

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 74

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В НЕОДНОРОДНОЙ
СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ КАУСТИК

Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский
В.Е. Фридман.

Горький - 1975 г.

А н н о т а ц и я

Изучается распространение интенсивных звуковых волн в среде с плавно меняющимися плотностью и давлением. Для описания эволюции волны вдали от каустик используется метод нелинейной геометрической акустики. Поле вблизи каустики "сшивается" с помощью формул линейной теории (преобразования Гильберта). Обсуждаются условия применимости такого подхода. В этом приближении изучено прохождение через каустику римановой и ударной волн. Исследуется дальнейшая эволюция отраженной волны. Показано, что дифракционное преобразование формы волны на каустике приводит к увеличению нелинейного затухания отраженной волны на больших расстояниях. В качестве примера рассмотрено распространение интенсивной акустической волны в слоистой среде с линейным профилем скорости звука.

1. Распространение интенсивных звуковых волн в плавно неоднородных средах может быть описано с помощью уравнений нелинейной геометрической акустики [1-4]. Задачи, решавшиеся до сих пор на их основе, относились в основном к одномерным волнам, распространяющимся вдоль градиента неоднородности (вертикальное движение простых и ударных волн в атмосфере) [1-10]. Исследование волн, распространяющихся под произвольными углами к градиенту неоднородности⁺), встречается с обычной трудностью, связанной с появлением каустик, вблизи которых применимость геометрических методов нарушается. В линейной среде каустика, как известно, эквивалентна фазовому преобразователю, изменяющему фазу спектральных компонент волны на $-\pi/2$. Для немонахроматического сигнала это приводит к существенному искажению его формы уже в линейном приближении (см., например, [12,13]).

Общее решение задачи о поведении нелинейных волн вблизи каустики затруднительно. Однако, поскольку нелинейные искажения волны малой, но конечной амплитуды проявляются на сравнительно больших расстояниях, то при определенных условиях изменение формы волны из-за дифракции в прикаустической области (размер которой порядка нескольких длин волн) оказывается более существенным, чем нелинейные искажения. В результате расчет трансформации волнового поля на каустике может проводиться без учета нелинейности. Это позволяет "сшить" нелинейные решения для волн до и после каустики с помощью формул

⁺) Двумерная задача такого рода недавно рассматривалась для морских волн в прибрежной зоне [11], однако вопрос о поведении поля на каустиках практически не обсуждался.

линейной теории. Таким способом удается получить достаточно простой алгоритм для расчета всего процесса распространения нелинейной волны в неоднородной среде при наличии каустик.

2. Как указывалось, решение вне каустических поверхностей может быть получено с помощью метода нелинейной геометрической акустики. Определяя лучи решением уравнения эйконала $c^2(\nabla\tau)^2 = 1$, отвечающего линейной задаче, можно записать нелинейное решение в виде [2,4]

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \rho_m F\{\omega\tau - \omega\mathcal{P}/R_* \rho_m\} \\ \rho &= \rho_0 \sqrt{\frac{\Delta c_0 \rho_0}{\Delta_0 c \rho}} \quad , \quad \mathcal{Z} = \int_0^{\ell} \sqrt{\frac{\Delta_0 \rho_0 c_0^5}{\Delta \rho c^5}} d\ell \quad , \quad \tau = \int_0^{\ell} \frac{d\ell}{c} \quad . \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь ρ - возмущение давления в волне, ℓ - лучевая координата, τ - время движения по лучу, Δ - сечение лучевой трубки, $\rho(\ell)$ и $c(\ell)$ - плотность среды и скорость звука; параметр $R_* = c_0^3 \rho_0 / \varepsilon \omega \rho_m$ соответствует координате образования разрыва в плоской монохроматической волне с амплитудой ρ_m и частотой ω при движении в однородной среде с параметрами ρ_0 и c_0 ; $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$, γ - показатель адиабаты; F - произвольная функция, определяемая из граничного условия при $\ell = 0$. Таким образом, в приведенных переменных τ , \mathcal{Z} и \mathcal{P} , определяемых вариацией параметров среды и изменением сечения лучевых трубок, решение имеет вид простой волны[†]). Амплитуда волны изменяется так же, как в линейной теории. Нелинейность приводит к изменению формы волны из-за дополнительного слагаемого $\mathcal{Z}\mathcal{P}/R_*\rho_m$ в аргументе выражения (1). Важной характеристикой нелинейности является расстояние, на котором первоначально гладкое возмущение

[†]) Здесь не учитываются эффекты нелинейной саморефракции лучей, которые проявляются лишь во втором порядке по амплитуде волны [14].

