифмически) зависит от R_0 (см. [3]).

пор, пока при некотором $z = z_2$ их длительность не станет равной T . При этом фронт одного импульса дополняет спад другого, и поле перед разрывом начинает изменяться. Расстояние z_2 для углов $\theta \ll \lambda/d$ равно $R_0 \exp(\pi^2 \lambda^2 \rho c^2 / \epsilon \rho_s^2)$; далее волна практически пилообразна, а ее амплитуда спадает как $(z \ln z)^{-1}$, т.е. быстрее, чем в (10).

В частном случае круглого излучателя, пользуясь (6), можно привести (9) к виду

$$\ln(z/R_0) = \frac{c^2}{\epsilon R_0 B_0} \left(-\frac{\sqrt{1/4 - V^2}}{V} + \frac{1}{4V^2} \arcsin 2V \right), \quad (11)$$

где $V = v_p z / b_0 R_0 \theta d$, $B_0 = B(R_0)$. Эта формула описывает (в неявном виде) изменение величины разрыва на этапе неперекрывающихся импульсов. Отсюда легко находится точка, где разрыв развивается до вершины импульса и волна становится почти треугольной. При этом $V = \frac{1}{2}$ и

$$z_1 = R_0 \exp(\pi \theta^2 \rho c^2 / \epsilon M_s). \quad (12)$$

То, что z_1 увеличивается с ростом θ , означает, что диссипация идет быстрее в области малых углов; это и приводит к выравниванию углового распределения поля.

Особого рассмотрения требует присеивая область ($\theta \lesssim \sqrt{2\epsilon M_s}$). В присеивом цилиндре ($\theta < d/2z$) дифракция формирует плоские разрывы и говорить о волновой зоне неправомерно. С учетом конечности длины ударного фронта δ мы все же приходим, как отмечалось, в волновую зону ($z \gg d^2/\delta$), где справедливо уравнение (9) и процесс может быть описан полностью, включая быструю изотропизацию поля вблизи оси. Однако теперь в неравенстве (7) λ заменяется на $\delta \ll \lambda$, что делает (7) весьма жестким условием, в реальных случаях оно отвечает столь малым амплитудам волны, что в волновой зоне Re быстро становится меньшим единицы, и нелинейность вообще несущественна (эта задача, впрочем, сохраняет интерес в линейной постановке). В нелинейном случае целесообразно оставаться в рамках "разрывного" приближения. Тогда в начале нелинейного этапа, при $\theta < d/2z$, разрыв на фронте образовавшегося импульса быстрее диссипирует на

краю "прожекторного" цилиндра, где импульсы имеют плоскую вершину, чем в середине, где импульсы прямоугольные (фиг.2). В результате (ср. [3]) середина фронта движется быстрее краев, и на расстоянии порядка $d/\sqrt{8\epsilon M_s}$ плоский разрыв переходит в сферически расходящийся с углом расходимости порядка $\sqrt{2\epsilon M_s}$. Импульсы становятся треугольными и снова соответствуют (10), так что приосевое излучение изотропизируется еще быстрее, чем поле под большими углами.

Таким образом, временное изменение поля в разных направлениях и на разных расстояниях оказывается совершенно различным, однако угловая зависимость сглаживается с расстоянием на том этапе, когда при всех $z > z_1$ поле состоит из отдельных треугольных импульсов; в дальнейшем волна переходит в пилообразную. Схематически трансформация излучения с расстоянием показана на фиг.2.

В качестве примера рассмотрим круглый излучатель диаметром 50 см, создающий в воде пилообразное поле с интенсивностью $0,2 \text{ вт/см}^2$ ($M_s = 4 \cdot 10^{-5}$) и периодом 20 мксек (основная частота 50 кгц). В этом случае импульсы на оси становятся треугольными на расстоянии $z_1 = 15 \text{ м}$, при этом их длительность равна 2,7 мксек; в дальнейшем она увеличивается, амплитуда волны уменьшается и на расстоянии около 300 м волна практически изотропна в угле около 40° . Угловое распределение интенсивности в волне на разных расстояниях показано на фиг. 3, где кривая 1 отвечает этапу линейной дифракции ($z = 10 \text{ м}$), а кривая 2 соответствует расстоянию 300 м. Здесь же показана диаграмма направленности линейной гармонической волны с тем же периодом (кривая 3), а также распределение интенсивности в волновой зоне для обсуждаемого ниже случая квазипростой волны (кривая 4).

