Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 71

НЕЛИНЕЙНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ

Л.А.Островский, А.М.Сутин.

Аннотация

Рассматриваются продольные упругие волны конечной амплитуды в твердом стержне с учетом дисперсии, обусловленной конечностью диаметра стержня. Выводится уравнение Кортевега-де Вриза для скорости частиц в такой волне: описывается процесс нелинейных искажений волны, включая образование стационарных акустических импульсов - солитонов. Учитываются реальные потери в стержне (аналогичные по своему влиянию затуханию Ландау для ионно-звуковых волн в плазме), которые для слабых волн предотвращают нелинейный распад, а для сильных приводят к выравниванию амплитуд солитонов в процессе затухания. Делаются простейшие количественные оценки. Показано, что подобные процессы возможны также для продольных волн в пластинках.

Распространение упругих волн конечной амплитуды в стержнях и пластинках обладает существенными особенностями по сравнению со случаем безграничной среды (точнее больших относительно длины волны образцов из того же материала). Конечность диаметра стержня вносит существенную дисперсию такого типа с которым связана возможность существования специфических нелинейных волн, в том числе стационарных уединенных импульсов - солитонов+) (эта возможность уже отмечалась нами в докладе [1]). Следует также отметить, что концентрация энергии волны в стержне малого диаметра дает возможность значительно увеличить нелинейные эффекты, а волноводные свойства стержня позволяют наблюдать накопление нелинейных эффектов на значительном расстоянии без влияния дифракционной расходимости.

1. Рассмотрим продольные упругие волны в стержне конечного диаметра [2а] . Продольные волны в данном случае наиболее интересны. Для поперечных (изгибных и крутильных) волн нелинейные эффекты в случае изотропного материала выражены гораздо слабее, поскольку они сказываются лишь в третьем порядке по амплитуде. Кроме того,

---

+) Аналогичной дисперсией обладают поперечные магнитоупругие волны [2] , однако для них нелинейность кубична по амплитуде и может быть заметна лишь в особых случаях [3] . Дисперсия связанная с конечностью периода кристаллической решетки [4] может быть заметна лишь на столь высоких частотах, где длина свободного пробега фонона уже не превосходит длины волны.

изгибные волны обладают сильной дисперсией, препятствующей нелинейным искажениям.

Будем исходить из Лагранжевой формы записи уравнений теории упругости. Используем общепринятое разложение внутренней энергии по инвариантам тензора деформаций с точностью до кубичного члена включительно [5]

$$\varepsilon = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right) u_{ll}^2 + \frac{A}{3} u_{ik} u_{il} u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3} u_{ll}^3 . \qquad (1)$$

Здесь u_i – компоненты вектора смещения, u_{ik} – компоненты тензора деформаций, μ – модуль сдвига, K – модуль объемной упругости, A, B, C – модули Ландау третьего порядка.

Характерная длина рассматриваемых волн считается много большей поперечных размеров стержня. Поэтому для них можно воспользоваться предположением Лява [6], о том, что смещение в радиальном направлении пропорционально радиальной координате r и осевой деформации, т.е.

$$u_r = -\sigma r \frac{\partial u_x}{\partial x} , \qquad (2)$$

где σ – коэффициент Пуассона, ось X направлена вдоль стержня. Интегрируя плотность энергии по поперечному сечению стержня и учитывая (2), получим одномерный лагранжиан

$$L = \int_S \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 - \varepsilon \right] dS = \qquad (3)$$

$$= \frac{S\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + (\sigma\nu)^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t}\right)^2 \right] - \frac{SE}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 - \frac{S\beta}{6} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^3 ,$$

где ρ – плотность, S – поперечное сечение стержня, E – модуль Юнга, ν – полярный радиус инерции (для цилиндрического стержня $\nu = a/\sqrt{2}$);

$$\beta = 3E + 2A(1-2\sigma^3) + 6B(1-2\sigma+2\sigma^2-4\sigma^3) + 2C(1-2\sigma)^3$$

– параметр нелинейности. Для большинства твердых тел $\beta < 0$ [7].

