Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 82

К ТЕОРИИ ЗОНДОВОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН

В.И.Турчин

Горький – 1975 г.

В связи со значительными техническими трудностями, возникающими при измерении диаграмм направленности антенн СВЧ-диапазона прямыми методами, т.е. с использованием источников, расположенных в дальней зоне исследуемой антенны, в последнее время интенсивно развиваются методы определения диаграмм направленности, использующие источники, расположенные вблизи антенны [1]. Один из таких методов - зондовый метод-заключается в том, что с помощью небольшой перемещаемой антенны - зонда - измеряется пространственное распределение амплитуды и фазы ближнего поля исследуемой антенны на плоскости вблизи ее раскрыва +), а диаграмма направленности находится как преобразование Фурье измеренного пространственного распределения ближнего поля [1-4].

В данной работе рассматриваются некоторые теоретические вопросы этого метода, а именно: связь между размерами области, внутри которой измеряется ближнее поле (поскольку практически невозможно выполнить измерения на всей бесконечной плоскости) и сектором углов, в котором диаграмма направленности определяется с малой ошибкой, а также влияние величины интервала между пространственными выборками при дискретной регистрации ближнего поля на конечный результат - восстановленную диаграмму направленности.

1. Общие соотношения

Задача определения диаграммы направленности зондовым методом может быть сформулирована следующим образом: требуется определить угловое распределение поля

+) Будем называть в дальнейшем эту плоскость плоскостью сканирования.

в дальней зоне (диаграмму направленности) $\vec{f}(\xi,\eta)$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла и граничным условиям — пространственному распределению компонент вектора электрического поля $\vec{E}^{(s)}(x,y)$ в плоскости сканирования S (будем считать, что плоскость сканирования определяется уравнением $z=0$ в декартовой системе координат (x,y,z)).

Диаграмму направленности $\vec{f}(\xi,\eta)$, как это обычно принято, определим как распределение вектора электрического поля $\vec{E}(x,y,z)$ на сфере бесконечно большого радиуса

$$\vec{f}(\xi,\eta)=\lim_{R\to\infty}\left[kRe^{ikR}\vec{E}(R\xi,R\eta,R\zeta)\right], \qquad (1)$$

где $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ (λ – длина волны)

$x=R\xi=R\sin\theta\cos\varphi,\ y=R\eta=R\sin\theta\sin\varphi,\ z=R\zeta=R\cos\theta;\ \zeta=\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}$

θ,φ – угломестная и азимутальная угловые координаты.

Поставленная таким образом задача определения диаграммы направленности имеет единственное решение [5], определяемое соотношениями, хорошо известными в антенной технике (см.например [6])

$$f_x(\xi,\eta)=C_0\zeta S_x(\xi,\eta),\quad f_y(\xi,\eta)=C_0\zeta S_y(\xi,\eta) \qquad (2)$$

$$f_z(\xi,\eta)=-C_0\left[\xi S_x(\xi,\eta)+\eta S_y(\xi,\eta)\right],\quad C_0=-\frac{i}{\lambda}.$$

Здесь $S_{x,y}(\xi;\eta)$ – фурье – спектры x,y – компонент пространственного распределения вектора электрического поля $\vec{E}^{(s)}(x,y)$ в плоскости S

$$S_{x,y}(\xi,\eta)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}E^{(s)}_{x,y}(x,y)e^{ik(\xi x+\eta y)}dx\,dy. \qquad (3)$$

Соотношения (2) легко могут быть получены из точного выражения [5] связывающего поле $\vec{E}^{(s)}(x,y)$ на плоскости S и поле $\vec{E}(x,y,z)$ в произвольной точке в переднем полупространстве $z>0$

$$\vec{E}(x,y,z) = \operatorname{rot} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\vec{z}_0 \vec{E}^{(s)}(x',y')] g \, dx' dy', \quad (4)$$

где $\vec{z}_0$ – единичный вектор вдоль оси z, g – функция Грина свободного пространства: $g(r) = \exp(ikr)/4\pi r$ (r -расстояние от точки на плоскости (x', y') до точки наблюдения (X, Y, Z)). Внося операцию rot под знак интеграла и выполняя предельный переход (1) (при выполнении предельного перехода мы должны ограничить область интегрирования в (4) сколь угодно большой, но конечной областью, полагая, что при расширении этой области (4) равномерно сходится к $\vec{E}(x,y,z)$), приходим к выражениям (2).

