

Министерство высшего и среднего специального образования  
РСФСР  
Ордена Трудового Красного Знамени  
Научно-исследовательский радиопизический институт (НИРФИ)

Препринт № 80

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ  
В РАЙОНЕ ФОКУСА ПАРАБОЛОИДА  
ПРИ РАСПОЛОЖЕНИИ ИСТОЧНИКА В ЗОНЕ  
ФРЕНЕЛЯ

Н.А.Дугин,  
Д.А.Дмитречко

Горький - 1975 г.

## А н н о т а ц и я

Рассчитано распределение векторов поля вблизи фокуса параболоида с  $f/D = 0,4$  для различных  $D/\lambda$  при расположении источника излучения на расстоянии  $R_n = 2D^2/\lambda N$  ( $N \leq 300$ ) от рефлектора. Показано изменение распределения интенсивности и фазы компонент поля как в плоскости фокусировки, так и вдоль оси параболоида; вычислено распределение энергии в плоскости фокусировки для различных  $N$ .

Распределение поля в районе фокуса приемной зеркальной антенны представляет не только теоретический, но и практический интерес в связи с возможностью, например, повышения коэффициента использования зеркала (КИП) путем выбора оптимального варианта облучения. В работах, посвященных исследованию поля вблизи фокуса линз или рефлекторов (например, [1] — скалярное рассмотрение, [2,3] — векторное), рассматривалось падение на фокусирующую систему плоской волны. В то же время в случае фокусировки антенны на конечное расстояние приходится иметь дело с источником, расположенным вблизи рефлектора, что требует рассмотрения сферической волны и соответственно распределения поля в районе точки, смещенной из фокуса вдоль оси антенны.

В настоящей работе проведен расчет распределения векторов поля около фокуса параболеоида вращения при различном расположении источника излучения относительно рефлектора от бесконечности (плоская волна) до конечных расстояний порядка  $2D^2/\lambda N$ , где  $D$  — диаметр раскрыва,  $\lambda$  — длина волны,  $N$  — число Френеля (здесь  $N \approx 300$ ). Исследовано изменение распределения интенсивности и фазы поля вдоль оси рефлектора, определены величина смещения максимума из фокуса и спад в точке фокусировки, изменение распределения интенсивности и фазы основной и кросспolarизационной составляющих поля и изменения распределения энергии в плоскости фокусировки. Полученные результаты позволяют определить максимально возможный КИП антенны при различных расстояниях до источника излучения и при необходимости подобрать оптимальный вариант облучения; они также могут быть полезными для оценки облучателей, применяемых в конкретных антенных системах.

# 1. Исходные соотношения.

Рассматриваем поле вблизи фокуса идеального параболоида с  $f/D = 0,1$ , облучаемого электрическим диполем  $\vec{p} = -i (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  - орты системы координат, рис. 1), расположенного на расстоянии  $R_0 = 2D^2/\lambda N$  от рефлектора; в качестве переменных параметров взяты  $N$  и отношение  $D/\lambda$ . Поле излучения диполя на поверхности параболоида, задаваемого уравнением  $\rho^2 = 4fz$ , запишется как

$$\vec{H} = \frac{E}{Z} \left[ \frac{\vec{R}}{R} \vec{p} \right]; \quad \vec{E} = Z \left[ \vec{H} \frac{\vec{R}}{R} \right], \quad (1)$$

где  $Z$  - импеданс свободного пространства,  $R$  - расстояние от источника до поверхности рефлектора.

Исходя из общих интегралов дифракции электромагнитных волн для отраженного от поверхности рефлектора поля в точке наблюдения  $P$ , можно записать (пренебрегая полем на задней стороне рефлектора и опуская члены, обусловленные магнитными токами и зарядами):

$$E_P = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ -j\omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \frac{e^{-j\vec{k}\vec{z}}}{z} + (\vec{n} \vec{E}) \nabla \frac{e^{-j\vec{k}\vec{z}}}{z} \right\} ds \quad (2a)$$

$$- \frac{1}{2\pi j\omega\epsilon} \int_L (\vec{e} \vec{H}) \nabla \frac{e^{-j\vec{k}\vec{z}}}{z} dl \quad (2b)$$

$$\vec{H}_P = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[ [\vec{n} \vec{H}] \nabla \frac{e^{-j\vec{k}\vec{z}}}{z} \right] ds$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\epsilon$  и  $\mu$  - диэлектрическая и магнитная проницаемость свободного пространства,  $S$  - передняя поверхность параболоида,  $L$  - граница параболоида. Линейный интеграл в (2a) обусловлен граничными эффектами, связанными с переходом при интегрировании к ограниченной поверхности  $S$ .

По известному соотношению.

$$\Delta \frac{e^{-j\vec{k}\vec{z}}}{z} = jk \left( 1 - \frac{j}{kz} \right) \frac{e^{-j\vec{k}\vec{z}}}{z} \frac{\vec{z}}{z} \quad (3)$$

вторым членом в скобках в дальнейшем пренебрегаем ( $\frac{j}{kz} \ll 1$ ). Используя обозначения, применяемые на рис. 1, для компонент векторов в уравнениях (1) и (2) имеем

$$\vec{E} = \vec{E}(-E(\sin^2 \alpha \sin^2 \psi' + \cos^2 \alpha), \frac{E}{2} \sin 2\psi' \sin^2 \alpha, -\frac{E}{2} \sin 2\alpha \cos \psi') \quad (4a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(0, \frac{E}{z} \cos \alpha, \frac{E}{z} \sin \alpha \sin \psi') \quad (4b)$$

$$\vec{R} = \vec{R}(R \sin \alpha \cos \psi', R \sin \alpha \sin \psi', -R \cos \alpha) \quad (4b)$$

$$\vec{n} = \vec{n}(-\sin \frac{\theta}{2} \cos \psi', -\sin \frac{\theta}{2} \sin \psi', \cos \frac{\theta}{2}) \quad (4r)$$

$$\vec{e} = \vec{e}(-\sin \psi', -\cos \psi', 0) \quad (4d)$$

$$\vec{z} = \vec{z}(-\rho \cos \psi' + \rho' \cos \psi, -\rho' \sin \psi' + \rho \sin \psi, \frac{\Delta f + z}{f(1-u^2 + \Delta f + z)}) \quad (4e)$$

где  $\Delta f$  - величина смещения максимума концентрации энергии вдоль оси  $z$  из фокуса параболоида,  $u = \rho'/2f$ . Фаза подынтегральной функции  $\chi$  в уравнении (2) вычисляется обычным образом [1] с учетом фазы поля в точке отражения и разложением в ряд вектора  $\vec{z}$  с точностью до членов первого порядка относительно  $\rho$  и  $z$ .

$$\begin{aligned} \chi = & k f \left( \frac{R_n/f - u^2}{R_n/f - 1} \sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2} - \sqrt{(R_n/f - u_0^2)^2 + 4u_0^2} \right) - \\ & - \frac{(R_n/f - 1)}{\sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}} \frac{2k\rho u}{1+u^2} \cos(\psi - \psi') + \\ & + k z \left( \frac{1-u^2}{1+u^2} \frac{(R_n/f - 1)}{\sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}} + \frac{1+u^2}{\sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}} \right) \quad (5) \end{aligned}$$

В выражении для амплитуды подынтегральной функции пренебрегаем членами порядка  $\rho$ ,  $z$  и более высоких порядков, чем  $(f/R_n)$ . Тогда, подставив выражения (3,4,5) в уравнение (2) и проведя все необходимые преобразования, получим для компонент поля в точке наблюдения  $P$ :

$$E_{Px} = E_0 [I_0^E + \cos 2\psi I_2^E - j \frac{\lambda}{\pi D} (i_0 - \cos 2\psi i_2)] \quad (6a)$$

$$E_{p_y} = E_0 \left[ \sin 2\varphi I_2^E + j \frac{\lambda}{\pi D} \sin 2\varphi i_2 \right] \quad (66)$$

$$F_{p_z} = j E_0 \left[ 2 \cos \varphi I_1^E - j \frac{\lambda}{\pi D} \cos \varphi i_1 A_1^i \right] \quad (67)$$

$$H_{p_x} = \frac{E_0}{z} \sin 2\varphi I_2^H \quad (68)$$

$$H_{p_y} = \frac{E_0}{z} \left[ I_0^H - \cos 2\varphi I_2^H \right]$$

$$H_{p_z} = \frac{E_0}{z} j 2 \sin \varphi I_1^H \quad (69)$$

$$I_m^{E,H} = \frac{2}{u_0^2} \int_0^{u_0} A_m^{E,H} B^{E,H} \frac{u^{m+1}}{(1+u^2)^2} J_m \left( \frac{2\kappa \rho u (R_n/f-1)}{(1+u^2)\sqrt{(R_n/f-u^2)^2+4u^2}} \right) e^{-jz} du$$

$$B^E = \frac{(R_n/f-1)(R_n/f-u^2)}{(R_n/f-u^2)^2 + 4u^2}$$

$$B^H = \frac{(R_n/f-1)^2(R_n/f-u^2)}{[(R_n/f-u^2)^2 + 4u^2]^{3/2}}$$

$$A_0^E = 1 + \frac{4R_n/f \cdot u^2}{(R_n/f-u^2)^2 + 4u^2}$$

$$A_0^H = 1 + \frac{2u^4 + u^2 + 1}{R_n/f - u^2}$$

$$A_1^E = 1 + \frac{(3u^2-1)R_n/f}{(R_n/f-u^2)^2 + 4u^2}$$

$$A_1^H = 1 + \frac{u^2}{R_n/f - u^2}$$

$$A_2^E = 1 - \frac{2(1-u^2)R_n/f}{(R_n/f-u^2)^2 + 4u^2}$$

$$A_2^H = 1 - \frac{1-u^2}{R_n/f - u^2}$$

$$A_1^i = \frac{1-u_0^2}{u_0} + \frac{(1+u_0^2)^2}{u_0(R_n/f-1)}$$

$$E_0 = j E \frac{\pi D}{4 \lambda f}$$

$$i_m = \frac{2u_0}{(1-u_0^2)^2} \frac{(R_n/f-u_0^2)(R_n/f-1)^2}{[(R_n/f-u_0^2)^2 + 4u_0^2]^{3/2}} J_m \left( \frac{2\kappa \rho u_0 (R_n/f-1)}{(1+u_0^2)\sqrt{(R_n/f-u_0^2)^2 + 4u_0^2}} \right) e^{-jz}$$

Привести выражения (8) к аналитическому виду из-за их громоздкости вероятно невозможно, поэтому расчет проводился на ЭВМ (БЭСМ-4). При вычислении поля  $E_{рх}$  на оси и в фокальной плоскости не учитывались члены, обусловленные граничными эффектами ( $\lambda/\pi D \ll 1$ ), поле  $E_{рy}$  вычислялось по полной формуле (8б).