Отметим, что для плоского гармонического излучателя, достаточно мощного, чтобы вызвать нелинейные искажения в волновой зоне, волна обычно успевает стать разрывной уже на "прожекторном" этапе. Принимая сечение пучка в соответствующей области за исходную апертуру, мы приходим к задаче, аналогичной только что рассмотренной. Однако даже в этом случае использованный здесь метод представляется более реалистичным, чем обсуждаемый в

[3,4], где предполагается, что нелинейность в ближнем поле не сказывается. Это различие должно быть особенно заметным для не очень больших расстояний, когда волна не успела вторично превратиться в пилообразную; при этом учет нелинейных искажений в ближней зоне понижает общую энергию волны и приводит к обострению направленности по энергии, (хотя направленность по основной гармонике на этом этапе еще не меняется). Оценки показывают, что этим, по-видимому, объясняется некоторое расхождение между данными эксперимента, описанного в (10), и результатами теории, учитывающей нелинейность только в дальней зоне.

В заключение кратко рассмотрим другой случай, когда исходное поле на излучателе не содержит разрывов, но уже существенно искажено по сравнению с синусоидальным. В простейшем случае это искажение определяется римановским решением

$$\omega t = a z c \sin(\rho_0 / \rho_s) - \sigma \rho_0 / \rho_s, \quad (13)$$

где $\omega = 2\pi/T$, а σ - параметр, характеризующий искажения волны, в данном случае $\sigma < 1$. Здесь условия разделения линейного и нелинейного этапов выполняются проще, чем для разрывной волны. Используя в линейном приближении формулу Кирхгофа (1), получим, например, что при $z \gg d^2/\lambda(1-\sigma)$ поле на оси описывается формулой (5) и имеет вид гладких импульсов с амплитудой $s\rho_s/z\lambda(1-\sigma)$ (фиг. 4). Усредняя поле на оси по t (ср. [11]), найдем, что средняя интенсивность на оси $I = \langle \rho^2 \rangle / \rho_s^2$ равна

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} - 1 \right) \frac{s^2 \rho_s^2}{z^2 \lambda^2}, \quad (14)$$

т.е. I растет с приближением σ к единице.

На линейном этапе угловое распределение поля сужается с ростом σ ; для $\sigma = 0,6$ оно показано на фиг. 3 (кривая 4). Нелинейный этап начинается в волновой зоне для всех θ если выполняется неравенство (7) с заменой λ на $(1-\sigma)\lambda$. В результате можно определить искажения волны, приводящие к сглаживанию ее угловых характеристик.

Целесообразно отметить, еще, что аналогичный подход позволяет рассчитать поле в сходящейся волне, создаваемой мощным акустическим концентратором [12] .

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.А.Заболотская, Р.В.Хохлов, Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков, Акуст. ж., 1969, 15, 1, 40-47.
2. О.В.Руденко, С.И.Солуян, Р.В.Хохлов, Ограниченные квазиплоские пучки периодических возмущений в нелинейной среде, Акуст. ж., 1972, 19, 6, 871-876.
3. Л.А.Островский, В.Е.Фридман, О направленности мощного акустического излучения, Акуст. ж., 1972, 18, 4, 584-589.
4. J.C.Lockwood, T.G.Muir, D.T.Blackstock, Directive harmonic generation in the radiation field of a circular piston. J.Acoust.Soc.Am., 1973, 52, 4, II48-II53.
5. Е.Скучик, Основы акустики, ИЛ, М., 1958.
6. А.А.Харкевич, Неустановившиеся волновые явления, ГИТТЛ, М., Л., 1950.
7. О.Г.Козина, Г.И.Макаров, Переходные процессы в акустических полях, создаваемые поршневой мембраной произвольной формы и при произвольном характере колебаний ее поверхности, Акуст. ж., 1961, 7, 1, 53-58.
8. О.Г.Козина, Г.И.Макаров, Переходные процессы в акустических полях поршневых мембран некоторых конкретных форм, Акуст.ж., 1962, 8, 1, 72-77.
9. J.C.Lockwood, J.G.Willette, High-speed method for computing the exact solution for the pressure variations in the near-field of a baffled piston. J.Acoust.Soc. Am., 1973, 52, 3, 735-741.