Следует отметить, что соотношения (2) справедливы с точностью до множителя $\exp[i(A\xi + B\eta + C\zeta)]$ (A, B, C – произвольные постоянные величины), поскольку система координат (x, y, z) связана только с плоскостью сканирования, а не с исследуемой антенной+), так что переместив параллельным сдвигом начало координат в точку (x_1, y_1, z_1) мы получим, что спектр S' относительно новой системы координат связан со спектром S соотношением++)

$$S'(\xi,\eta) = S(\xi,\eta) \exp[ik(\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1)].$$

П. Связь между размером области, в которой измеряется ближнее поле, и сектором углов, в котором диаграмма направленности определяется с минимальной ошибкой

Будем считать, что исследуемая антенна представляет собой объемное распределение электрического тока $\vec{j}(x,y,z)$, целиком заключенное внутри объема V_A с размерами $D_x^A \times D_y^A \times D_z^A$ (вне этого объема ток во всем пространстве равен нулю). Такое представление является доста-

+) В соотношения (2) не входит расстояние от плоскости S до исследуемой антенны.

++) По-видимому, подбирая коэффициенты A, B, C так, чтобы функция $A\xi + B\eta + C\zeta$ наилучшим образом аппроксимировала ход фазовой диаграммы $\arg f(\xi,\eta)$, можно локализовать положение фазового центра исследуемой антенны относительно плоскости сканирования, однако этот вопрос выходит за рамки данной работы.

точно общим и справедливо для большинства антенн (рупорные, вибраторные, щелевые, зеркальные и т.д.). Для таких антенн спектр распределения поля на плоскости, отстоящей на расстоянии z от центра области V_A можно представить в виде

$$\vec{S}(\xi,\zeta)=\iiint\limits_{V_A}\hat{v}_0\,\vec{j}(x',y',z')\,dx'dy'dz', \tag{5}$$

где тензор $\hat{v}_0$ есть

$$v_{0_{ij}}=\frac{k^2}{\xi_3}(\xi_i\xi_j-\delta_{ij})e^{ik[(z'-z)\xi_3+y'\xi_2+x'\xi_1]} \tag{6}$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

Для сокращения записи выражения (6) для угловых координат (ξ,η,ζ) использованы обозначения (ξ_1,ξ_2,ξ_3): $\xi_1=\xi$, $\xi_2=\eta$, $\xi_3=\zeta$.

Пусть далее спектр поля ищется по распределению поля $\vec{E}^{(S)}(x,y)$ внутри конечной области $\Omega_и$ *) (область сканирования ближнего поля) на плоскости S с размерами $D^и_x \times D^и_y$

$$\vec{S}^{\,B}_{x,y}(\xi,\eta)=\iint\limits_{\Omega_и}\vec{E}^{(S)}_{x,y}(x,y)\,e^{ik(\xi x+\eta y)}dxdy.$$

Задача заключается в том, чтобы выбрать размеры этой области так, чтобы спектр $\vec{S}^{\,B}(\xi,\eta)$ с достаточной точностью совпадал с "истинным" спектром $\vec{S}(\xi,\eta)$ в интересующей нас области изменения ξ,η. Выразим спектр $\vec{S}^{\,B}(\xi,\eta)$ через распределение тока $\vec{j}(x,y,z)$

$$\vec{S}^{\,B}(\xi,\eta)=\iiint\limits_{V_A}\hat{v}\,\vec{j}(x',y',z')\,dx'dy'dz', \tag{7}$$

---

*) Как обычно, в качестве оценки спектра функции, известной внутри области $\Omega_и$, мы принимаем спектр функции, совпадающей внутри области $\Omega_и$ с известной, и равной нулю всюду вне этой области.