## 2. Поле на оси рефлектора.

Поскольку приближение источника излучения к рефлектору вызывает смещение распределения поля из точки фокуса, то главной задачей при рассмотрении поля на оси явилось определение величины смещения максимума  $\Delta f$  для различных  $N$ . График зависимости  $\Delta f(N)$  был получен из выражения (8а) при  $\rho = 0$  и изменении в широких пределах координаты  $z$ ; при этом кроме  $z = z_m$  - точки на оси, где поле максимально, определялись также величины максимумов (рис. 3 - зависимость спада интенсивности на оси от  $N$ ) и непосредственно распределение поля вдоль оси (рис. 4а,б). Для  $D/\lambda = 100$  при  $|z| > 25$  (рис. 4а) и  $|z| > 17$  (рис. 4б) ошибка расчета превышает по амплитуде 10% и по фазе  $\pi/8$  [2]; однако распределение поля приведено в больших пределах  $z$  для прослеживания динамики изменения его формы. Легко видеть, что с увеличением  $N$ , кроме смещения максимума вдоль оси, происходит искажение распределения поля - падает мощность в центре и начинают расти "боковые" максимумы; один из них в определенный момент  $N = N_c$  превосходит центральный, при этом полностью изменяется характер распределения и происходит скачок величины смещения, максимум перемещается в точку, близкую к точке смещения, определяемую по формуле [4]

$$\Delta f = \frac{f^2}{R_n - f} \left( 1 + \frac{D^2}{16f^2} \right)$$

(на рис. 2 кривая, рассчитанная по этой формуле, приведена только для  $D/\lambda = 500$ ). Таких скачков может быть несколько. Изменение фазы поля вдоль оси показано на рис. 5; в районе главного максимума фаза меняется практически линейно и угол наклона от  $N$  зависит слабо, наибольшие искажения распределения фазы происходят в областях первых минимумов.

Представляет интерес также изменение фазы луча, приходящего в точку фокусировки, в зависимости от положения точки отражения на поверхности параболоида, или фазовая ошибка в раскрыве антенны, вызванная неточностью фокусировки. Исходя из рис. 1 и полагая фазу луча из вершины параболоида равной нулю, запишем для точки поверхности с координатами  $(\rho', z')$  следующее уравнение:

$$\Phi = \sqrt{\left(R_n - \frac{\rho'^2}{4f}\right)^2 + \rho'^2} + \sqrt{\left(f + \Delta f - \frac{\rho'^2}{4f}\right)^2 + \rho'^2} - R_n - f - \Delta f, \quad (7)$$

где  $\Delta f$  определяется из графика рис. 2. Данные расчета для  $D/\lambda = 100, 1000$  приведены на рис. 6а,б.

### 3. Поле в плоскости фокусировки.

Распределение поля в фокальной плоскости представляет наибольший интерес, поскольку оно связано с диаграммой направленности антенн. Изменение распределения поля определит, в основном, характер изменения параметров антенны, хотя для каждого конкретного вида облучения необходимы соответствующие поправки [4]. Кроме того, вычислив поток энергии через заданную площадку в плоскости фокусировки, равную, например, апертуре облучателя, можно определить максимально возможный КИП антенны, или величину мощности, рассеянной вне какой-нибудь заданной площадки.

Распределение поля в обеих главных плоскостях  $E_{\rho_x}(\rho, z_m, \theta)$  и  $E_{\rho_x}(\rho, z_m, \frac{\pi}{2})$  с ростом  $N$  меняется одинаково (рис. 7) — главный максимум искажается слабо, пока смещение вдоль оси не достигнет района скачка, боковые лепестки постепенно возрастают, нули сглаживаются. Полуширина центрального максимума  $\Delta \rho_{0,5}$  возрастает с увеличением  $N$  до  $N_c$  (рис. 8); однако, видно, что величина расширения сильно зависит от  $D/\lambda$  и при  $D/\lambda = 1000$   $\Delta \rho_{0,5}$  практически постоянна; кроме того, есть некоторое различие в изменении полуширины центральной зоны в разных плоскостях ( $\varphi = 0; \pi/2$ ), обусловленное изменением амплитудного распределения поля в плоскости  $\varphi = 0$  (это связано с выбором источника излучения). Фаза поля  $\psi$  (рис. 9) также претерпевает существенные искажения: резкие скачки на  $\pi$  от лепестка к ле-



пестку при увеличении  $N$  сглаживаются и после первого минимума наблюдается тенденция к линейному изменению фазы вдоль координаты  $\rho$ . С точки зрения измерения диаграмм направленности подобная картина делает крайне затруднительным измерение формы боковых лепестков по источнику в зоне Френеля, поскольку облучатель, имея размеры  $\sim \lambda$  еще больше сгладит минимумы; запись распределения интенсивности в плоскости фокусировки желательно проводить зондом очень малых размеров или же использовать методы визуальной индикации электромагнитного поля.

Представляет интерес резкое сужение главного максимума в момент  $N = N_c$  — ширина его становится в 1,18–1,22 раза меньше ширины центральной зоны при удаленном источнике. Объяснить это явление можно из рассмотрения зависимостей интенсивности поля в точке фокусировки от величины  $\rho'$  (рис. 10), позволяющих оценить вклад в суммарную интенсивность различных частей параболоида с радиусами от 0 до  $D/2$ . Видно, что при  $N = N_c$  не работает центральная часть рефлектора в нашем случае до значения  $\rho' \sim \rho'_{\max}/3$ , т.е. при расположении источника в  $N_c$  раз ближе условной границы дальней зоны, параболический рефлектор эквивалентен кольцевой антенне, а, следовательно, имеет главный дифракционный максимум более узкий, чем полная круговая апертура.

Изменение кроссполяризованной составляющей поля  $E_{\rho y}(\rho, z_m, \varphi/4)$  более сложно. Спадание максимума напряженности поля в первом лепестке имеет неравномерный характер (рис. 11), но в среднем соответствует закону спадания поля  $E_{\rho x}(0, z_m, 0)$ : отношение интенсивностей  $\frac{|E_{\rho y}(\rho_m, z_m, \varphi/4)|^2}{|E_{\rho x}(0, z_m, 0)|^2}$  колеблется около значения 23,5 дБ в пределах  $\pm 1,5$  дБ (рис. 12) вплоть до величин  $N$ , соответствующих скачку смещения. Положение первого максимума  $\rho_m(N)$  меняется незначительно. Распределение амплитуды и фазы поля  $E_{\rho y}$  с ростом  $N$  искажается так же, как и для поля  $E_{\rho x}$ : постепенно растут дальние максимумы, минимумы выражены менее четко, зависимость фазы от  $\rho$  после первого нуля стремится к линейному закону (рис. 13, 14).

Поток энергии через площадку определенной величины, перпендикулярную оси  $Z$  и расположенную в точке  $z_m$ , вычислялся через вектор Пойнтинга (из уравнений (8)) интег-

рируем по координатам  $\rho$  и  $\varphi$  нормировался к полной энергии  $\mathcal{P}_n$ , падающей на параболоид.

Графики распределения энергии в плоскости фокусировки для различных сокращений зоны приведены на рис. 15; из этих данных можно получить значения максимального КИП для облучателя с определенными размерами апертуры при различных  $N$ , т.е. зависимость спада энергии, сконцентрированной на кружке с радиусом  $\rho$ , от  $N$ . Для  $D/\lambda = 1000$  график  $\mathcal{P}/\mathcal{P}_n(N)$  через площадку, охватывающую главный лепесток в фокальной плоскости, практически совпадает с графиком функции  $\frac{|E_{px}(z_m, 0)|^2}{|E_{px}(0, 0)|^2}$  рис. 3; для  $\frac{D}{\lambda} = 100$  совпадение при  $N > 30$ .

#### 4. Выводы.

Получены формулы для расчета компонент поля в точке фокусировки параболоида с  $f/D = 0,4$  при расположении источника излучения на расстоянии  $R_n = 2D^2/\lambda N$ , которые в предельном случае  $N \rightarrow 0$  (плоская волна совпадает с известными соотношениями [3]).

Численные расчеты, проведенные на ЭВМ, показывают что:

1) смещение максимума концентрации энергии вдоль оси рефлектора  $\Delta f(N)$  имеет разрывный характер (при значительных сокращениях дальней зоны  $N \sim (0,3 + i)D/\lambda$ ; четко выражена асимметрия распределения энергии вдоль оси относительно точки максимума;

2) при увеличении  $N$  в плоскость фокусировки происходит перераспределение энергии между центральным и боковыми лепестками; уровень "боковиков" повышается, минимумы выражены менее четко, фаза поля от лепестка к лепестку стремится к плавному закону изменения; однако, при  $N = N_c$  происходит качественное изменение в распределении поля, обусловленное тем, что создавшееся фазовое распределение поля по раскрытию приводит к нейтрализации центральной части рефлектора (до трети диаметра при  $D/\lambda = 1000$ ): параболоид становится эквивалентен кольцевой антенне и создает "нормальное" распределение поля в плоскости фокусировки с четко выраженными минимумами и скачком фазы на  $\pi$  от лепестка к лепестку;

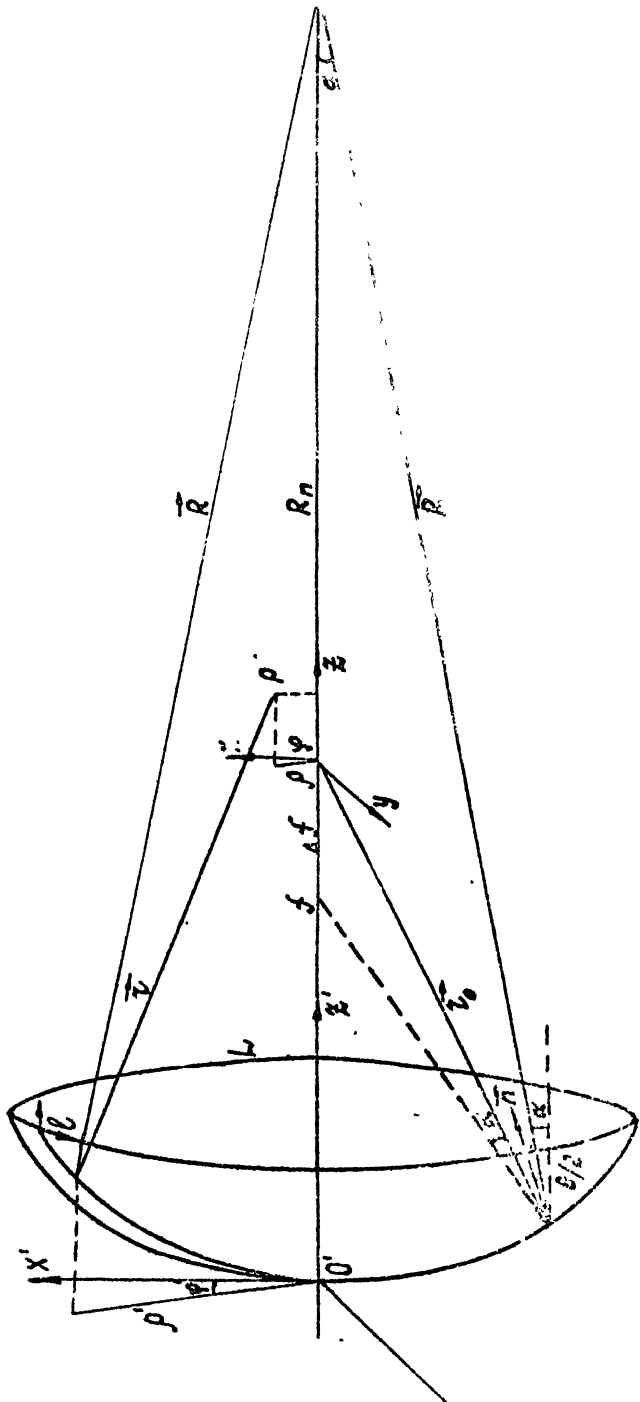
3) ширина центральной зоны на уровне половинной мощности  $\Delta \rho_{0,5}$  при изменении  $N$  непрерывно растет до значений  $N \sim N_c$ , соответствующих скачку функции смещения  $\Delta \varphi(N)$ ; скорость расширения зависит от  $D/\lambda$ . (при  $D/\lambda = 1000 \Delta \rho_{0,5}$  практически постоянна);