Уравнение Лагранжа, соответствующее (3), имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} - L \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \qquad (4)$$

где $c^2 = E/\rho$, $L = 6\nu$.

В силу сделанных предположений два последних члена в уравнении (4), описывающие эффекты нелинейности и дисперсии, малы (хотя и существенны для дальнейшего). При $\beta = 0$ (линейный случай) это уравнение неоднократно рассматривалось (см., например, [8]). При $L = 0$ (отсутствие дисперсии) это уравнение имеет тот же вид, это для продольной волны в свободном пространстве [7,9] , однако в данном случае как скорость волны, так и параметр нелинейности β , оказываются другими функциями параметров вещества.

Рассматривая нелинейную волну, бегущую в направлении X , перейдем к безразмерным координатам:

$$\tau = \frac{x}{L}, \quad \xi = \frac{(x - ct)}{L}, \quad v = -\frac{\beta}{2c^3\rho} \frac{\partial u_x}{\partial t}. \qquad (5)$$

Поскольку нелинейность и дисперсия малы, зависимость u_x от τ должна быть медленной по сравнению с зависимостью от ξ . Тогда, подставляя (5) в (4), пренебрегая членами порядка $\partial^2/\partial\tau^2$ и интегрируя по ξ , получим

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, продольная скорость частиц стержня удовлетворяет уравнению Кортевега–де Вриза (KdV). Его решения неоднократно исследовались в связи с процессами различной физической природы (см., например, [10]). Обсудим вкратце свойства упругих волн в стержне в этом приближении.

2. Рассмотрим сначала достаточно сильную низкочастотную волну в стержне, когда нелинейность преобладает над дисперсией $(v_0 \ell^2/12 \gg 1$, где v_0 , ℓ – амплитуда и характерная длина волны в переменных (5)). Тогда на начальном этапе дисперсионным членом можно пренебречь и решение соответствует простой волне.

$$v = F(\xi - v\tau), \tag{7}$$

где F – произвольная функция. Деформация такой волны ведет к росту крутизны ее фронта и далее, формально, к неоднозначности (опрокидыванию). Если, например, при $x=0$ переменная v изменяется по гармоническому закону с амплитудой v_s и частотой ω, то в рассматриваемом приближении волна "опрокидывается" на расстоянии $x_* = c/\omega v_s$.

3. При $x > x_*$ в волне образуется участок большой крутизны, где дисперсией пренебречь нельзя, и необходимо решать уравнение KdV (6) в полном виде. Поскольку потери отсутствуют, то при $x > x_*$ на фронте волны всегда возникают осцилляции, и волна конечной длительности разбивается на несколько уединенных импульсов (солитонов) вида

$$v = A\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\xi - W\tau}{\Delta}\right), \tag{8}$$

где избыточная (по отношению к линейной скорости c) скорость волны W, и пространственная ширина солитона Δ (по уровню $0{,}8A$) связаны с его амплитудой соотношениями

$$A = 3W, \quad \Delta = \sqrt{12/A}. \tag{9}$$

Например, для цилиндрического стального стержня в размерных переменных

$$\Delta_p \simeq 0{,}3\,a/\sqrt{M}, \tag{10}$$

где $M = \frac{1}{c}\frac{\partial u_x}{\partial t}$ – акустическое число Маха.

Минимальная длина солитона достигается при максимально возможном упругом напряжении, для которого еще выполняется закон Гука. Для стали порого пластичности соответствует $M \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ [6]. При этом длина солитона составляет примерно семь диаметров стержня (т.е. предположение о малости поперечных размеров стержня по сравнению с длиной волны практически всегда выполняется для солитонов).

В волне достаточно большой длительности число образовавшихся солитонов может быть велико, а амплитуда первого из них примерно вдвое превышает исходную. Заметим, что эта особенность, связанная с конечностью диаметра стержня, может способствовать появлению необратимых деформаций в веществе.

Искажение упругого импульса и его распад на солитоны схематично показаны на рис. 1.