становится разрывным +).

$$z_s = \int_0^{z_s} \sqrt{\frac{\Delta_0 \rho_0 c_0^5}{\Delta \rho c^5}} dl = \frac{R_*}{\max |dF/dwt|} \quad (2)$$

При $z \geq z_s$ решение (1) должно быть дополнено граничными условиями на разрыве (ударной волне). Учитывая, что скорость последнего равна $c + \epsilon \gamma (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) / 2 \rho c$, где $\mathcal{P}_{1,2}$ - значения приведенного давления в точках волны на разрыве, можно получить из (1) следующую систему уравнений, описывающую изменение $\mathcal{P}_{1,2}$ с расстоянием

$$\frac{z}{R_*} (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = \rho_m [\varphi(\mathcal{P}_1) - \varphi(\mathcal{P}_2)] \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) \frac{d}{d\mathcal{P}_1} \left(\frac{z}{R_*} \right) + \frac{z}{R_*} = \rho_m \frac{d\varphi(\mathcal{P}_1)}{d\mathcal{P}}$$

где φ - функция, обратная F . Решение (3) в общем случае найти не удается. Для начальной стадии развития из (3) получаем

$$\mathcal{P}_{1,2} = \mathcal{P}_* \pm \rho_m \sqrt{\frac{(z - z_s) / R_*}{\frac{1}{6} \frac{d^3 \varphi}{d\mathcal{P}^3} \Big|_{\mathcal{P} = \mathcal{P}_* / \rho_m}}}} \quad (4)$$

Здесь \mathcal{P}_* - точка на профиле волны, где впервые образуется скачок ($d^2 \varphi(\mathcal{P}_*) / d\mathcal{P}^2 = 0$). Из системы (3) следуют также хорошо известные асимптотические выражения для изменения амплитуды разрыва с расстоянием при $z \gg R_*$

амплитуда знакопостоянного импульса меняется как $z^{-1/2}$, а периодическая волна стремится к пилообразной с амплитудой, пропорциональной z^{-1} . В случае, когда волна создается монохроматическим источником, т.е. в (1) - $F(\xi) = \sin \xi$, разрыв образуется при $z_s = R_*$ и его амплитуда $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_1 = -\mathcal{P}_2$ описывается известным уравнением

$$\mathcal{P}_s = \rho_m \sin(z \mathcal{P}_s / R_* \rho_m) \quad (5)$$

+) Возможен случай, когда неоднородность препятствует образованию скачка и ударная волна вообще не образуется [4]. Для этого необходима ограниченность $z(l)$ при $l \rightarrow \infty$.

В частности, из (5) следуют простые асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_S &\approx P_m \sqrt{(z - R_*)/R_*} & (z - R_* \ll R_*) \\ \mathcal{P}_S &\sim P_m \pi R_* / z & (z \gg R_*) . \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, для расчета волн малой, но конечной амплитуды в приближении нелинейной геометрической акустики, необходимо построить систему лучей соответствующей линейной задачи, вычислить приведенную координату z и далее воспользоваться соотношениями (1)–(3), для нелинейной волны в эквивалентной однородной среде.