10. J.A.Shooter, T.G.Muir, D.T.Blackstock, Acoustic saturation of spherical waves in water. J.Acoust.Soc.Am., 1973, 55, I, 54-62.
11. Л.А.Островский, Величины второго порядка в бегущей звуковой волне, Акуст.ж., 1968, 14, 1, 82-89.
12. Л.А.Островский, А.М.Сутин, Фокусировка акустических волн конечной амплитуды, ДАН СССР, (в печати).

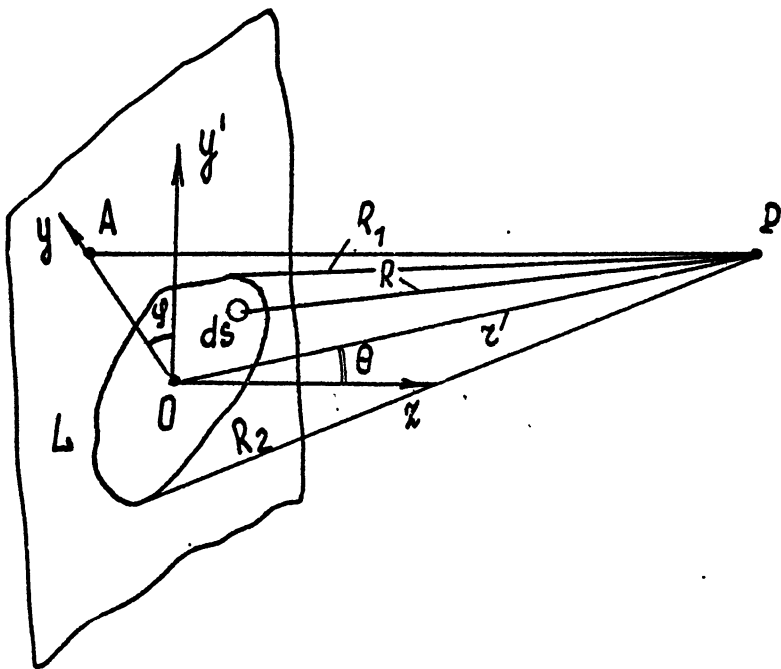


FIG. 1.