4) величина первого максимума кроссполяризованной составляющей поля с ростом  $N$  (до  $N \sim N_c$ ) колеблется в незначительных пределах около значения  $\sim 23$  дБ от уровня основной составляющей поля в точке фокусировки.

Авторы выражают благодарность Н.М.Цейтлин за ценные советы и постоянный интерес к работе и И.Ф.Забродиной за помощь в оформлении работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М.Борн, Э.Вольф, Основы оптики, Изд. Наука, 1970.
2. B.Richards, E.Wolf, Proc.Roy.Soc., Ser.A 1959, n.1274, v.253, 358.
3. H.Gniss, G.Ries, A.E.Ü., Band 23 1969, H.10, 481.
4. Д.А.Дмитренко, В.В.Аникина, Изв.ВУЗов Радиофизика, XVI, № 2, 262 (1973).



PUC 1

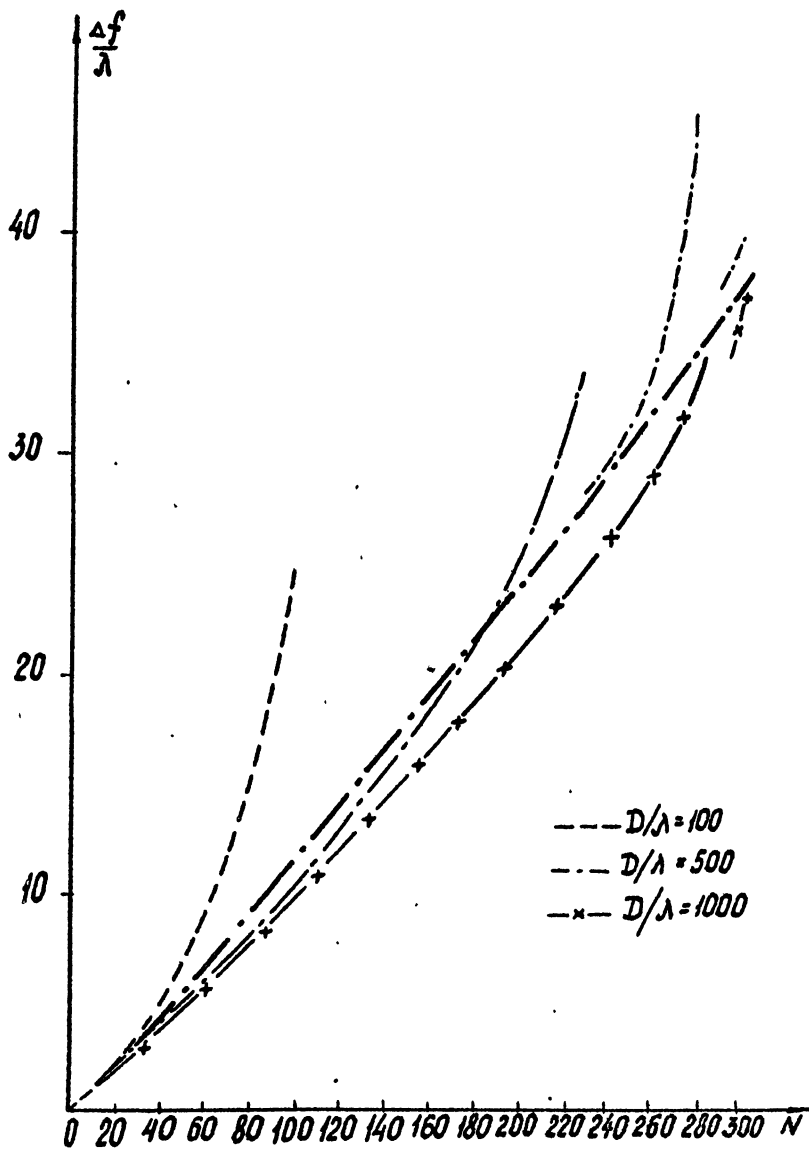


Рис. 2

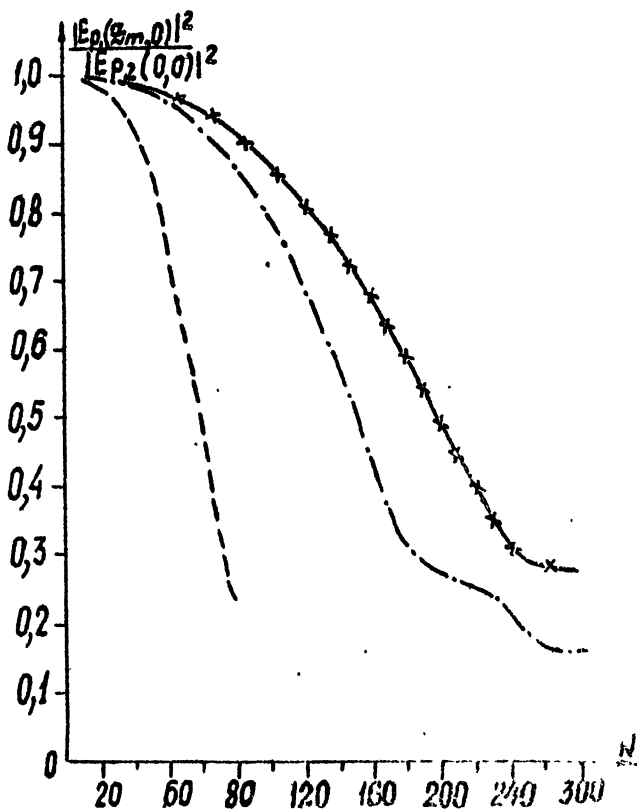


Рис. 3

$\xi, D = 1,4$   
 $D/\lambda = 1000$

$$\frac{|E_{px}(\lambda, 0)|^2}{|E_{px}(0, 0)|^2}$$

- N = 20
- N = 60
- x- N = 100
- o- N = 120
- v- N = 160
- <- N = 200
- | N = 220
- Δ- N = 240
- o- N = 260
- N = 280
- x- N = 300

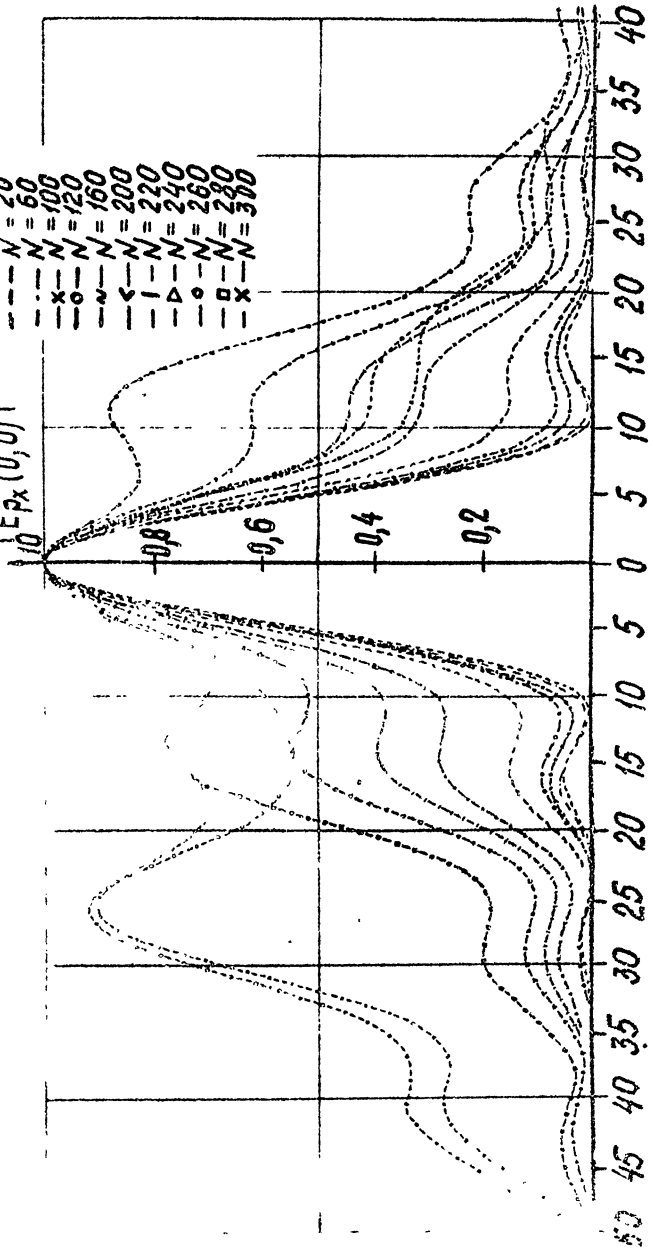
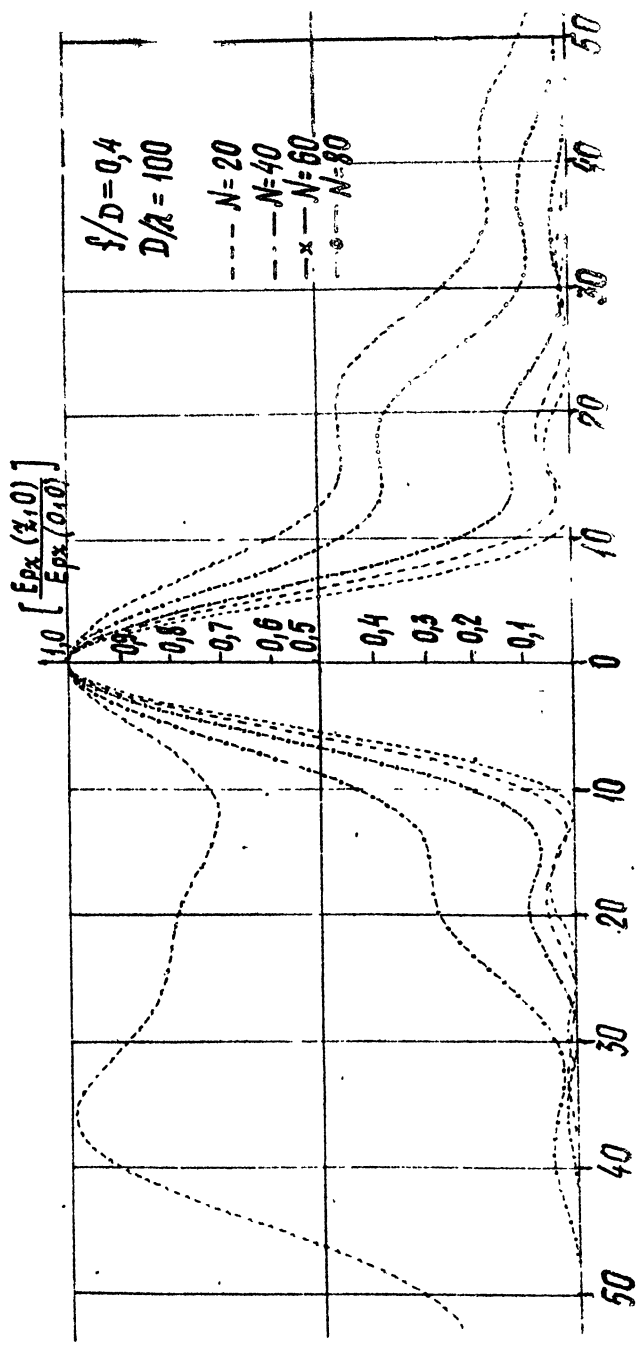