3. Приведенные выше формулы корректно описывают движение нелинейной волны вдоль лучевой трубки всюду, за исключением прикаустической области, где метод геометрической акустики неприменим. Все же рассмотрим сначала результаты, вытекающие для поля на каустике из лучевого подхода. Оценим величину приведенной координаты z , характеризующую степень нелинейных искажений. Для области вблизи каустики можно пренебречь изменением параметров среды ρ и c и учесть только быстрое изменение площади сечения лучевой трубки $\Delta(\ell)$, поскольку на каустике $\Delta = 0$, а вблизи нее $\Delta \sim |\ell - \ell_k|^\alpha$, где $\alpha = \text{const}$, ℓ_k – лучевая координата каустики. Тогда в (1) величина $|z - z_k| \sim |\ell_k - \ell|^{1-\alpha/2}$ остается конечной вплоть до каустики, если $\alpha < 2$. Отметим, что на простой каустике $\alpha = 0,5$ (этот случай и рассматривается ниже). Таким образом, даже в рамках нелинейной геометрической акустики неограниченное возрастание амплитуды в прикаустической области не сопровождается неограниченным искажением формы волны из-за нелинейности. В то же время изменение формы монохроматического сигнала на каустике из-за дифракции значительно. Поэтому следует ожидать, что при малой амплитуде волны нелинейными эффектами можно пренебречь (соответствующие оценки приведены ниже) и решать линейную задачу о волновом поле на каустике. Для монохроматической волны решение такой задачи хорошо известно. Поле монохроматической волны на каустике можно исследовать,

применяя Фурье-преобразование (см., например, [12]). В результате связь между падающей и отраженной от каустики волнами может быть записана с помощью преобразования Гильберта

$$\mathcal{P}_{отр}(t, z_k) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} \mathcal{P}_{пад}(t', z_k) \operatorname{ctg} \frac{\omega(t-t')}{2} dt'. \quad (7)$$

Отметим, что в (7) вместо z_k должна входить координата $z = z(\rho')$, где ρ' лежит в области применимости геометрической акустики (т.е. отстоит от ρ_k на несколько длин волн), однако из-за конечности приведенного пути различием между z_k и z' можно пренебречь. В такой форме соотношение (7) описывает преобразование произвольной периодической волны с периодом $2\pi/\omega$. Переходя в (7) к интегрированию вдоль характеристики $\xi = \omega t - \omega t' + z_k \mathcal{P}(t, z_k)/\rho_m R_*$, можно представить это выражение в виде интеграла от явной функции (даже при наличии скачка). В частности, для рассматриваемой волны, генерируемой гармоническим источником:

$$\mathcal{P}_{отр}(t, z_k) = \frac{\rho_m}{4\pi} \left\{ \int_0^{\pi - \xi_*} \Phi(\xi', \xi) d\xi' + \int_{\pi + \xi_*}^{2\pi} \Phi(\xi', \xi) d\xi' \right\}$$

$$\Phi(\xi', \xi) = \sin \xi' \left[1 + \frac{z_k}{\rho_*} \cos \xi' \right] \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \left[\xi - \xi' + \frac{z_k}{R_*} (\sin \xi - \sin \xi') \right] \quad (8)$$

$$\xi_k = \begin{cases} 0 & z_k \leq R_* \\ z_k \rho_s(z_k) / R_* \rho_m & z_k \geq R_* \end{cases}$$

На фиг.1 приведены результаты расчета трансформации простой и разрывной волн, выполненные с помощью ЭВМ по формуле (8) для некоторых значений параметра z_k/R_* .

Как и следовало ожидать, если источник расположен близко от каустики ($z_k \ll R_*$), форма падающей и отраженной волн близка к синусоидальной. При сильных искажениях падающей волны ($z_k \approx R_*$) в рефрагированной волне появляется заметный отрицательный выброс.

Если же падающая волна разрывна ($\xi_k > R_*$), то выброс становится (в этом приближении) неограниченным. Разаумеется, среднее возмущение давления по-прежнему остается равным нулю. Полученные результаты легко понять, если учесть, что преобразование Гильберта сводится к изменению фазы каждой спектральной компоненты на $-\pi/2$. Поскольку решение (1) представимо рядом по синусам (ряд Бесселя-Фубини), то отраженная волна представляет собой ряд по косинусам, сумма которого в точке $t = 2\pi/\omega$ может значительно превысить амплитуду падающей волны.