где

$$\hat{\vartheta}(\xi,\eta,x',y',z'-z)=\iint\limits_{\Omega_и}\frac{\hat{b}(x'-x,y'-y,z'-z)}{r}\,e^{ik[r-\xi(x'-x)-\eta(y'-y)]}dx\,dy \qquad (8)$$

$$b_{ij}=\left(k^2+\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\delta_{ij}-\frac{(x_i-x_i')(x_j-x_j')}{r^2}\left(k^2+\frac{3ik}{r}-\frac{3}{r^2}\right)$$

$r=\left[\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i')^2\right]^{1/2}$. Для сокращения записи (8) для координат (x,y,z) использованы обозначения (x_1,x_2,x_3): $x_1=x$, $y_1=y$, $z_1=z$. Очевидно, для совпадения $\tilde{S}^в$ с $\tilde{S}$ достаточно совпадения тензора $\hat{\vartheta}$ с $\hat{\vartheta}_0$. Рассмотрим более подробно выражение для $\hat{\vartheta}$ (8). Будем полагать, что параметр k, входящий в качестве множителя в фазу подинтегрального выражения, велик (т.е. длина волны мала по сравнению с размерами области $\Omega_и$). Тогда (8) можно представить в виде асимптотического разложения по степеням $k^{-1/2}$, используя метод стационарной фазы [7]. Точка стационарной фазы (x_c, y_c) в (8) определяется следующим выражением

$$x_c=x'+(z-z')\frac{\xi}{\zeta}$$
$$y_c=y'+(z-z')\frac{\eta}{\zeta} \qquad (9)$$

и разложение $\hat{\vartheta}$ принимает вид

$$\hat{\vartheta}=\hat{\vartheta}_0\left[1+0\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right]. \qquad (10)$$

Соотношение (10), естественно, будет справедливо лишь в том случае, если точка стационарной фазы (8) принадлежит области интегрирования $\Omega_и$. В противном случае первый член асимптотического разложения будет определяться интегралом по контуру области $\Omega_и$ [7] *) и будет иметь другой вид, чем $\hat{\vartheta}_0$. Таким образом, условием близости $\hat{\vartheta}$ к $\hat{\vartheta}_0$ (с точностью порядка $k^{-1/2}$), а, следовательно, и условием близости спектра $\tilde{S}^в$, полученного по значениям ближнего поля в области $\Omega_и$ к "истинному" спектру $\tilde{S}$ (с той же степенью точности) является требование, чтобы

*) Иметь тот же порядок величины, что и второй член разложения (10).

$$X_c, Y_c \in \Omega_И \qquad \text{при} \qquad X', Y', \in V_A \quad ; \tag{11}$$

где X_c, Y_c определяются на основании (9).

Поскольку первый член асимптотического разложения (10) определяется интегралом по некоторой окрестности точки стационарной фазы X_c, Y_c [8], условие (11) необходимо усилить, требуя, чтобы точка стационарной фазы приближалась к границе области $\Omega_И$ не более, чем на размер окрестности Δz, дающей основной вклад в первый член разложения (10) Величину Δz определим из условия чтобы фаза Φ в подинтегральном выражении (8) всюду на границе рассматриваемой окрестности – круга радиуса Δz – менялась на величину порядка πn по сравнению со своим значением в точке стационарной фазы [8]. Выражая значение фазы Φ на границе окрестности через вторые производные Φ в точке стационарной фазы, получим:

$$\Delta z \approx \gamma \left[\frac{(z-z')\lambda}{\cos^3(\theta)} \right]^{1/2}, \tag{12}$$

где $\gamma \approx \sqrt{n\pi}$, $n \gtrsim 1$.

Полагая $D_x^A = D_y^A = D^A$; $D_x^И = D_y^И = D^И$ и вводя величину θ_B – размер углового сектора, внутри которого спектр поля (а, следовательно, и диаграмма направленности) будет восстанавливаться с малой ошибкой, соотношения (11), (12) можно представить с учетом (9) в виде, более удобном для практического использования

$$D^И = D^A + 2\left(z + \frac{D_z^A}{2}\right) tg\left(\frac{\theta_B}{2}\right) + \gamma \left[\frac{(z + D_z^A/2)\lambda}{\cos^3(\theta_B/2)} \right]^{1/2}. \tag{13}$$

Из выражения (13) следует, что при выборе размера области сканирования $D^И$ следует учитывать не только протяженность, но и "глубину" антенны (например, в случае зеркальной антенны эту величину видимо, следует принять $D_z^A = (D^A)^2/16F$, F – фокусное расстояние). Из (13) следует также, что размер области $\Omega_И$, в которой задается (измеряется) ближнее поле, начинает существенно превышать размеры антенны, если мы хотим восстановить диаграмму направленности в широком секторе углов (θ_B приближается к 180^o)+). Так, например, если $\theta_B = 175^o$ и $z + D^A_z/2 = 0{,}1D^A$ размер области сканирования $D^И$ (при $\gamma = 0$) превышает размеры антенны уже в 2,3 раза, так что, по-видимому, не следует стремиться восстановить боковое излучение в секторе, прилегающем непосредственно к границе переднего и заднего полупространства.