Рис. 4а





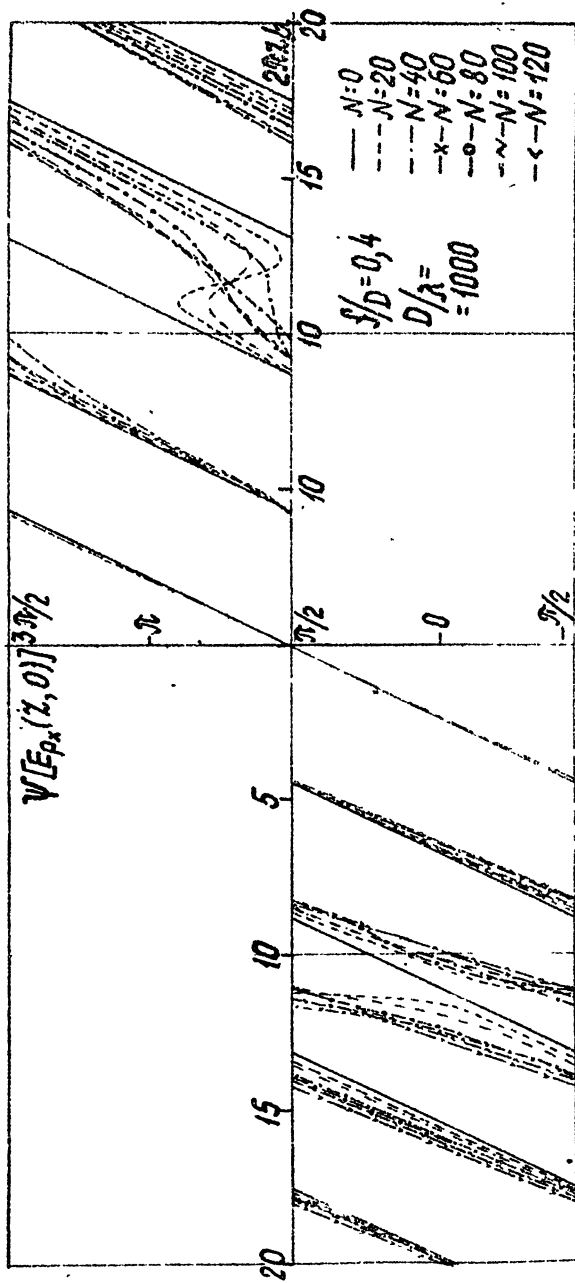


Рис. 5а

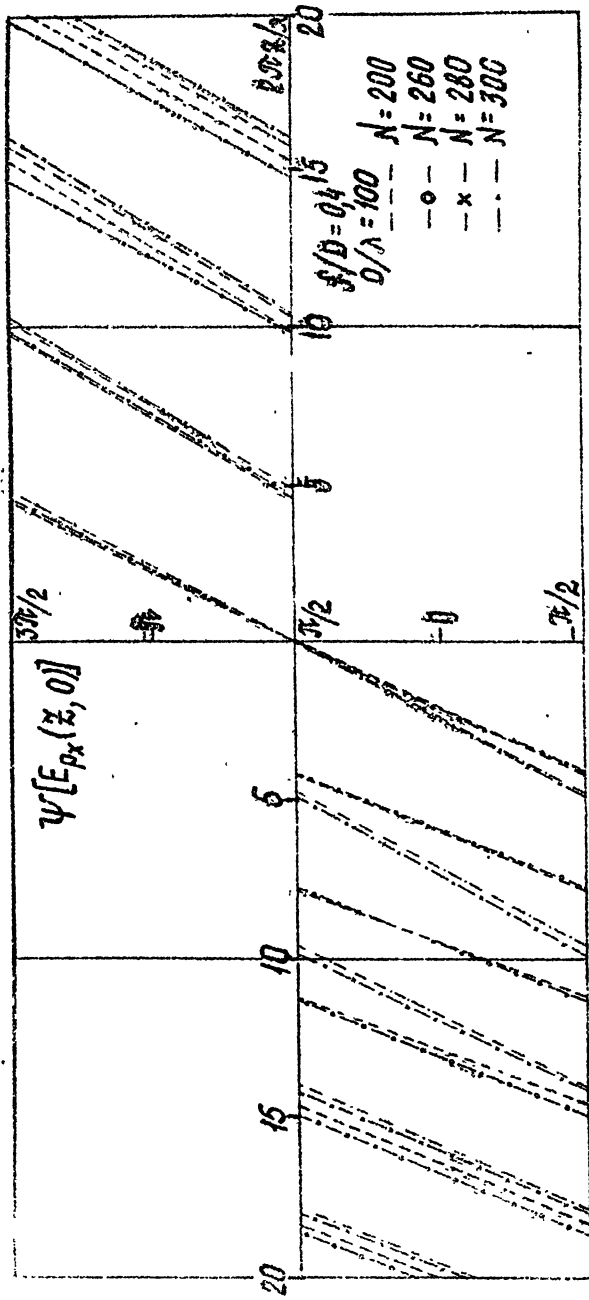


Рис. 5 д

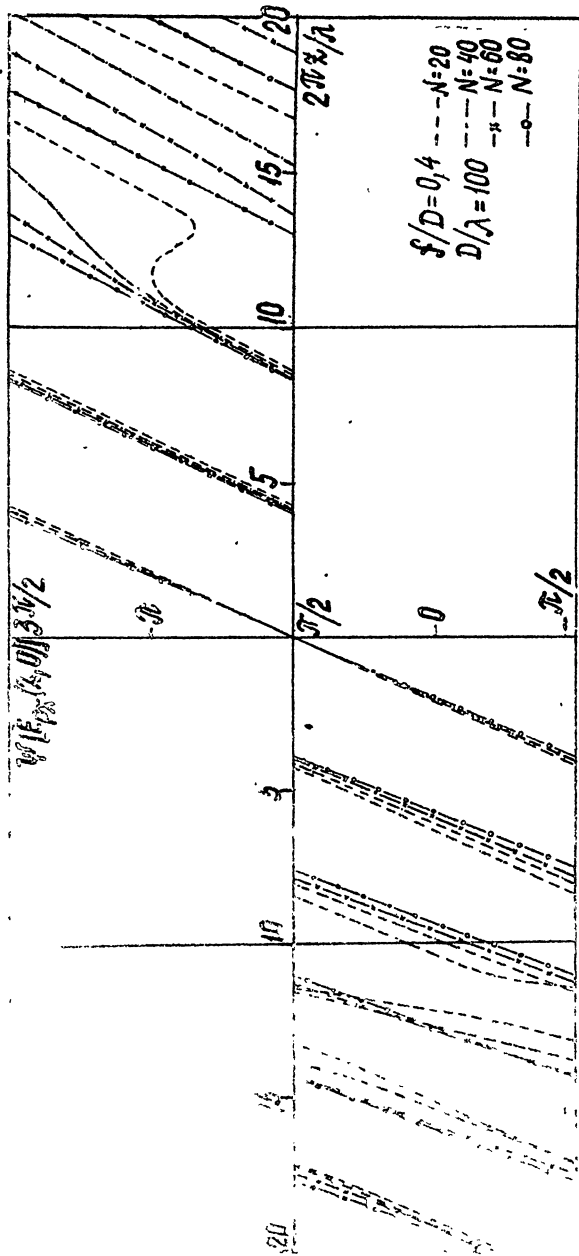
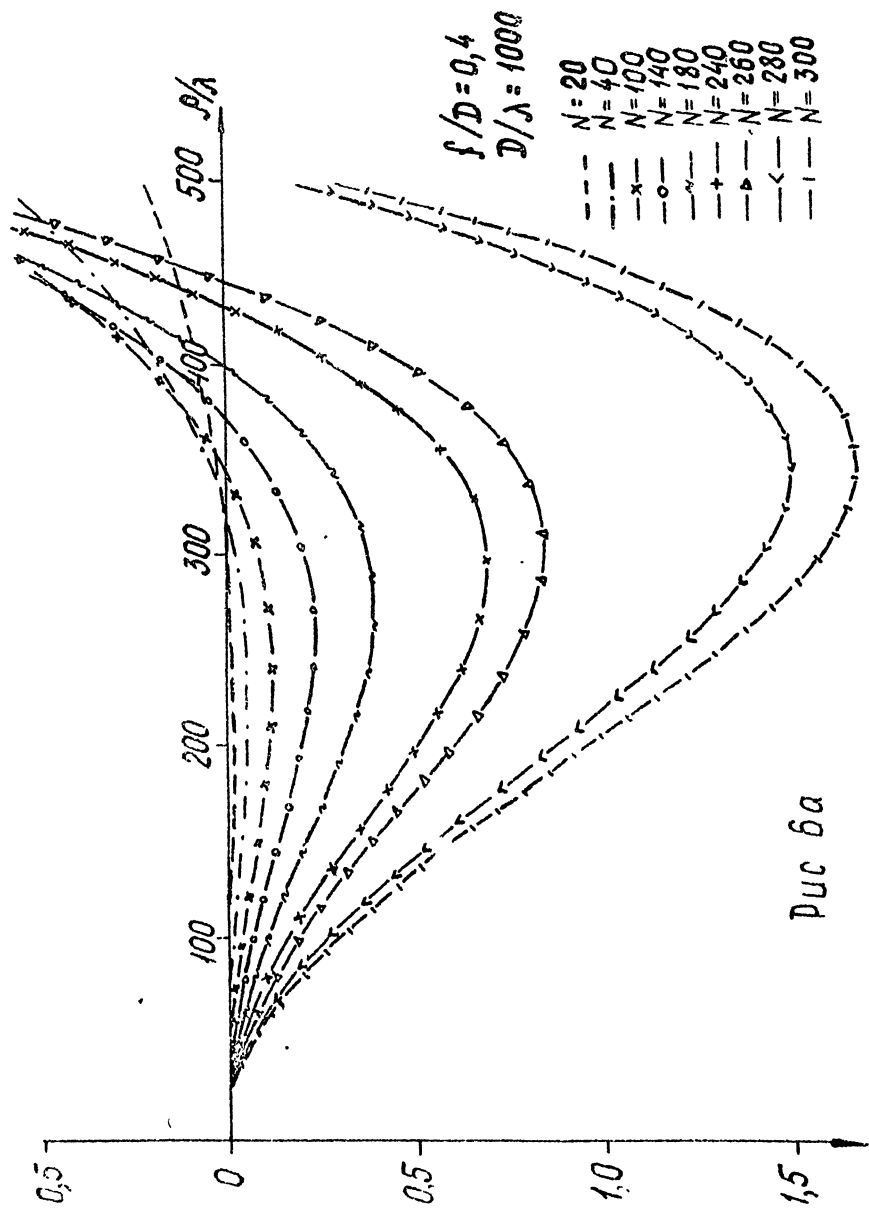


