Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 72

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИМПУЛЬСОВ С РАЗРЫВНЫМИ ФРОНТАМИ

В.Е. Фридман.

Горький – 1975 г.

Аннотация

Рассматривается взаимодействие, движущихся в одном направлении, треугольных импульсов разных знаков, малой, но конечной амплитуды. Показано, что амплитуды разрывов взаимодействующих импульсов определяются двумя безразмерными параметрами, составленными из амплитуд и длительностей исходных импульсов. Найдена также величина области взаимодействия и показана ее зависимость от этих параметров.

В ряде задач, связанных, например, с Бюргеровской моделью турбулентности, требуется исследовать взаимодействие волновых импульсов треугольной формы с узким ударным фронтом [1,2]. В такой постановке взаимодействие импульсов конечной амплитуды, обусловленное наличием разрывных фронтов, связано с отличием скорости движения скачка от скорости звука. Здесь различаются два случая – взаимодействие однополярных импульсов и взаимодействие импульсов разных знаков. В движущейся со скоростью звука системе координат эти взаимодействия могут быть названы соответственно попутным и встречным. Попутное взаимодействие ранее изучалось в связи с задачей о догоне однополярных треугольных импульсов в асимптотике ударных волн [3]. Ниже будет исследоваться встречное взаимодействие, которое имеет место при движении ударных волн разных знаков. Указанные случаи отличаются динамикой взаимодействующих импульсов, поскольку при догоне взаимодействие, как известно, сказывается на изменении скорости фронта догоняющего импульса, а при встречном взаимодействии, как будет показано, меняются характеристики движения обоих ударных импульсов.

После столкновения разрывов встречное взаимодействие сводится к движению скачка по профилю несимметричной волны, которая меняется как простая волна всюду, за исключением области скачка; движение самого скачка происходит со скоростью, определяемой значением поля на разрыве, отличающейся в общем случае от скорости звука. Законы движения скачка малой амплитуды достаточно хорошо изучены [4 ÷ 6]; здесь используется система уравнений для амплитуд разрывов в следующей форме [6]:

$$\frac{\alpha x}{c^2}(u_+ - u_-) = f(u_+) - f(u_-)$$
$$\frac{\alpha}{2c^2}(u_+ - u_-)\frac{dx}{du_+} + \frac{\alpha x}{c^2} = \frac{df(u_+)}{du_+} \tag{1}$$

Здесь $\alpha = (\gamma+1)/2$, γ – постоянная адиабаты, x – координата, c – скорость звука, $u_\pm$ – значение поля скоростей на разрыве, $f(u)$ – произвольная функция, определяемая видом граничного условия; $f(u)$ – обратная функция $u(0,t)$.

Граничное условие зададим в точке $x = 0$, что соответствует координате встречи двух импульсов разных знаков; форма колебания в этой точке изображена на фиг.1. Определим теперь обратную функцию $f(u)$ и проинтегрируем второе уравнение системы (1), используя первое уравнение как связь между значениями поля $u_\pm$ на разрыве. В результате получим решение системы (1) которое описывает изменение величин, связывающих разрыв с расстоянием

$$U_\pm(z) = \frac{R(RS+1)}{S(1-R^2)}\left[\frac{R+S}{1+RS}\left(\frac{z+k^{-1}}{z+R}\right)^{\pm 1/2} - 1\right]. \tag{2}$$

Здесь введены безразмерные амплитуды $U_\pm = u_\pm / a_+$ (считаем для определенности, что $a_+ > 0$; $a_- < 0$) и безразмерная координата $z = x/\sqrt{|R_+ R_-|}$, где $R_\pm = c^2 T_\pm / \alpha a_\pm$ – некоторые характерные координаты нелинейного затухания импульсов, $a_\pm$ и $T_\pm$ – амплитуды и длительности импульсов в точке начала взаимодействия $x = 0$, (см. фиг.1).

Решение (2) зависит от двух параметров R и S , которые определяются граничными условиями следующим образом:

$$R = \sqrt{\left|\frac{R_+}{R_-}\right|} = \left[\left|\frac{a_- T_+}{a_+ T_-}\right|\right]^{1/2}; \quad S = \sqrt{\left|\frac{S_+}{S_-}\right|} = \sqrt{\left|\frac{a_+ T_+}{a_- T_-}\right|} \tag{3}$$

Величина R^2 является отношением градиентов линейных частей волновых профилей. Величина S^2 – отношение площадей $S_\pm$ положительного и отрицательного импульсов. Влияние этих параметров не равнозначно. Параметр R определяет, в основном, темпы нелинейного затухания амплитуды скачков. Отметим, что при $R = 1$, т.е. при взаимодействии треугольных импульсов с равными углами наклона, значения $U_{\pm}$ на разрыве меняются как

$$U_{\pm}(z) = \frac{1}{2S}\left[S - 1 \pm \frac{1+S}{1+z}\right]. \qquad (4)$$

В частности, при взаимодействии одинаковых импульсов ($S = 1$), выражение (4) дает хорошо известный результат, соответствующий эволюции разрыва в симметричной, пилообразной волне [7].