С целью иллюстрации полученных результатов и для выяснения практической применимости формулы (13) для оценки размера области сканирования на ЭЦВМ был проведен расчет диаграммы $f^B(\xi)$ путем вычисления преобразования Фурье в конечных пределах распределения ближнего поля. В одномерном случае (принципиально не отличающемся от двумерного) вычислялась y -компонента диаграммы направленности антенны, представляющей собой плоскую ленту тока, ориентированного вдоль оси X. ("Истинная" диаграмма направленности такой антенны, как известно, есть $f(\xi) = \sin(\pi \frac{D^A}{\lambda}\xi)/\pi\frac{D}{\lambda}\xi$, $\xi = \sin\theta$; D^A - ширина ленты тока).

Результаты расчета представлены на рис. 1а,б для $D^A/\lambda = 128$, $z/\lambda = 10$, 100 и для различных $D^И/\lambda$. По оси ординат графика отложена ошибка восстановления $\varepsilon(\xi) = \frac{|f(\xi)|^2 - |f^B(\xi)|^2}{|f(\xi)|^2}$ 100% в точках $\xi_n = \frac{\lambda}{D^A}(n + \frac{1}{2})$ ($n = 0, 1, \ldots, 127$), соответствующих примерно максимумам

+) Физически это легко объяснить следующим образом. Рассмотрим находящийся на расстоянии z от плоскости сканирования точечный источник (диполь Герца), излучающий набор плоских волн (лучей) по всем направлениям. Значение диаграммы $f(\theta)$ определяется соответственно плоской волной (лучом), падающим под углом θ к нормали к плоскости. "Центр" этой плоской волны (или соответствующий ей луч) будет пересекать плоскость сканирования на расстоянии $z\,tg\,\theta$ от проекции источника на плоскость. Чтобы зафиксировать информацию об этой плоской волне, мы должны измерить ближнее поле в окрестности точки пересечения луча с плоскостью. Чем больше угол падения, тем дальше мы должны двигаться от источника по плоскости сканирования т.е. тем больше должен быть размер области, в которой необходимо измерять ближнее поле.

боковых лепестков диаграммы. На оси абцисс отрезками жирных линий и вертикальными штриховыми линиями отмечены значения $\xi_в = \sin(\theta_в/2)$, вычисленные по формуле (13) при $\gamma = 0$ (правый край отрезка) и $\gamma = 0{,}5$ (левый край). Как видно из рис. 1, формула (13) достаточно точно указывает границы углового сектора, вне которого ошибки в восстановленной диаграмме начинают резко возрастать.

Ш. Оценка влияния дискретной регистрации ближнего поля на точность определения диаграммы направленности

Как правило, на практике пространственное распределение ближнего поля измеряют в дискретной последовательности точек, отстоящих друг от друга на одинаковом расстоянии h. Заменим при вычислении Фурье-спектра ближнего поля интегрирование суммированием с шагом h, получая при этом функцию $S^д(\xi)$ +)

$$S^д(\xi) = h\sum_{n=0}^{N-1} E^{(S)}(X_n)\, e^{ik\xi X_n} \qquad (14)$$

$$h = \frac{D^н}{N}, \quad X_n = -\frac{D^н}{2} + h\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Обычный прием оценки различия между спектром $S^д(\xi)$, полученным в результате дискретного преобразования Фурье (14), и спектром $S^в(\xi)$, полученным по непрерывным значениям ближнего поля, состоит в представлении $S^д(\xi)$ в виде суммы "сдвинутых" спектров $S^в(\xi)$

$$S^д(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S^в(\xi - n\xi_n), \qquad (15)$$

где $\xi_n = \dfrac{\lambda}{h}$,

$$S^в(\xi) = \int_{-D^н/2}^{D^н/2} E^{(S)}(x)\, e^{ik\xi x}\, dx.$$

+) Чтобы избежать громоздких выражений при анализе влияния дискретности, мы рассмотрим одномерный случай.