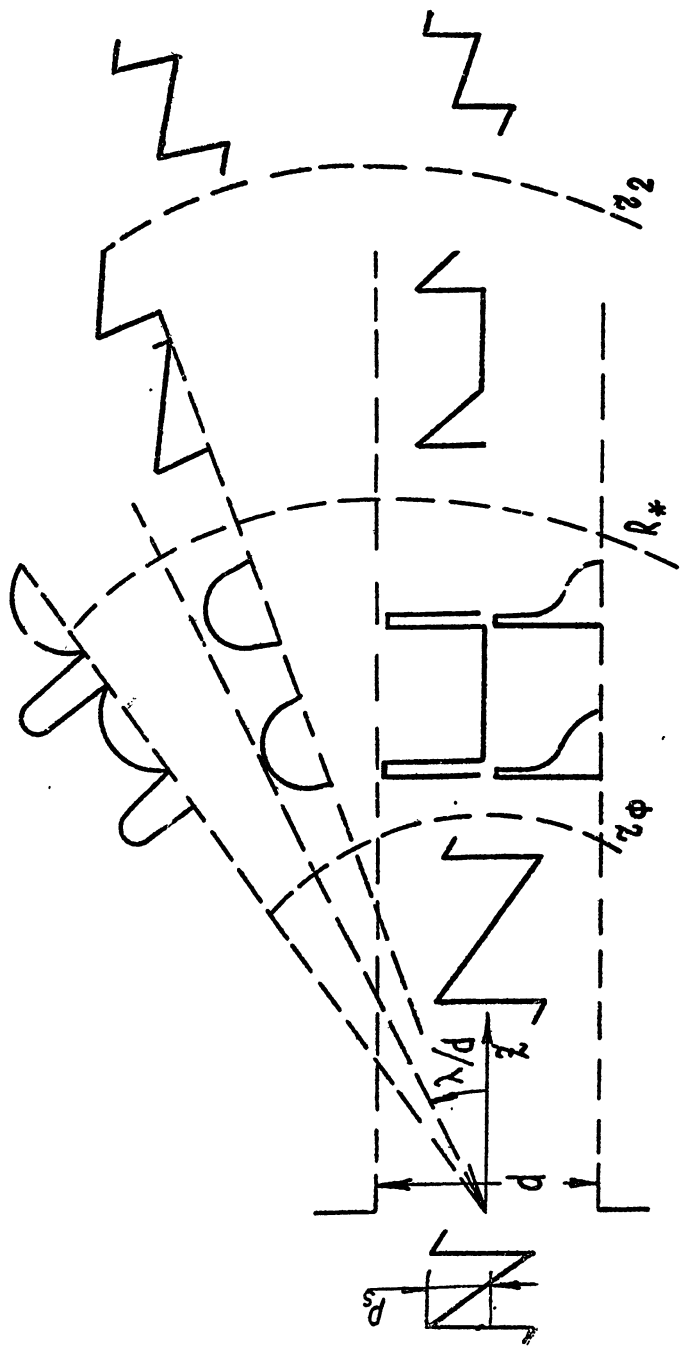


Рис. 2.

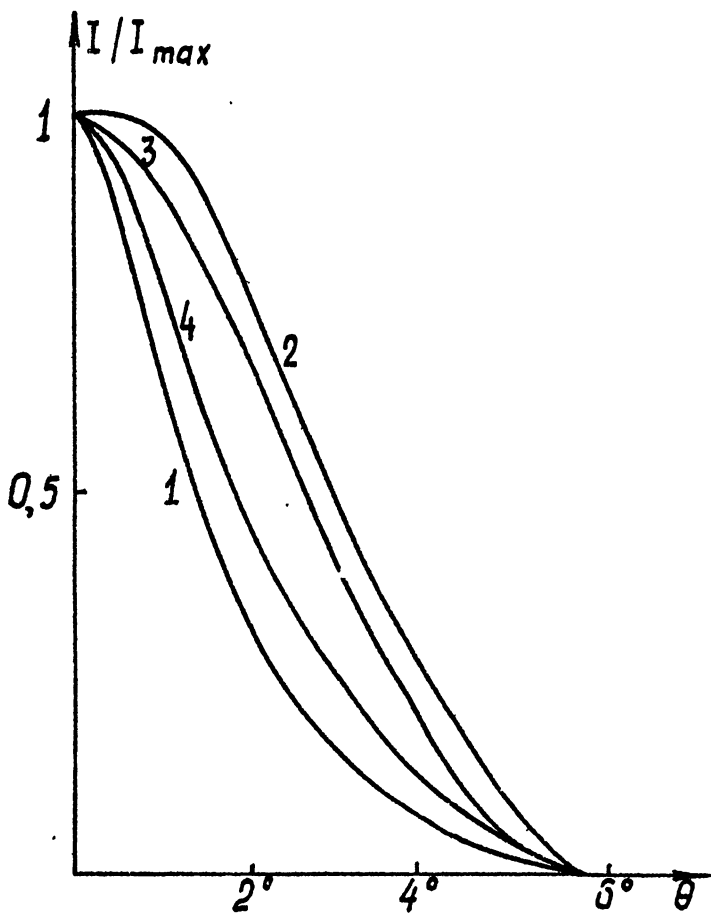


Рис. 3.

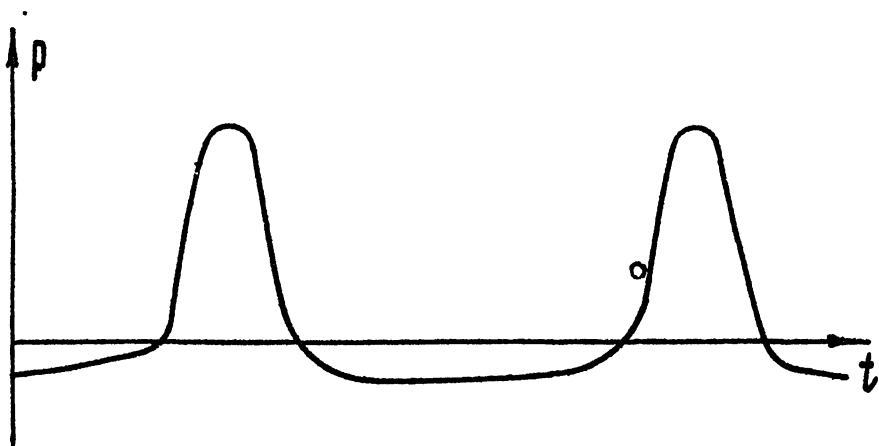


Рис. 4.