Рис. 56



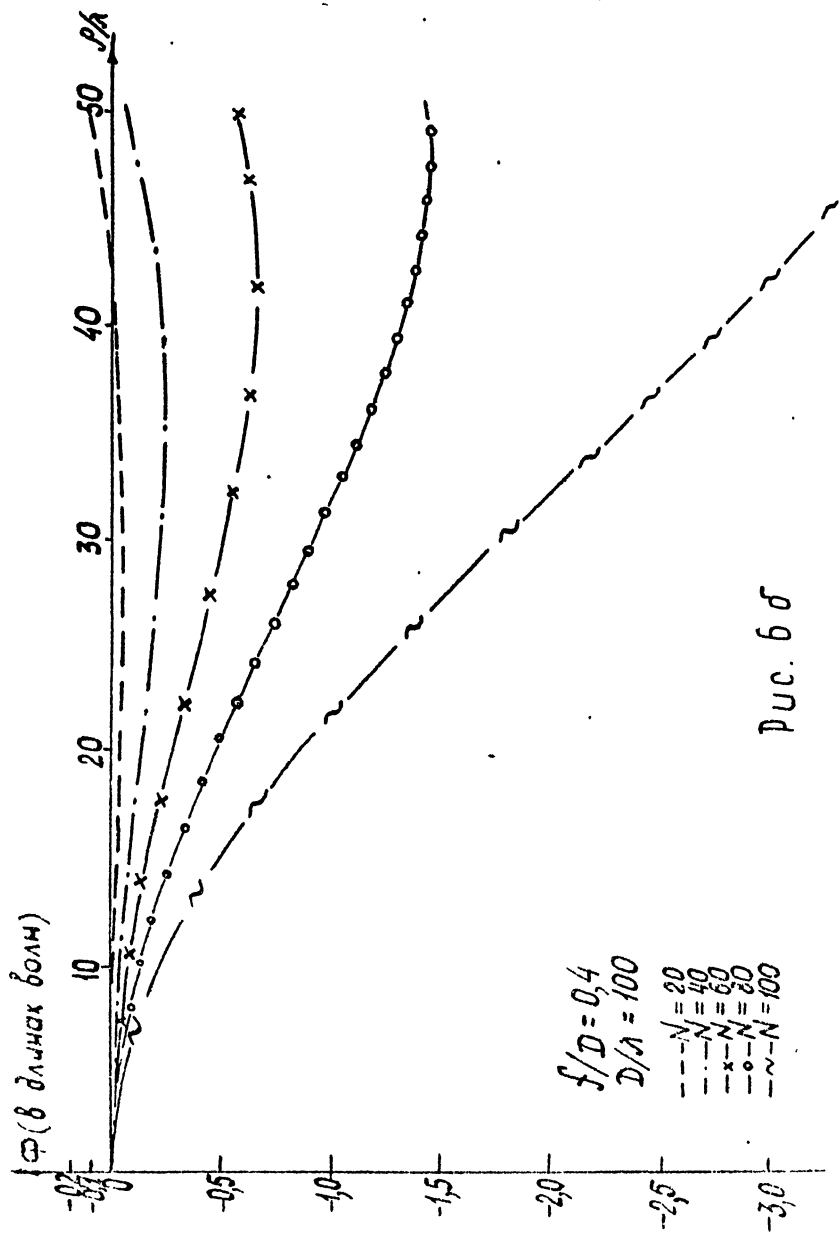
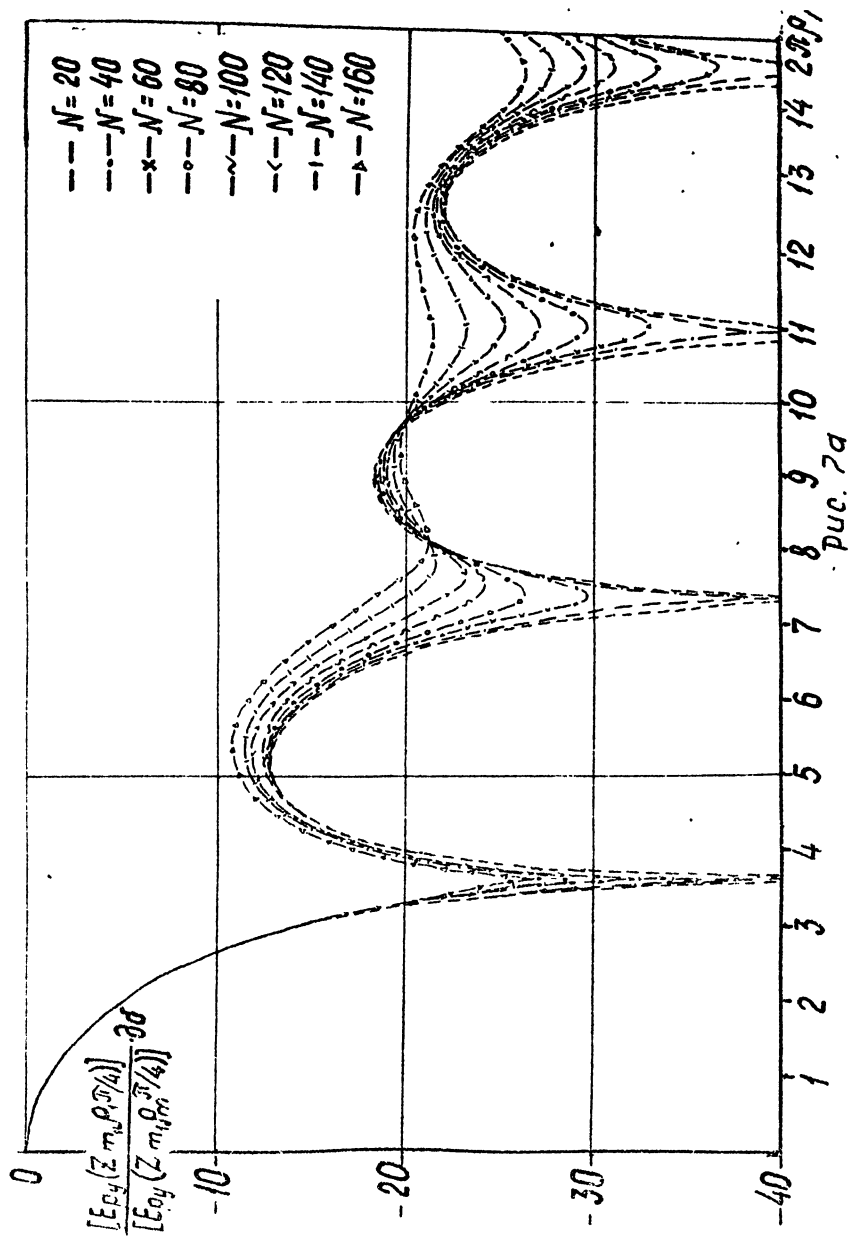