В процессе взаимодействия, при любых значениях параметров R и S, импульс одного знака с большим значением площади "поглощает" импульс противоположного знака. Начиная с некоторой координаты z_* остается волновой профиль лишь одного знака, трансформирующийся в дальнейшем по известным законам [7], причем его площадь остается постоянной и равной разности площадей исходных импульсов. Из соотношения (2) можно получить зависимость координаты полного "поглощения" z_* от параметров R и S и, тем самым, отыскать область взаимодействия $(0, z_*)$.

$$z_* = \frac{R + R^{-1} + 2S}{S^2 - 1}. \qquad (5)$$

Координата z_* неограничена только при $S = 1$, т.е. в случае, когда площади взаимодействующих импульсов равны. Это, согласно (2), приводит к образованию симметричного импульса с амплитудой $U(z) \approx U_+(z) \approx U_-(z) = (1+R)/2z$. Трансформация взаимодействующих волн в такой симметричный импульс происходит на расстоянии $z \gg \max\{R; \frac{1}{R}\}$. Изменение амплитуд импульсов в этом случае показано на фиг. 2а ($R = 1/2$), а на фиг. 2б дано изменение волнового профиля с расстоянием. Если $S \neq 1$, то область взаимодействия импульсов ограничена при любых значениях параметра R. После взаимодействия образуется однополярный треугольный импульс с величиной скачка

$$U(z_*) = \frac{(S^2 - 1)\sqrt{R}}{S(1+R)\left[RS^2 + 2S + R^{-1}\right]^{1/2}}. \qquad (6)$$

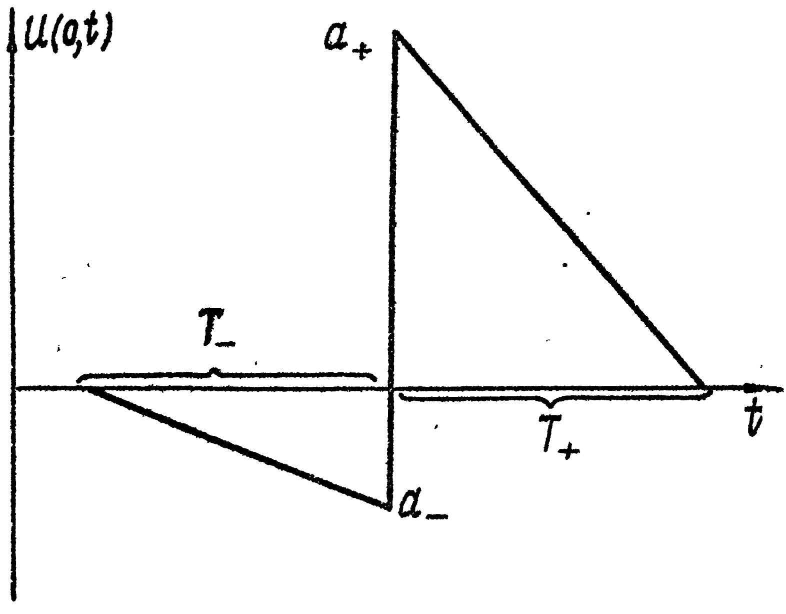
График зависимости величины скачка после взаимодействия от параметра нелинейности R представлен на фиг. 3. Малые значения параметра R соответствуют линейному закону изменения величины перепада $U(z_*)\approx(S^2-1)R/S$; при больших значениях R величина перепада уменьшается как $(S^2-1)/RS^2$. При одной и той же величине отношения площадей S всегда могут быть определены два значения параметра нелинейности R , для которых величины скачков треугольных импульсов, "выживающих" после взаимодействия, одинаковы. Это обстоятельство указывает на некорректность обратной задачи в ударном приближении, которая, в отличие от обратной задачи для волн с учетом конечной вязкости [8] , не позволяет определить однозначно параметры исходных импульсов по результатам их взаимодействия.

В процессе движения длительности взаимодействующих импульсов также меняются из-за движения разрыва. Соответствующие аналитические соотношения могут быть получены из (2) и закона движения скачка. Нетрудно показать, что после взаимодействия, т.е. при $z \geqslant z_*$ остается импульс с длительностью, равной сумме длительностей исходных импульсов для любых значений параметров R и S , кроме $S = 1$, когда (см. фиг. 2б) длительности импульсов на большом расстоянии сравниваются. Таким образом приведенные здесь соотношения позволяют полностью определить изменение параметров импульсов в процессе взаимодействия.

Автор благодарен Л.А.Островскому и Е.Н.Пелиновскому за полезные замечания.