В случае, когда $\xi_k \gg R_*$ и падающая волна имеет пилообразный профиль с амплитудой \mathcal{P}_S , форма рефракгированной волны находится из (7) аналитически

$$\mathcal{P}_{отр}(t, \xi_k) = \mathcal{P}_S(\xi_k) \left\{ \ln 2 + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right| \right\}. \quad (9)$$

Как следует из (9), наличие разрыва в падающей волне приводит к логарифмической расходимости поля отраженной волны (можно показать, что этот результат справедлив при любом $\xi > R_*$).

Наличие областей с большим значением поля требует более детального обоснования применимости линейных методов в прикаустической области. Как уже отмечалось, нелинейные искажения в этой области могут быть малы уже в рамках более грубого геометроакустического приближения. Однако, строго говоря, необходимо потребовать также малости максимального значения поля (числа Маха) которое можно оценить из линейной теории как сумму амплитуд функции Эйри, описывающих решение для каждой спектральной компоненты волны [12]. Это приводит к ограничению величины начального числа Маха

$$M \ll N^{-1} (\xi_k / R_*), \quad (10)$$

где N — эффективное число гармоник в римановой волне, определяемое формулой:

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n \xi_k / R_*)}{n^{5/6} \xi_k / R_*} \quad (11)$$

Здесь J_n — функция Бесселя первого рода. Условие (10) заведомо является завышенным, поскольку оно не учиты-

вает того обстоятельства, что максимумы спектральных компонент несколько сдвинуты друг относительно друга.

Наличие скачка в прикаустической области ($z_k > R_*$) приводит к большему, чем в римановой волне, значению эффективного числа гармоник N . В этом случае ограничение амплитуды волны может быть связано только с вязкостью; в ударной волне число гармоник N по порядку величины дается числом Рейнольдса Re , и условие (10) принимает вид

$$M_s \ll \frac{1}{Re} \quad (12)$$

Учет вязкости в принципе изменяет вид формулы (7), что ограничит амплитуду отрицательного участка отраженной волны величиной порядка $\mathcal{P}_s Re$; однако форма волны всюду, за исключением резкого отрицательного пика, по-прежнему будет описываться выражением (7). Этот пик, имеющий характерную ширину $\Delta t \sim \exp(-2\pi \frac{M}{M_s})$, на уровне $M_s \ll M \ll 1$ быстро (на расстоянии порядка $\frac{M_s}{M} \exp(-\pi M/M_s)$) диссипирует, что, впрочем, практически не сказывается на общей энергии волны (энергия выброса $\Delta W \sim (M/M_s)^2 \exp(-2\pi M/M_s)$). Поэтому условие (12) является, в сущности, необязательным, поскольку затухание основной части не зависит от амплитуды выброса. В реальных случаях полученные результаты, по-видимому, справедливы практически всегда, если только $M_s \ll 1$.

4. Эволюция волны после отражения от каустики снова описывается соотношениями (1)–(3), соответствующими приближению нелинейной геометрической акустики. При этом z заменяется на $z' = z - z_k$, а функция F в (1) определяется формой волны, отраженной от каустики. Форма положительных и отрицательных участков этой функции теперь существенно различна (фиг. 1), так что разрыв образуется на уровне $\mathcal{P}_* \sim 0$ и в дальнейшем развивается несимметрично относительно этого уровня. Это существенно усложняет задачу, поскольку формулы (5), (6) уже непригодны, и в общем случае решение уравнений (2) и (3) требует применения ЭВМ.

Предположим сначала, что на каустику приходит непрерывная волна ($z_k < R_*$) и определим расстояние z'_s от каустики, на котором образуется разрыв в отра-

раженной волне. Результат расчета показан на фиг. 2, где дается зависимость ξ'_S от параметра ξ_K/R_* . Для сравнения приведена та же зависимость без учета дифракционного преобразования волны на клаустике (соответствующая отражению от твердой стенки, находящейся вблизи клаустики в области применимости геометроакустического приближения). Очевидно, дифракция несколько задерживает образование разрыва (увеличивается ξ'_S) ввиду расфазировки спектральных компонент волны.

После образования разрыва на малых расстояниях скачок развивается симметрично относительно уровня \mathcal{P}_* , нарастая согласно (4), пропорционально $\sqrt{\xi - \xi'_S}$. Величина $d^3 \psi(\mathcal{P}_*)/d\mathcal{P}^3$, входящая в (4), в падающей волне равна единице, а в отраженной с учетом дифракции на клаустике, уменьшается. Поэтому благодаря дифракции, скачок после клаустики растет быстрее и этот эффект тем сильнее выражен, чем более искажена падающая волна вблизи клаустики.