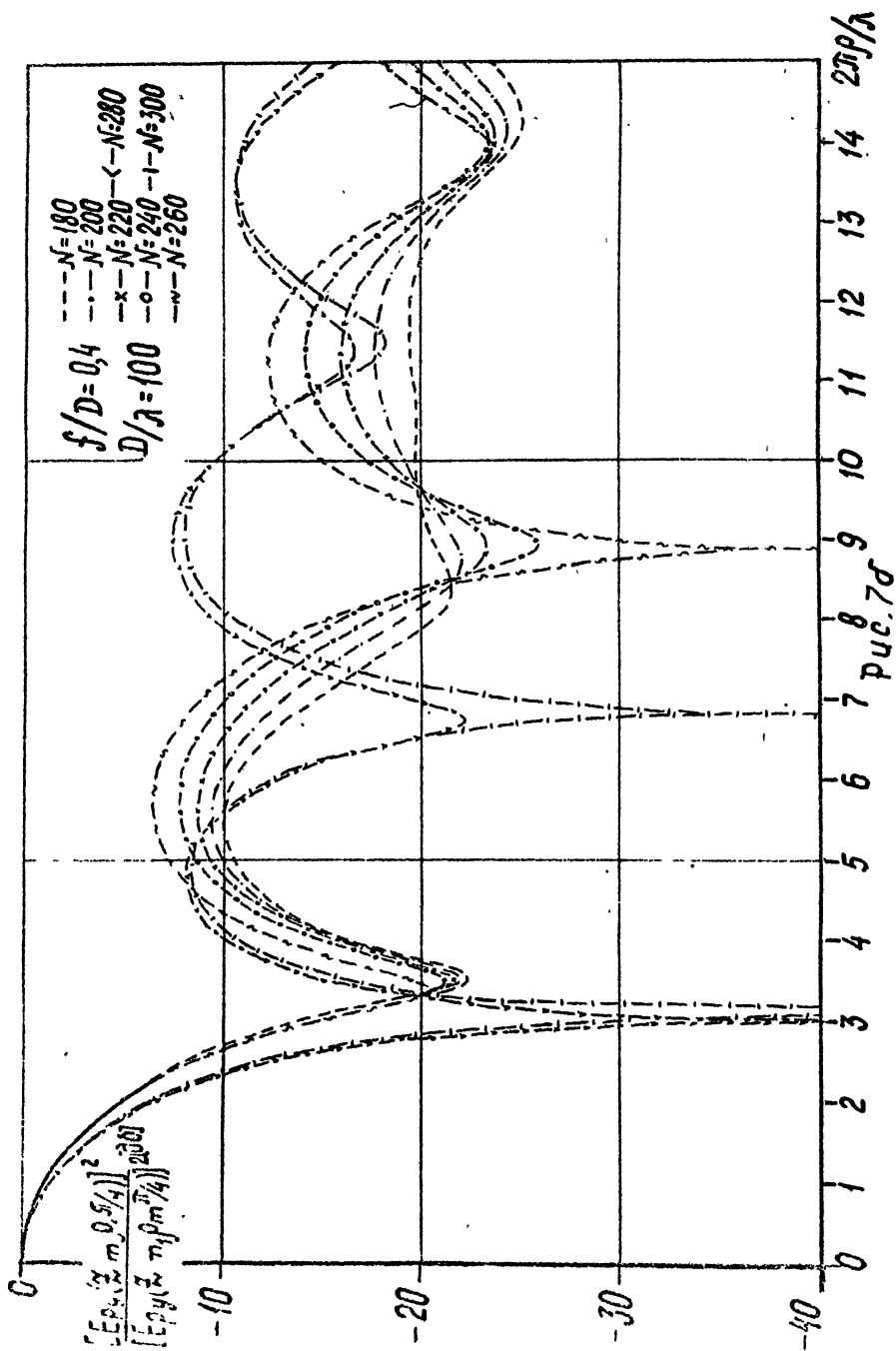
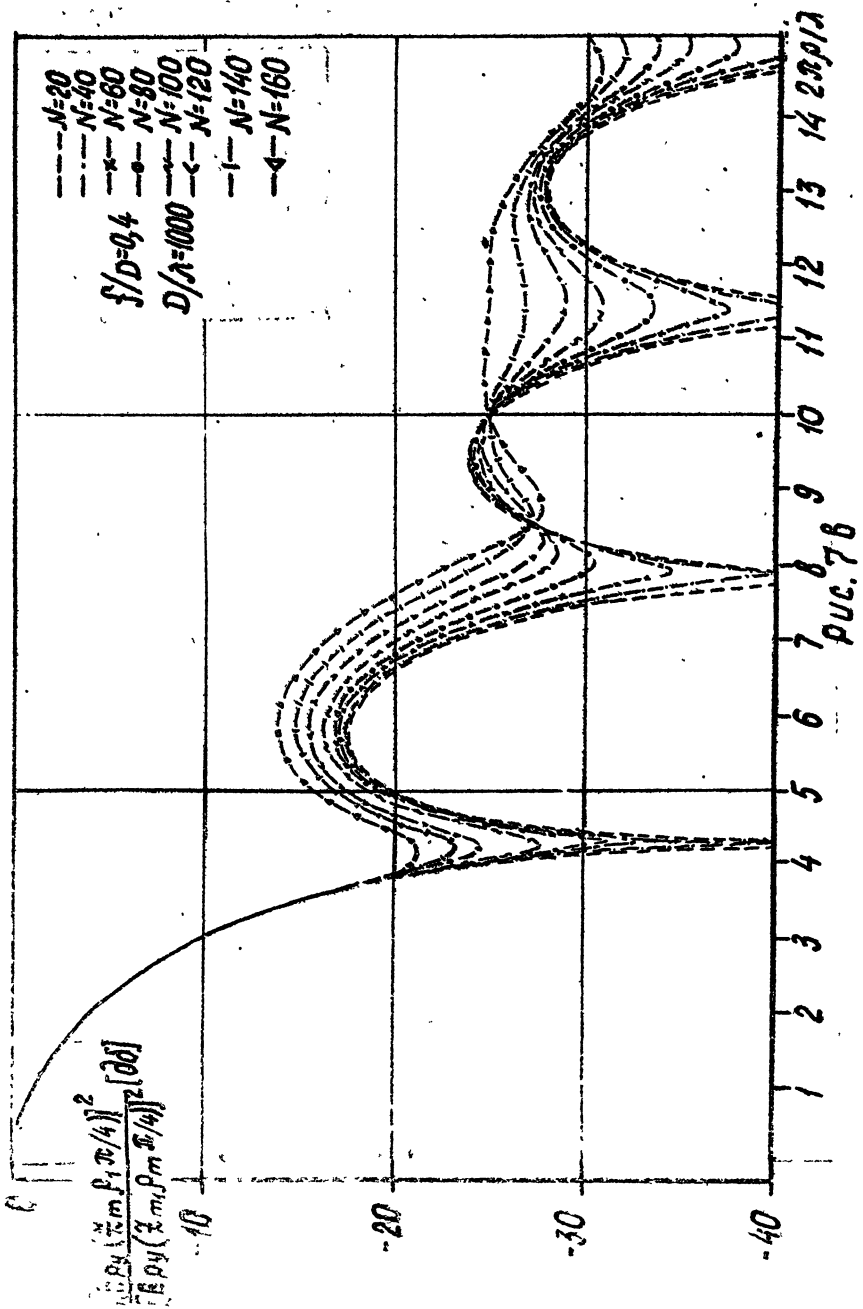