Выше всюду говорилось о величине v, пропорциональной продольной скорости частиц среды. Иногда более характерной величиной является продольная деформация $u_x = -\frac{2\rho c^3}{\beta}\int v\,dt$. В частности, солитону скорости отвечает волна смещения в виде перепада величиной

$$(u_x)_{max} = \frac{8\sqrt{3}\,\rho\, c^3 \nu\, \sigma}{\beta} \sqrt{A(\tau)} \,. \tag{14}$$

Следовательно, амплитуда солитонов скорости пропорциональна квадрату максимального смещения, а процесс распада на солитоны соответствует появлению расходящихся "ступенек" в профиле смещения (рис. 1б). Поперечное же смещение боковой поверхности стержня (величина удобная для индикации волн в стержне), согласно (2), изменяется во времени так же, как продольная скорость.

4. Чтобы оценить реальные возможности наблюдения нелинейных волн, необходимо рассмотреть вопрос о влиянии потерь в стержне. Для этого следует добавить в левой части уравнения (6) соответствующий линейный оператор $\hat{S}(v)$, вид которого зависит от механизма диссипации. Если из линейной теории известна частотная зависимость декремента затухания, т.е. мнимой части волнового числа $K''(\omega)$ для гармонических волн, то оператор $\hat{S}(v)$ определяется из обратного преобразования Фурье. Например, в случае когда потери определяются вязкостью или теплопроводностью в стержне, т.е. $k'' = \mu\omega^2$, мы получим $\hat{S}(v) = \mu c^2 L^{-1}\, \partial^2 v / \partial \xi^2$, (значение μ для продольных волн в стержне вычислено, например в [5]). При этом (6) имеет вид уравнения Бюргерса Кортевега-де Вриза, которое также неоднократно рассматривалось в последнее время. В частности, были выяснены особенности затухания солитонов при малых потерях [11,12].

Однако в большинстве реальных случаев затухание в твердом теле имеет другой характер. Эксперименты, проведенные для многих сред, включая металлы [13] , показывают, что в линейном случае гармоники волн в стержне затухают как $exp(-\varepsilon kx/2)$, где k – волновое число, ε – постоянный коэффициент потерь. Этот закон справедлив для частот на которых еще не сказывается рассеяние волны на отдельных кристаллах в структуре вещества; для металлов эти частоты простираются по меньшей мере до нескольких мегагерц.

Нетрудно убедиться, что наличие таких потерь приводит к появлению в (6) члена вида

$$\hat{S}(v) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial \xi'} \frac{d\xi}{\xi - \xi'} , \qquad (11)$$

где интеграл понимается в смысле его главного значения. Интересно отметить, что уравнение (6) с членом (11) описывает также распространение нелинейных ионно-звуковых волн в плазме с учетом затухания Ландау [14,15] . Приведем здесь некоторые результаты, существенные для рассматриваемых упругих волн.

Плавные возмущения, для которых можно пренебречь дисперсионным членом в (6), искажаются как "квазипростая" волна с увеличением крутизны фронта. Однако потери замедляют искажения, а при небольшой амплитуде волны опрокидывания вообще не происходит. Для синусоидального входного возмущения опрокидывание наступает при условии

$$M > - \frac{\rho c^2 \varepsilon 10^{-2}}{\beta} . \qquad (12)$$

Таким образом, амплитуда волны должна превышать некоторое (не зависящее от частоты) пороговое значение. Например, для стали ($\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-4}$) это значение соответствует $M \approx 3 \cdot 10^{-7}$.

При больших амплитудах на крутом участке волны сказывается дисперсия+). В волне появляются осцилляции, и, как

+) Потери, обусловленные вязкостью или теплопроводностью (см.выше) могут приводить к установлению стационарного перепада ударной волны.

и выше, происходит разбиение на солитоны, каждый из которых затухает по закону

$$A(\tau) = \frac{A(0)}{\left(1+\frac{\gamma\varepsilon\tau}{8\pi}\sqrt{A(0)/3}\right)^2}, \tag{13}$$

где

$$\gamma = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2\beta \, \frac{\partial \operatorname{sech}^2\beta'}{\partial\beta'} \, \frac{d\beta' \, d\beta}{\beta-\beta'} \approx 0{,}725 .$$

Формула (13) справедлива при достаточно малых потерях (точнее при $\varepsilon/2\pi \ll \tau$). Заслуживает внимания то обстоятельство, что на достаточно большом интервале амплитуда солитона перестает зависеть от его начальной амплитуды ($A \sim \tau^{-2}$). В результате амплитуды различных солитонов по мере затухания выравниваются.