На больших расстояниях от клаустики волна снова приобретает пилообразную форму, однако прохождение клаустики сказывается на ее амплитуде; асимптотическое выражение для амплитуды скачка после клаустики имеет вид

$$\mathcal{P}_S \approx \mathcal{P}_1 \approx -\mathcal{P}_2 = \rho_m q(\xi_K/R_*) \pi R_*/\xi. \quad (13)$$

Здесь $q = \omega \psi(\xi_K, \mathcal{P} = 0)$. Эта функция монотонно изменяется от $q = 1$ при $\xi_K = 0$ (гармоническая волна на клаустике) до $q \approx 0,55$ при $\xi_K \rightarrow \infty$ (пилообразная волна на клаустике), причем появлению разрыва на клаустике ($\xi_K = R_*$) соответствует $q \approx 0,86$. Таким образом, клаустика может почти вдвое уменьшить асимптотическое значение амплитуды волны (хотя образование разрыва, как указывалось, несколько задерживается). Дополнительное затухание появляется из-за роста амплитуды на отрицательном полупериоде волны.

На фиг. 3 показано изменение амплитуды волны вдоль луча при различных начальных ее значениях. В случае малой нелинейности, когда в падающей волне скачок не образуется ($\xi_K < R_*$), амплитуда волны меняется так

же, как и в линейной теории. Если ударная волна образовалась до каустики, то ее амплитуда меньше амплитуды линейной волны. При достаточно больших искажениях падающей волны ($R_* \gg R_*$) ее амплитуда сначала может стать даже меньше начальной, несмотря на уменьшение

Δ . На графике показано также изменение амплитуды положительного и отрицательного участка рефрагированной волны. На больших расстояниях, когда волна становится пилообразной, эти кривые сливаются в одну.

5. В качестве примера приведем результаты расчета координаты образования разрыва при наклонном падении плоскопараллельного пучка лучей на плоский слой с линейным законом изменения скорости звука $c(x) = c_0(1 + \frac{x}{H})$, $\rho = \text{const}$. Как известно, форма луча в такой среде соответствует окружности с центром в точке $x = -H$.

Однако в данном случае удобно выразить все переменные через вертикальную координату x , которая связана с лучевой координатой l простым соотношением $dl = -dx/\Delta$, где $\Delta = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi c^2(x)/c_0^2}$, φ - угол

падения луча на слой. На фиг. 4 приведены зависимости координаты образования разрыва x_s от угла падения φ для некоторых характерных соотношений между длиной нелинейности R_* и длиной неоднородности H ; функция $\xi(x)$ находилась численным интегрированием. Эта зависимость определяется "конкуренцией" эффектов, связанных с ростом c ;

уменьшением нелинейных искажений и уменьшением Δ , увеличивающих их. При достаточно больших амплитудах ($R_* < 0,65 H$) координата x_s расположена вблизи начала слоя ($x = 0$); исключение составляет узкая область углов, соответствующих скользящему падению, где нелинейность не успевает накапливаться из-за близости точки поворота к плоскости

$x = 0$. При меньших амплитудах, когда $0,65 H < R_* < 1,1 H$, разрыв не образуется также при падении под малыми углами, что связано с более сильным влиянием роста скорости звука в этих направлениях. Дальнейшее уменьшение амплитуды ($R_* > 1,1 H$) приводит к тому, что скачок в волне, проходящей на каустике, не образуется ни при каком φ .

В рефрагированной волне координата образования разрыва определяется, как указывалось, формой

падающей волны. Если на каустику приходит ударная волна, рефрагированная волна также является ударной. Если же на каустику приходит непрерывная волна, отраженная волна также гладкая, на некотором расстоянии от каустики в ней образуется разрыв. Если при этом амплитуда достаточно мала ($R_* > 1,7H$), то разрыв в волне для любого φ может образоваться лишь при $x < 0$.