В работе [4] приведена следующая оценка величины шага h. Поскольку спектр $S^{в}(\xi)$ при $D^{и} \to \infty$ содержит множитель $\exp(ikz\sqrt{1-\xi^2})$ (см. (6)), экспоненциально убывающий вне области видимых углов $|\xi| > 1$ при $kz > 1$, слагаемые в сумме (15) при шаге $h < \lambda/2$ практически не будут перекрываться и ошибка, вносимая дискретностью, будет несущественна+).

Такая оценка представляется не вполне корректной, поскольку спектр $S^{в}(\xi)$ находится путем интегрирования в конечных пределах, а, следовательно, не может убывать экспоненциально при $\xi \to \infty$.

Поскольку при определении диаграммы направленности по распределению ближнего поля внутри области $\Omega_и$ уже допускается ошибка из-за ограниченности размеров области сканирования, можно сопоставить величину ошибки, обусловленной дискретностью регистрации ближнего поля, с величиной ошибки, обусловленной конечными размерами области сканирования. Таким образом, при выборе величины шага h можно руководствоваться следующим критерием: ошибка, вносимая из-за дискретности регистрации ближнего поля

$$\Delta S_g(\xi) = S^{в}(\xi) - S^{g}(\xi)$$

должна быть такого же порядка, что и ошибка $\Delta S_в(\xi)$, обусловленная конечными размерами области сканирования ближнего поля

$$\Delta S_в(\xi) = S(\xi) - S^{в}(\xi),$$

т.е.

$$\Delta S_g(\xi) \approx \Delta S_в(\xi). \tag{16}$$

Ошибку $\Delta S_в(\xi)$ представим в виде:

$$\Delta S_в(\xi) = \int_{-\infty}^{-D^{и}/2} E^{(S)}(x)\, e^{ik\xi x}\, dx + \int_{D^{и}/2}^{\infty} E^{(S)}(x)\, e^{ik\xi x}\, dx. \tag{17}$$

+) Практически в [4] предлагается использовать шаг $h \approx \frac{\lambda}{3}$.

Производя в (17) дважды интегрирование по частям, мы получим :

$$\Delta S_B(\xi) = \frac{i}{k\xi}\left\{\varphi(\xi) + \frac{i}{k\xi}\,\psi(\xi)\right\} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \qquad (18)$$

где

$$\varphi(\xi) = E^{(s)}\left(\frac{D^{и}}{2}\right)e^{ik\xi\frac{D^{и}}{2}} - E^{(s)}\left(-\frac{D^{и}}{2}\right)e^{-ik\xi\frac{D^{и}}{2}},$$

$$\psi(\xi) = E^{(s)'}\left(\frac{D^{и}}{2}\right)e^{ik\xi\frac{D^{и}}{2}} - E^{(s)'}\left(-\frac{D^{и}}{2}\right)e^{-ik\xi\frac{D^{и}}{2}}.$$

Для нахождения ошибки, обусловленной дискретностью, воспользуемся Эйлеровыми методами разложения остатка квадратурных формул [9]

$$\Delta S_g(\xi) = ik\xi\,\frac{h^2}{24}\left\{\varphi(\xi) - \frac{i}{k\xi}\,\psi(\xi)\right\} + O\left(h^4\right). \qquad (19)$$

Поскольку второе слагаемое в фигурных скобках в (18) и (19) имеет порядок малости k^{-1} по сравнению с первым, его можно опустить, полагая

$$\Delta S_g(\xi) \approx ik\xi\,\frac{h^2}{24}\,\varphi(\xi),$$

$$\Delta S_B(\xi) \approx \frac{i}{k\xi}\,\varphi(\xi).$$

Сравнивая между собой величины ошибок $\Delta S_g(\xi)$ и $\Delta S_B(\xi)$, с учетом введенного нами критерия (18) получим следующую оценку величины шага

$$h \approx \frac{\lambda}{\sin\left(\frac{\theta_g}{2}\right)}\,\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{24}{M}}, \qquad (20)$$

где θ_g – размер углового сектора, внутри которого будет выполняться условие (18), M – число, показывающее, во сколько раз ошибка вызванная дискретностью, будет меньше ошибки, обусловленной конечными размерами области сканирования.