5. В качестве примера рассмотрим распространение ультразвуковой волны в стальной проволоке диаметром в 1 мм (задача представляющая определенный практический интерес). Для волны с частотой 100 кгц и амплитудой скорости 50 см/сек (мощность порядка 5 вт) расстояние опрокидывания X_* составляет около 8 м. При $X > X_*$ на каждом периоде волны возникают несколько солитонов, наибольший из которых имеет амплитуду около 100 см/сек и длину около 1 см. Далее на расстоянии около 55 м произойдет обратное преобразование формы волны в синусоидальную [16]. Наблюдение этого процесса представляется вполне реальным, поскольку затухание таких волн из-за потерь в стержне сказывается лишь на расстоянии порядка 100 м (потери на излучение в воздух также малы). Для возможной реализации подобных эффектов представляет также интерес использование ограниченных стержней (резонаторов) с многократными пробегами волны. Для накопления нелинейных эффектов резонатор должен ограничиваться жесткими отражающими границами или быть замкнутым в кольца; заметим, что существенные нелинейные эффекты (параметрическая генерация и преобразование спектра) уже наблюдались экспериментально в кольцевых резонаторах [17].

6. В заключение отметим, что аналогичные эффекты возможны в тонких пластинках, где продольные волны обладают тем же типом дисперсии, что и в стержнях [18]. Для них может быть использовано уравнение (4) с коэффициентами

$$c^2 = \frac{E}{\rho(1-\sigma)^2}, \quad L^2 = \frac{b^2\sigma^2}{12(1-\sigma)^2}, \tag{15}$$

$$\beta = \frac{3E}{(1-\sigma^2)} + A\left[1-\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^3\right] + 3B\left[1-\frac{\sigma}{1-\sigma} + \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^2 + \frac{2\sigma^3}{(1-\sigma)^3}\right] + C\left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\right)^3,$$

где b – толщина пластинки.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что даже простейшие нелинейные эффекты (например, генерация второй гармоники) для продольных волн соответственно в свободном пространстве, стержнях и пластинках определяется тремя различными комбинациями трех констант третьего порядка, характеризующими твердое тело Это, по-видимому, дает возможность измерения каждой из этих констант в отдельности нелинейными методами, которые ранее позволяли весьма точно определять только одну их комбинацию [7], отвечающую плоской волне в свободном пространстве.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л.А.Островский, А.М.Сутин, Восьмая Всесоюзная акуст. конференция, Рефераты докладов, т.2, стр.7, М., 1973.

2. Р. Труэлл, Ч.Эльбаум, Б.Чик, Ультразвуковые методы в физике твердого тела, "Мир", М., 1972.

3. Л.Н.Давыдов, З.А.Спольник, ФТТ, 16, 1710, 1974.

4. Ю.В.Чугаевский, Уравнения нелинейных и быстропеременных волновых процессов, "Штиинца", Кишинев, 1972.

5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория упругости, "Наука", М., 1965.

6. А.Ляв, Математическая теория упругости, ГИТТЛ., М.,-Л., 1935.

7. Л.К.Зарембо, В.А.Красильников, УФН, 102, 549, 1970.

8. Х.Н.Эйбрамсон, Х.Дж.Пласс, Э.М.Риппергер, Проблемы механики, вып.3, стр.24, ИЛ, М., 1961.

9. Д.Бленд, Нелинейная динамическая теория упругости, "Мир", М., 1972.

10. В.И.Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, "Наука", М., 1973.

11. E.Ott, R.N.Sudan, Phys.Fluids, 13, 1432, 1970.

12. Е.Н.Пелиновский, ПМТФ, 2, 68, 1971.