6. Отметим в заключение, что рассматриваемые здесь особенности (в частности, дополнительное нелинейное затухание, связанное с прохождением волны через каустику) могут проявляться для различных случаев: распространение нелинейных акустических волн в атмосфере и океане, включая сейсмические и взрывные волны (для последних наличие нелинейного затухания вблизи каустики отмечалось в [13]). Представляется интересным также применение данной методики для расчета многократных отражений интенсивной волны от каустики, как это имеет место в звуковых каналах. Приведенный выше анализ позволяет как судить о качественных особенностях подобного процесса, так и дать простые алгоритмы для количественных расчетов; если последние требуют численных методов, то к вычислению лучей необходимо добавить вычисление двух интегралов $\xi(\rho)$ и $\Phi_{отр}(\varphi_{паг})$.

Авторы благодарны Кузнецовой М.Г. за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. В. Keller, J. Appl. Phys., 25, 8, 938 (1954).
2. К. Е. Губкин, ПММ, 22, 4, 561, (1958).
3. А. А. Гриб, О. С. Рыжков, С. А. Христианович, ПНТФ, 1, 63, (1960).
4. Л. А. Островский, ПММ, 27, 5, 924 (1963).
5. М. А. Цикулин, ПМТФ, 2, 132 (1960).
6. Д. Ю. Поляновский, ПММ, 24, 5, 912 (1960).
7. О. С. Рыжов, ПМТФ, 2, 15 (1961).
8. Н. Н. Романова, Изв. АН СССР. Уиз. атм. и океана, 6, 134 (1970).
9. С. А. Каплан, Л. А. Островский, Н. С. Петрухин, В. Е. Фридман, Астрон. ж., 49, 6, 1267 (1972).
10. Л. А. Островский, Н. Р. Рубаха, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 15, 1293 (1972).
11. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, 11, 1, 68 (1975).
12. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, М., Наука, 1973.
13. D. A. Sachs, A. Silbiger, JASA, 49, 3, 821 (1971).
14. G. B. Whitham, J. Fluid Mech., 2, 2, 145 (1957).

ПОДПИСИ К ФИГУРАМ

- Фиг. 1. Форма падающей (штриховые линии) и отраженной (сплошные линии) от каустики волн. 1. $z_k/R_* = 0,1$; 2. $z_k/R_* = 0,99$; 3. $z_k/R_* = \infty$
- Фиг. 2. Зависимость координаты образования разрыва в волне, отраженной от каустики (сплошная линия) и от твердой стенки (штриховая линия).
- Фиг. 3. Качественная картина изменения амплитуды давления вдоль луча в падающей на каустическую (1) $z_k/R_* = 0$; 2) $z_k > R_*$ 3) $z_k > R_*$ и отраженной волнах (4) $|P_{max}|/P_m$ 5) $|P_{min}|/P_m$.
- Фиг. 4. Зависимость координаты образования разрыва от угла падения в падающей (сплошные линии) и отраженной от каустики (штриховые линии) волнах. 1) $R_*/H = 0,25$; 2) $R_*/H = 0,5$; 3) $R_*/H = 1$; 4) $R_*/H = 1,5$; 5) $R_*/H = 2$. Штрих-пунктирной линией показано положение каустики для различных углов.