В заключение автор выражает благодарность Н.М.Цейтлину за постоянное внимание к данной работе и В.А.Те юйкину и Ю.А.Рыжову за обсуждение результатов настоящей работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R.C.Johnson, H.A.Ecker, J.S.Hollis, Proc.IEEE, 61, 12, 1668 (1973).
2. R.C.Bairs, Electron.Lett., 6, 11, 349 (1970).
3. А.А.Арутюнян и др., Изв. АН Арм. ССР, Физика, 7, 5, 373 (1972).
4. E.B.Joy, D.T.Paris, IEEE Trans.Ant.and Prop., AP-20, 3, 253 (1972).
5. Х.Хенл, А.Мауэ, К.Вестпфаль, Теория дифракции, Изд. "Мир", М., 1964.
6. Сканирующие антенные системы СВЧ под редакцией Г.Т.Маркова и А.Ф.Чаплина, т.1, Изд.-во "Советское радио", М., 1966.
7. А.Г.Прудковский, ЖВММФ, 13, 2 (1973).
8. А.Эрдейи, Асимптотические разложения, Гос.изд-во физико-математической лит., М., 1962.
9. В.И.Крылов. Приближенное вычисление интегралов. Гос. изд-во физико-математической лит., М., 1959.

ПОДПИСИ К РИСУНКУ

Рис. 1а,б. На рис. 1 показаны ошибки восстановления диаграммы направленности антенны, представляющей собой плоскую ленту с током шириной $D_{\bullet}^{A} = 128\lambda$, в случае, когда диаграмма направленности вычисляется по значениям ближнего поля на расстоянии $z = 10\lambda$ (рис.1а) от антенны в области шириной $D^{И} = 130\lambda$ (×——×——×), $D^{И} = 150\lambda$ (•——•——•—•) и $D^{И} = 225\lambda$ (——•——•——) и $z = 100\lambda$ (рис. 1б) для $D^{И} = 150\lambda$ (•——•——•) и $D^{И} = 225\lambda$ (——•——•——•). На графиках рис. 1а,б приведена зависимость относительной ошибки восстановления (в процентах) в точках $\xi_n = \frac{\lambda}{D^A}\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ($n = 0, 1, \ldots, 127$), соответствующих примерно максимумам боковых лепестков диаграммы. На этих графиках для каждого значения $D^{И}$ двумя вертикальными штриховыми линиями отмечены значения $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$; $n^{(1,2)} = \frac{D^A}{\lambda}\sin\left(\theta_{в}^{(1,2)}/2\right) - \frac{1}{2}$; $\theta_{в}^{(1,2)}$ вычислен по формуле (11) соответственно для $\gamma = 0{,}5$ и $\gamma = 0$. Как видно из рис. 1а,б, для каждого $D^{И}$ штриховые линии достаточно точно делят область изменения ξ на участок со сравнительно небольшими ошибками восстановления (около 10%) и область, где диаграмма направленности восстанавливается неверно (ошибка превышает 30–40%).