13. Л.Бергман, Ультразвук и его применение в науке и технике, ИЛ, М., 1957.

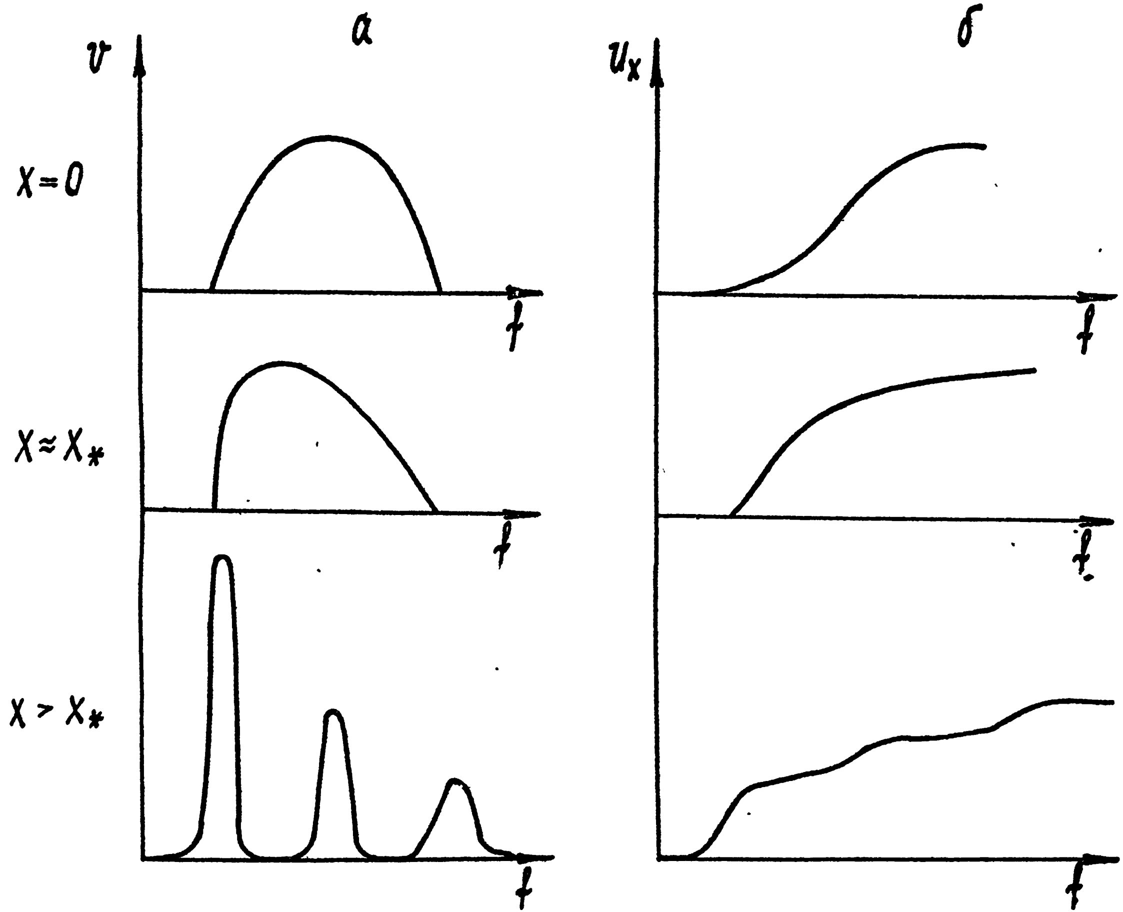
14. E.Ott, R.N.Sudan, Phys.Fluids, I3, 694, I970.

15. Е.Н.Пелиновский, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 8, 1281, 1971.

16. F.D.Tappert, C.N.Judice, Phys.Rev.Lett., 29, I308, I972.

17. Л.А.Островский, И.А.Папилова, А.М.Сутин, ЖТФ, 43, 2213, 1973.

18. Г.Кольский, Волны напряжения в твердых телах, ИЛ, М., 1955.



а
б
v
u_x
$x = 0$
$x \approx x_*$
$x > x_*$
f
f
f
f
f
f