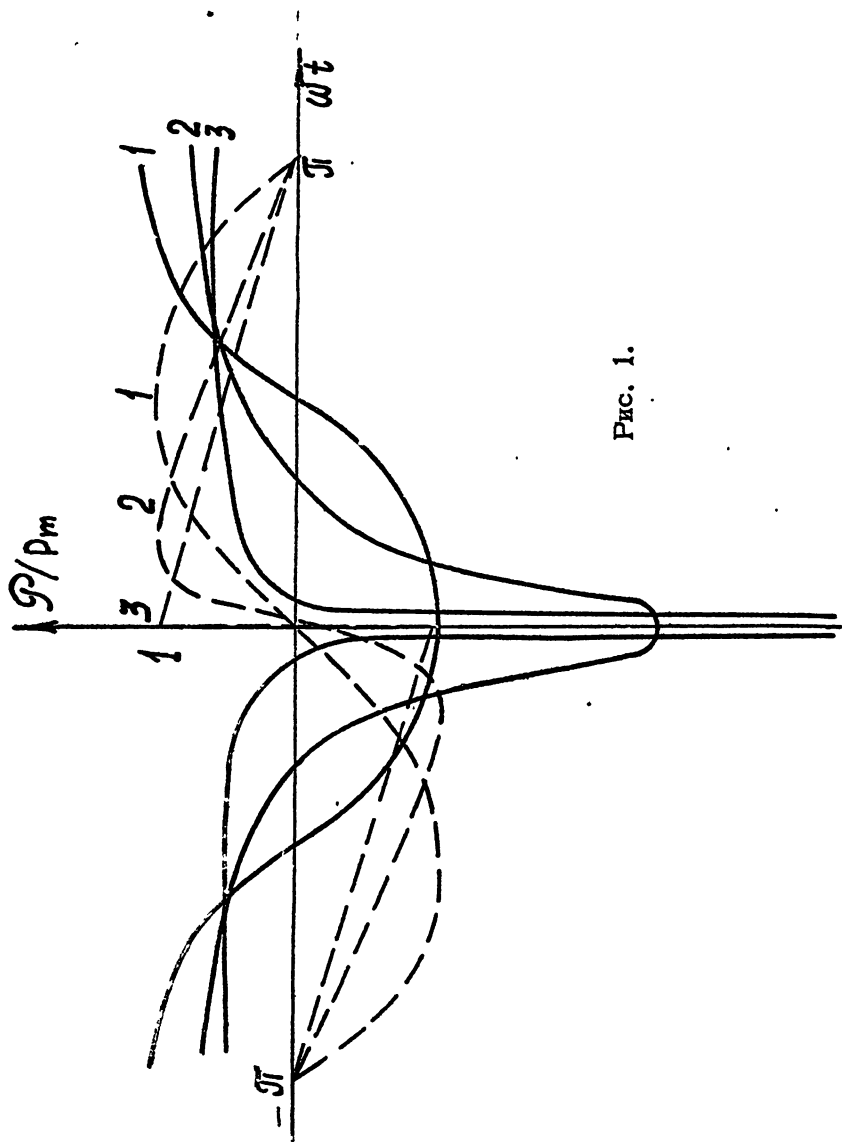


Рис. 1.

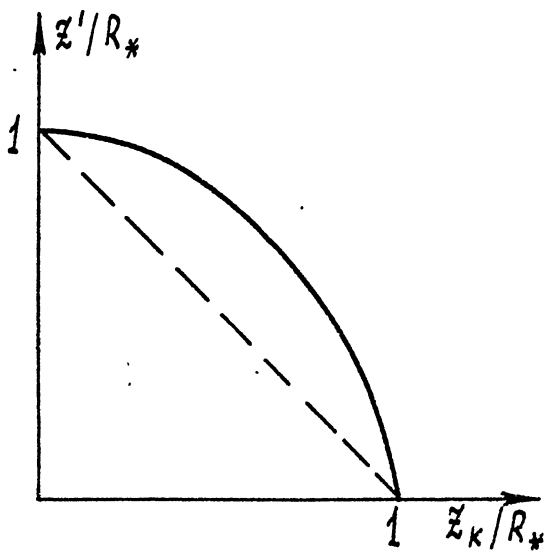


Рис. 2.