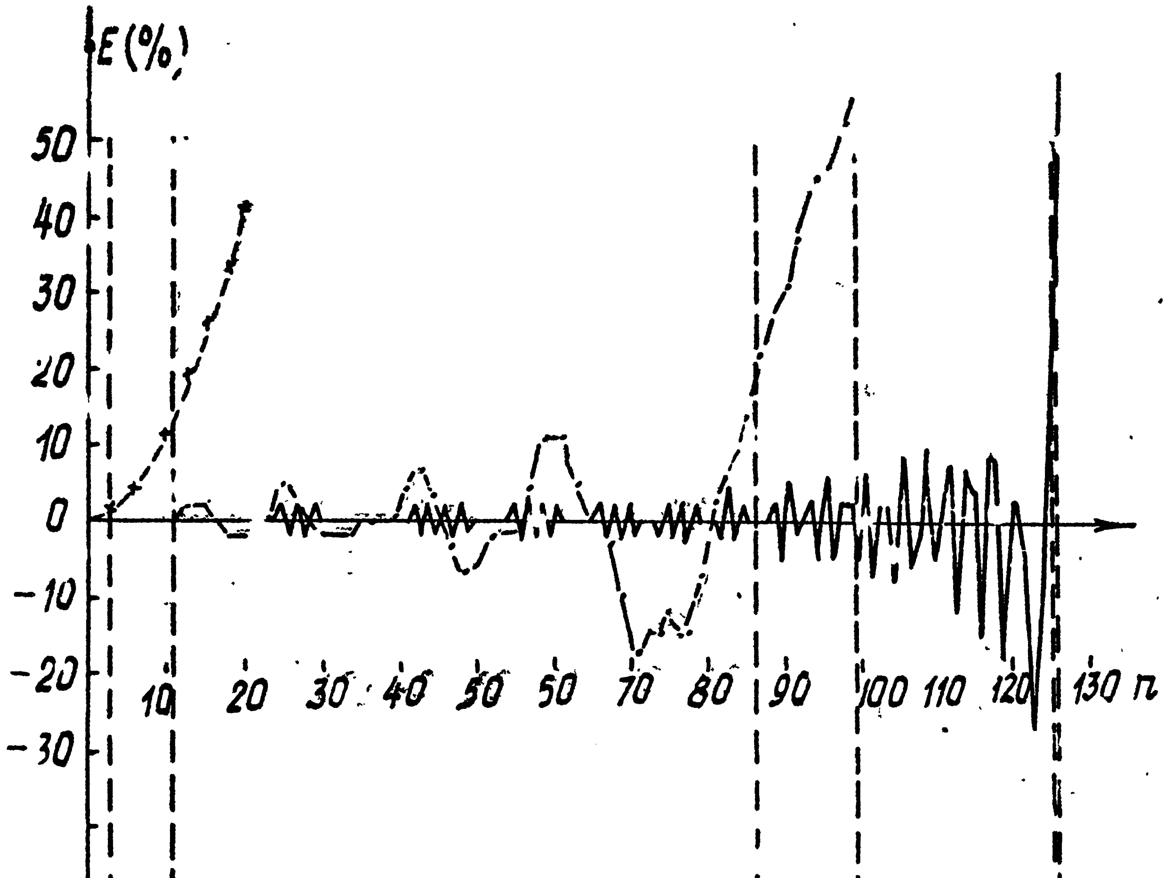

Рис. 1а.

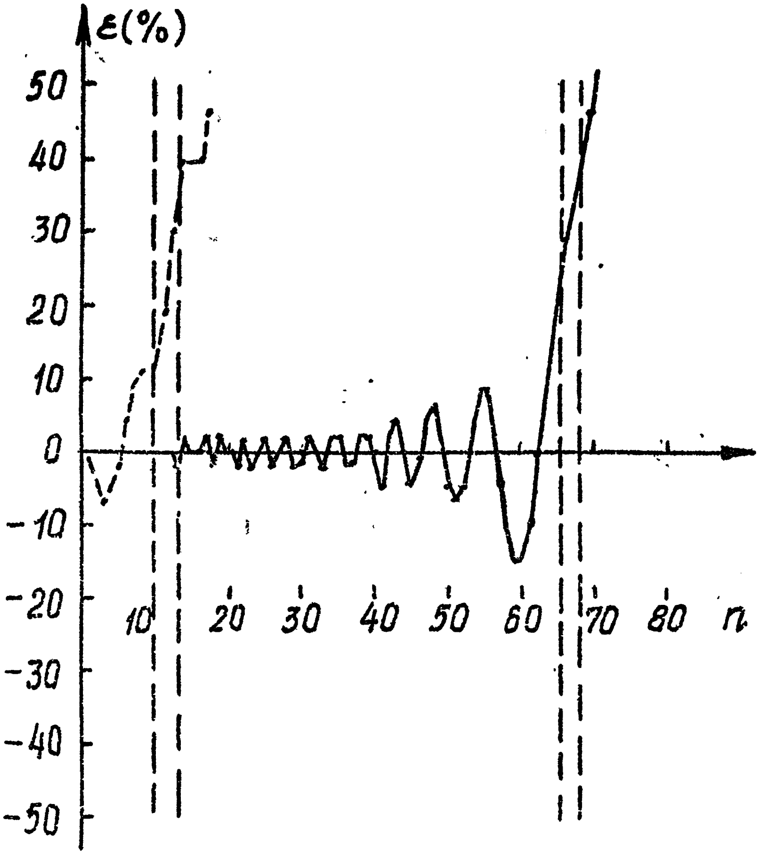

Рис. 16.