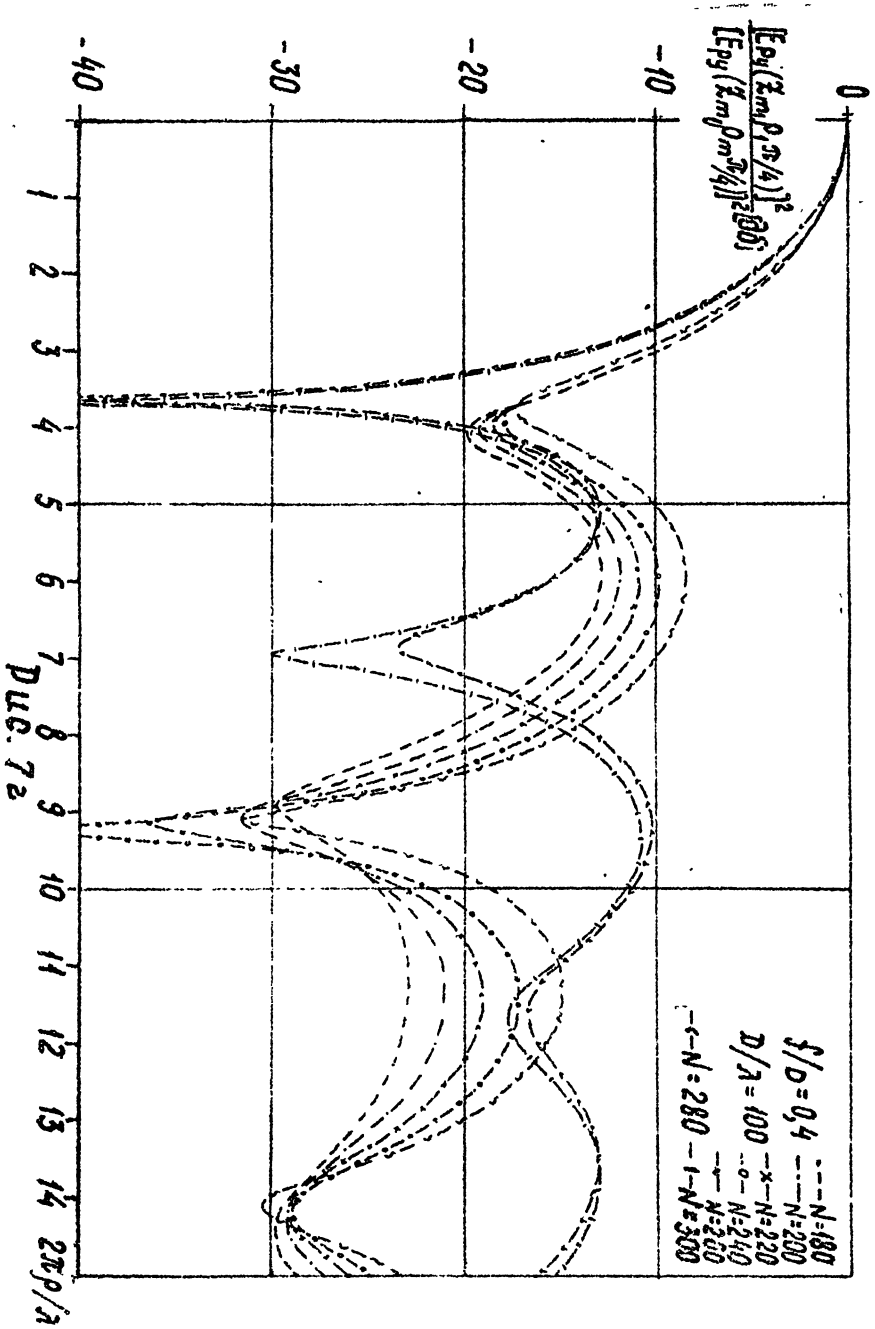
Рис. 6σ

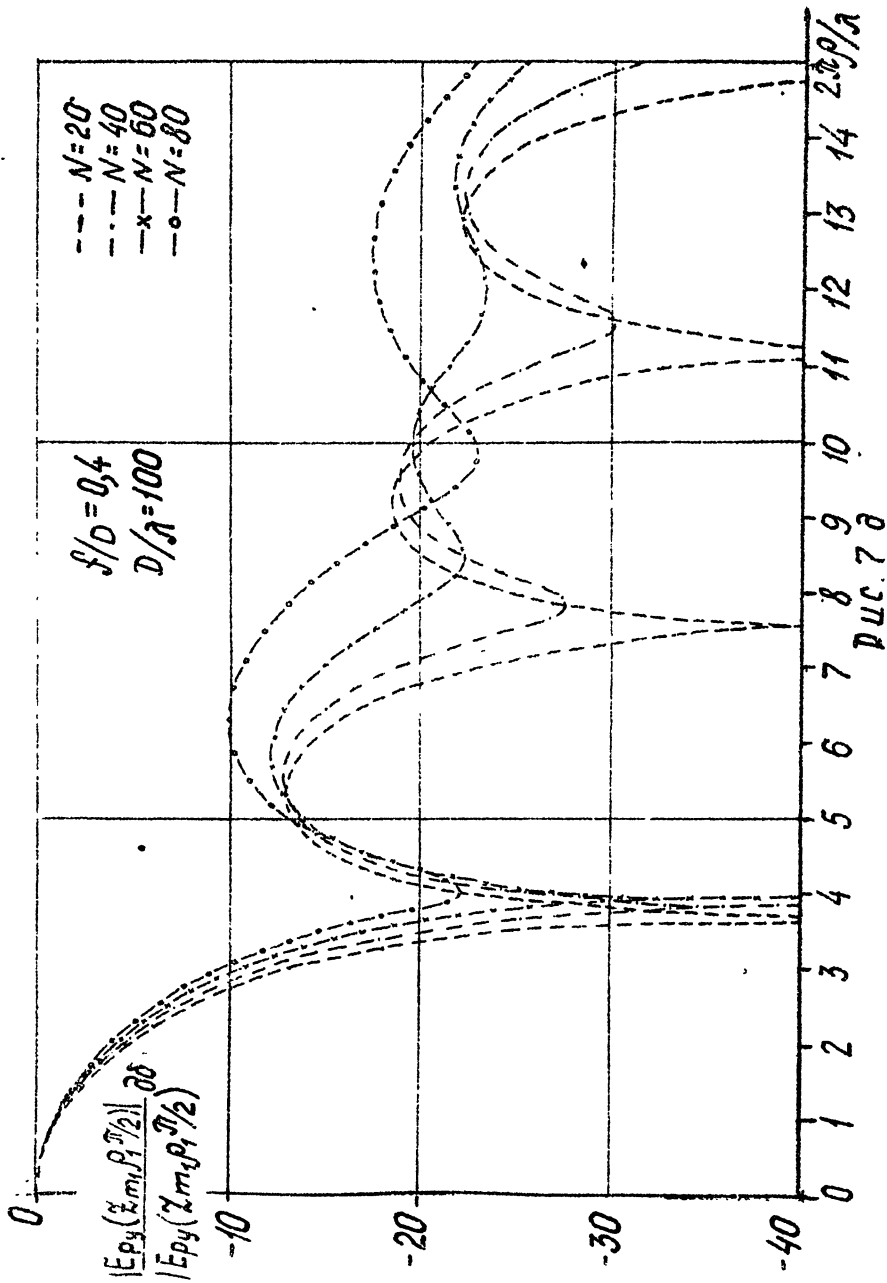


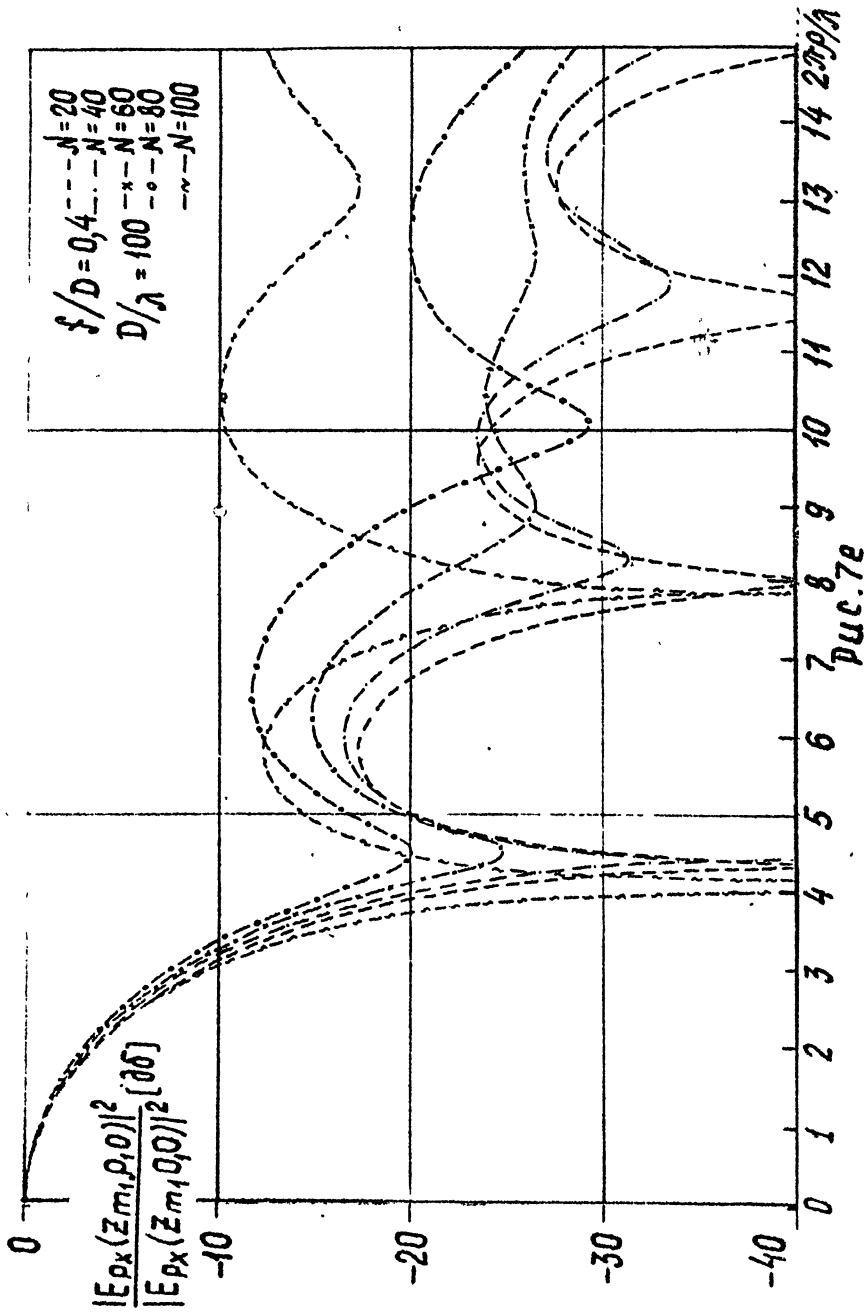


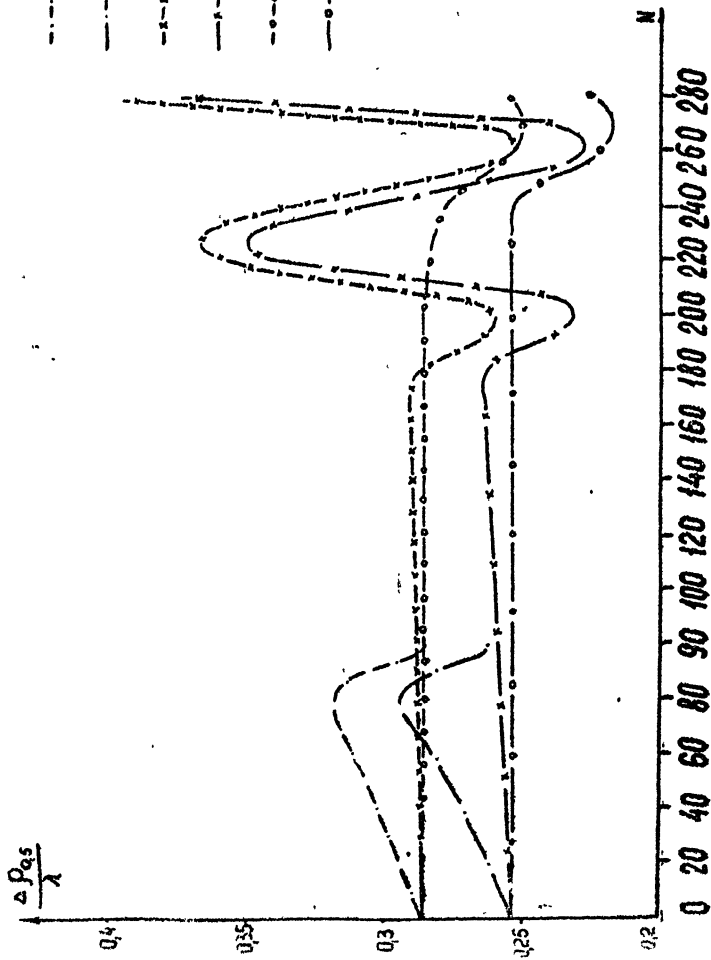












- $D/\lambda = 100 \quad \epsilon_p(z_m, \rho, 0)$
- $D/\lambda = 100 \quad \epsilon_p(z_m, \rho, \pi/2)$
- - - -  $D/\lambda = 500 \quad \epsilon_p(z_m, \rho, 0)$
- - - -  $D/\lambda = 500 \quad \epsilon_p(z_m, \rho, \pi/2)$
- - - -  $D/\lambda = 1000 \quad \epsilon_p(z_m, \rho, 0)$
- - - -  $D/\lambda = 1000 \quad \epsilon_p(z_m, \rho, \pi/2)$