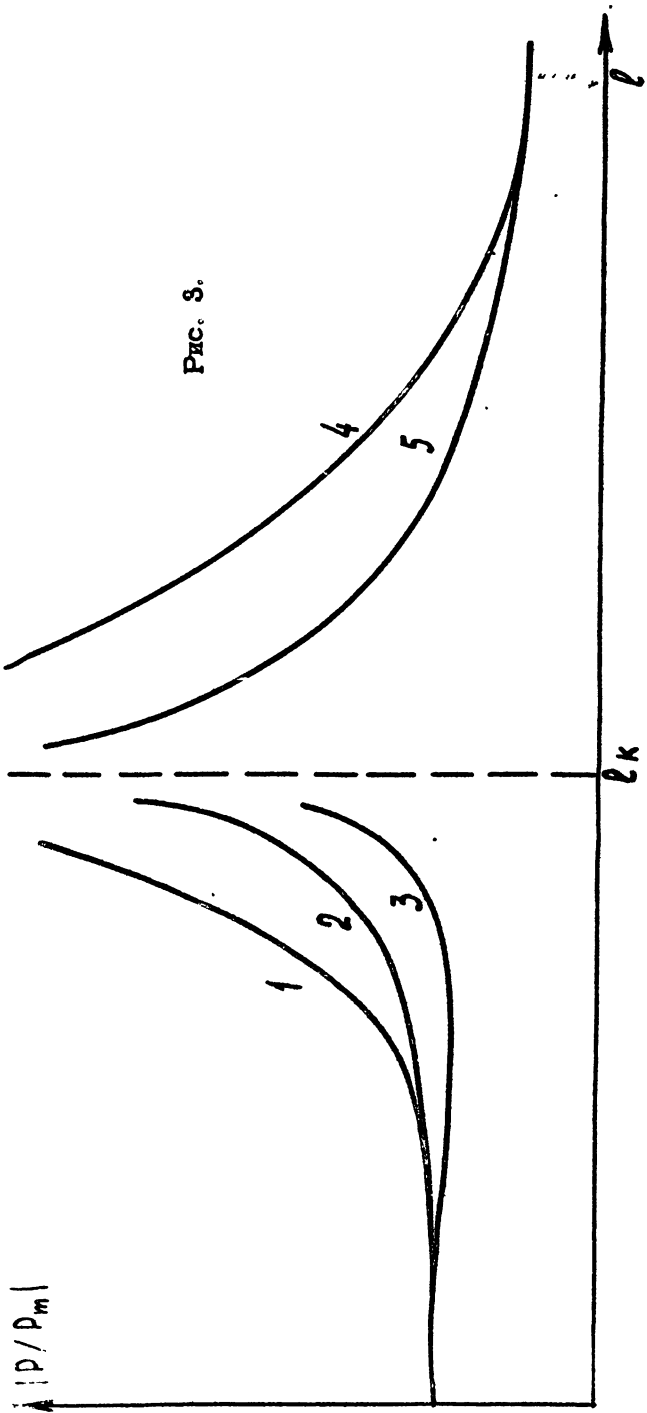


Рис. 3.

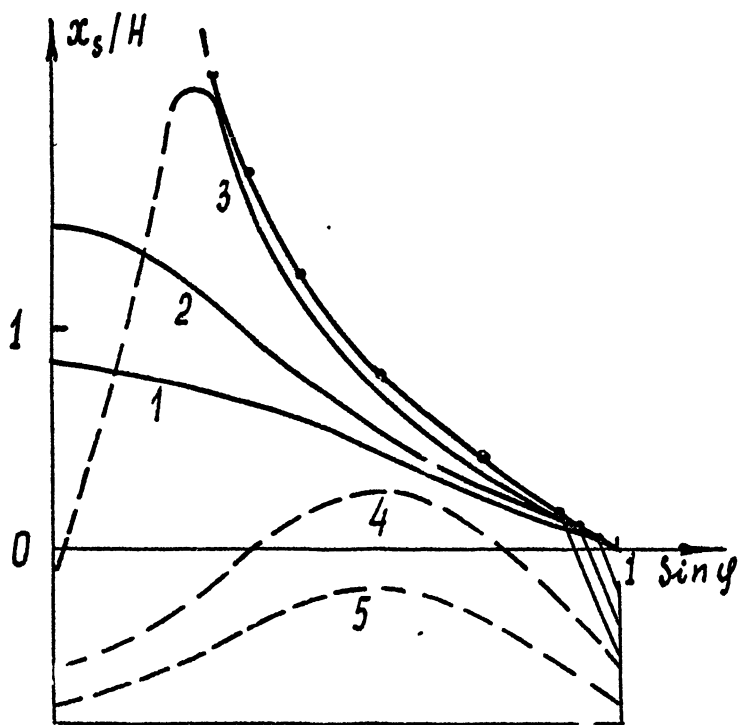


Рис. 4.