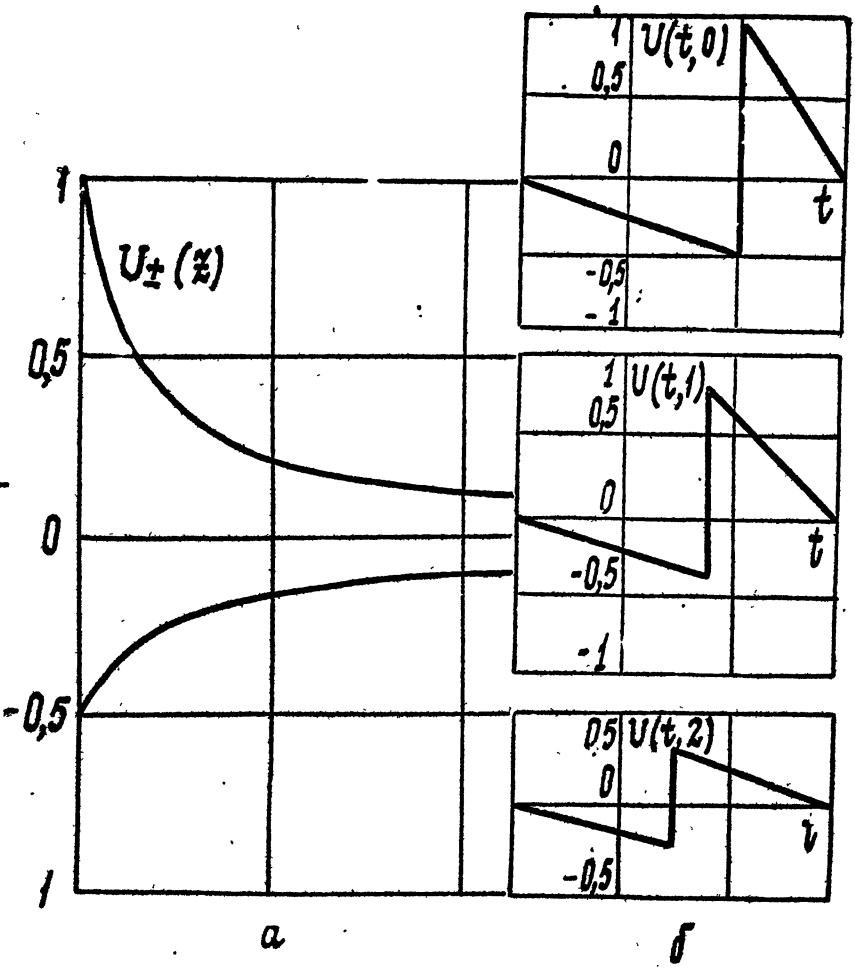
ЛИТЕРАТУРА

1. J.D.Murrey, On Burgeers' model equations for turbulence. J.Fluid Mech., 59, 2, 263-279 (1973).
2. T.Tatsumi, S.Kida, Statistical mechanics of the Burgeers model of turbulence. J.Fluid Mech., 55, 4, 659-675 (1972).
3. М.А.Цикулин, О догоне одного треугольного профиля давления другим в асимптотике ударных волн, ПМТФ, № 2, 132 (1960).
4. К.Е.Губкин, Распространение разрывов в звуковых волнах, ПММ, 22, 4, 561-564 (1959).
5. Л.А.Островский, К теории волн в нестационарных сжимаемых средах, ПММ, 27, 5, 924 (1963).
6. Л.А.Островский, Модулированные волны в нелинейных нестационарных средах. Докторская диссертация, АКИН, Москва, (1973).
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, (1953).
8. Е.Н.Пелиновский, В.Е.Фридман, Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью, ПММ, 38, 6, 991-995 (1974).



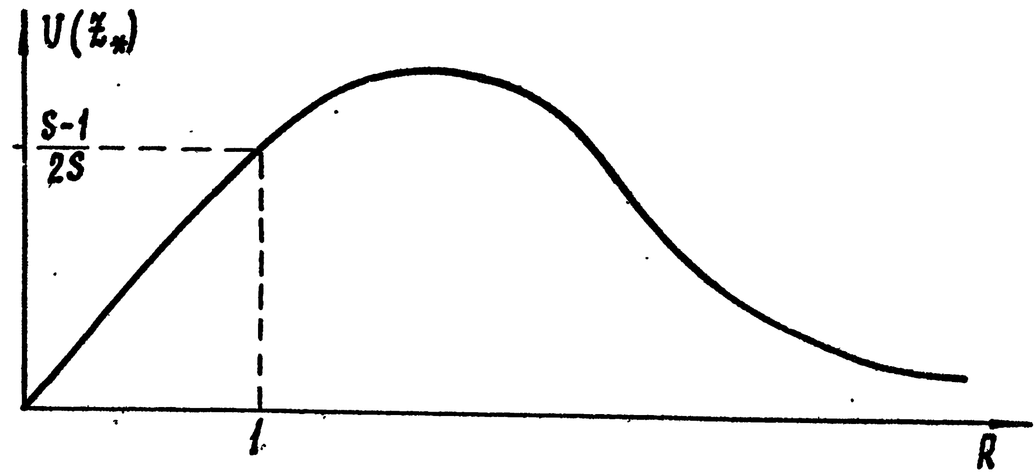
Фиг. 1

Пф. 174316



Фиг. 2

10с.



Фиг.3