Рис. 8

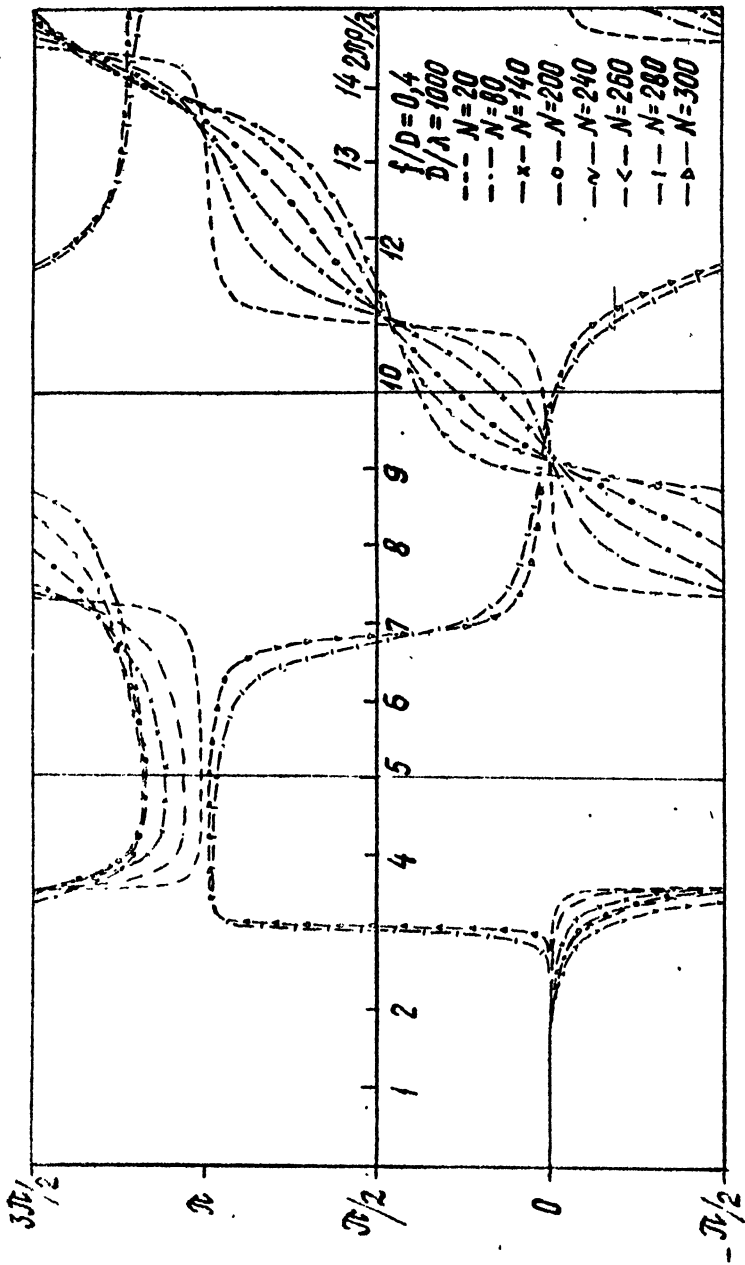


Рис. 9а

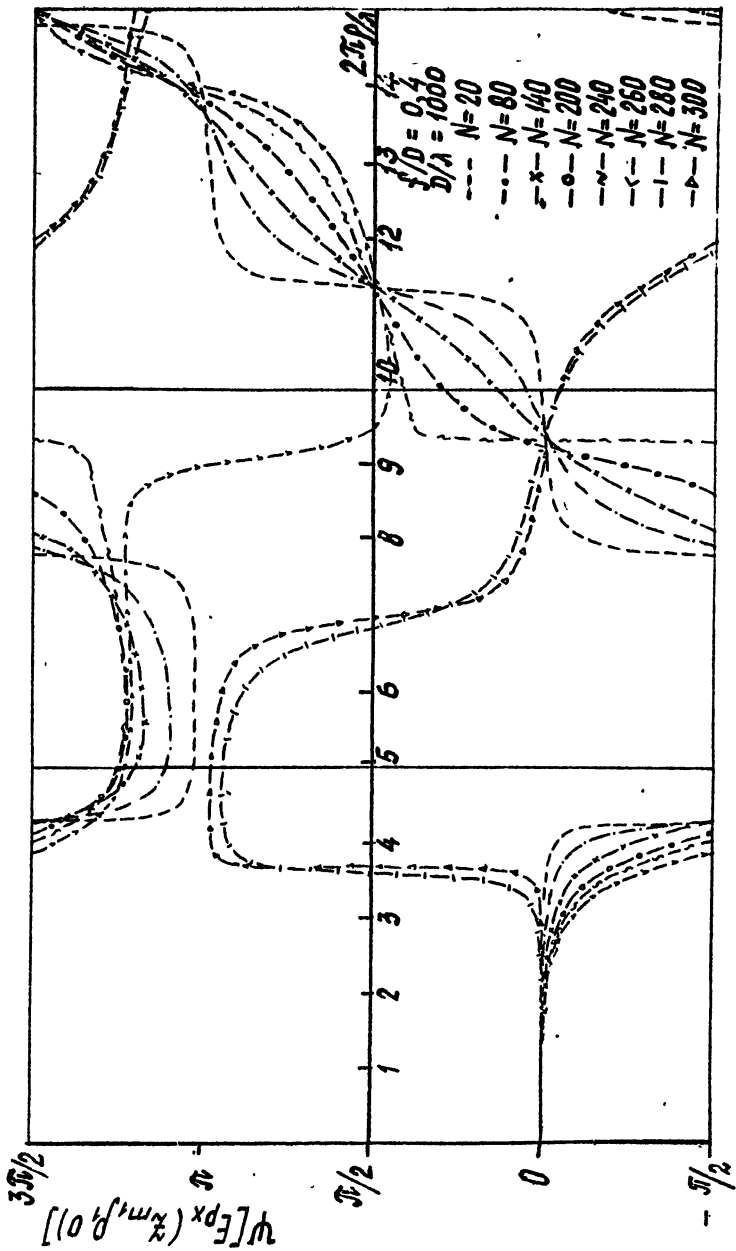
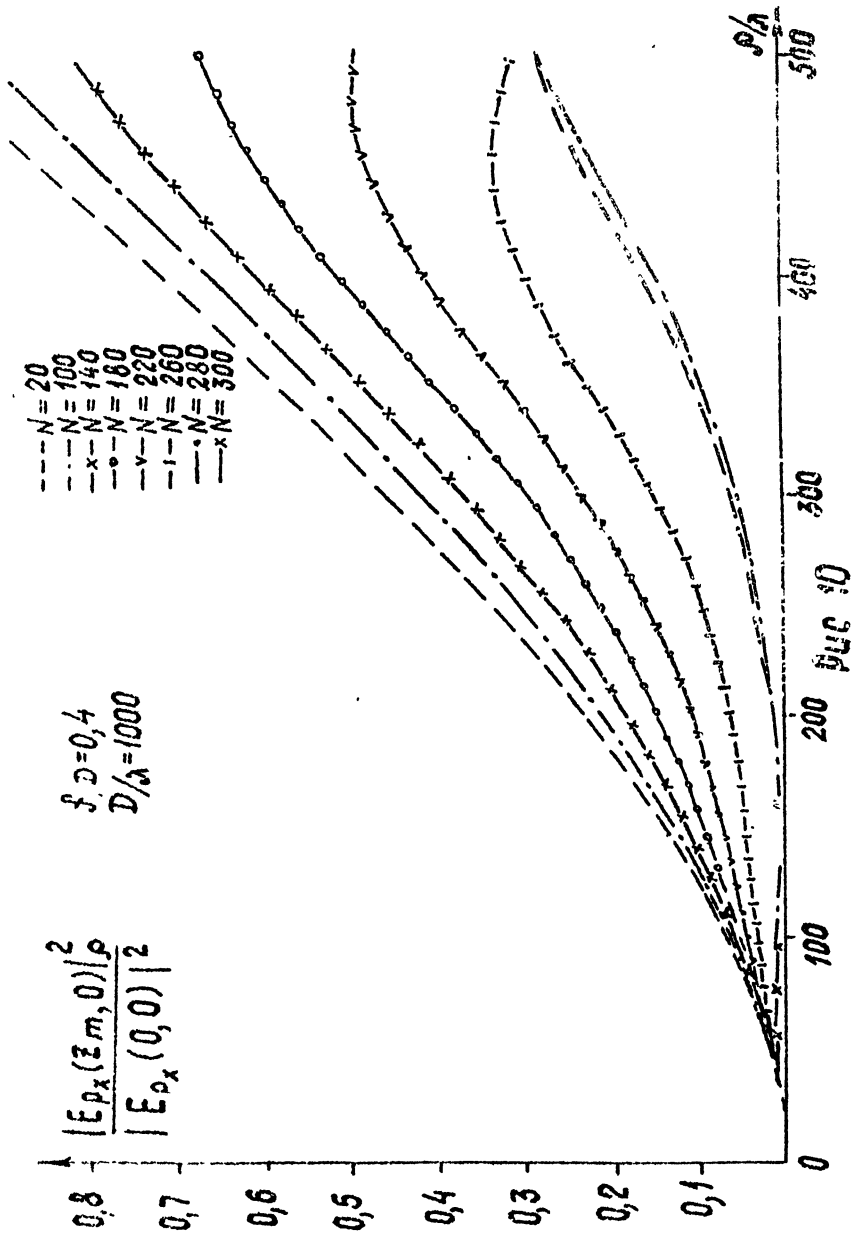


Рис. 9δ

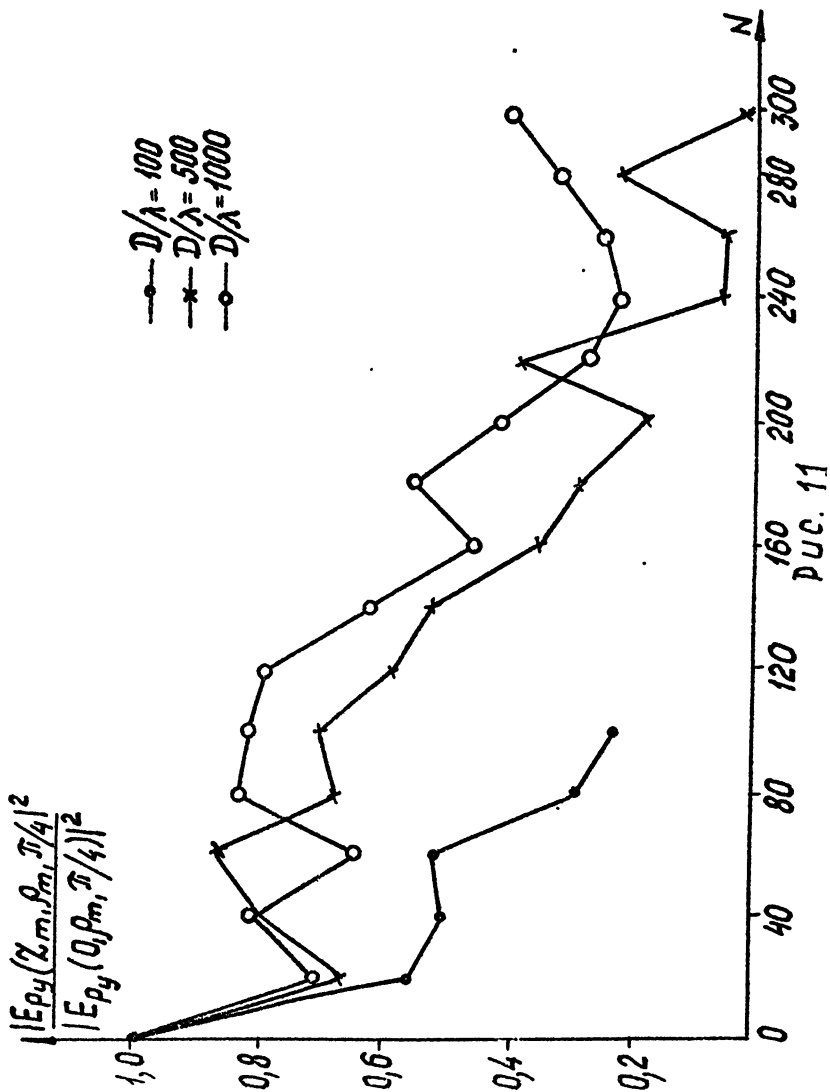
$$\frac{|E_{p_x}(z_m, 0)|^2}{|E_{p_x}(0, 0)|^2}$$

$$f, D=0,4$$

$$D/\lambda=1000$$







$$\frac{|E_{P_x}(z_{m_i}, \rho_{m_i}, \pi/4)|^2}{|E_{P_x}(z_{m_i}, 0, 0)|^2} [\partial \delta]$$

- $D/\lambda = 100$
- ×—  $D/\lambda = 500$
- $D/\lambda = 1000$

