

Министерство высшего и среднего специального образования  
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени  
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 85

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ  
АМПЛИТУДЫ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

А.Н. Малахов,  
Е.Н. Пелиновский,  
А.И. Сагчев,  
В.Е. Фридман.

Горький - 1976 г.

Проявление статистических эффектов при распространении акустических сигналов конечной амплитуды в хаотически неоднородной среде отмечалось неоднократно. В частности, экспериментально наблюдалось увеличение ширины фронта взрывных волн и "звуковых ударов", распространяющихся в турбулентных слоях океана и атмосферы (см., например, [1,2]). Теоретическое исследование нелинейных волновых процессов в хаотически неоднородных средах связано с серьезными математическими трудностями. Однако при некоторых упрощающих предположениях удается описать различные характеристики нелинейного статистического процесса, например, рассеянное поле, вероятностное распределение, корреляционную функцию, среднее поле [3-7]. Здесь рассматриваются нелинейные процессы в статистически неоднородных средах и обсуждаются различные подходы для выяснения присущих им основных закономерностей. Для этого мы ограничимся изэнтропическими движениями и воспользуемся инвариантами Римана  $J^{\pm} = u^{\pm} \pm \alpha_1 [c - a - \delta a]$ , для которых уравнения нелинейной акустики имеют следующую форму:

$$J_{\pm}^{\pm} + (\pm a \pm \delta a + \alpha_2 J^{\pm} + \alpha_3 J^{\mp}) J_{\pm}^{\pm} = \mp \alpha_1 (\alpha_2 \gamma^{\pm} + \alpha_3 J^{\mp}) \frac{d\delta a}{dx}, \quad (1)$$

где  $u$  - скорость частиц среды,  $\rho = c^{\alpha_1}$  - плотность,  $a$  - невозмущенная скорость звука,  $\delta a(x)$  - флуктуации скорости (для изэнтропических движений флуктуации скорости звука и плотности связаны между собой),  $\alpha_1 = 2/(\gamma - 1)$ ,  $\alpha_2 = (\gamma + 1)/4$ ,  $\alpha_3 = (3 - \gamma)/4$ ,  $\gamma$  - пока-

затель адиабаты. Преимущество этих переменных заключается в том, что в однородной среде каждый инвариант описывает волну, распространяющуюся в одном направлении. Из-за случайных флуктуаций падающая и отраженная волны связаны между собой. В общем случае решение (1) получить не удастся. Однако, если размеры турбулентной области невелики, то решение (1) можно построить в виде рядов [5], как это делается в известном Борновском приближении

$$J^+ = J(x, t) + i_+(x, t) + \dots, \quad J^- = i_-(x, t) + \dots, \quad (2)$$

где  $J$  — падающая нелинейная волна, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial J}{\partial t} + (a + \alpha_2 J) \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

а  $i_+$  и  $i_-$  — рассеяние вперед и назад, вызываемое случайными неоднородностями. В отличие от нелинейной задачи здесь падающая волна искажается в слое из-за конечной амплитуды (фиг. 1). Подставляя (2) в (1) и учитывая уравнение (3), получаем систему для рассеянного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_-}{\partial t} + (-a + \alpha_3 J) \frac{\partial i_-}{\partial x} &= \alpha_1 \alpha_3 J \frac{d\delta a}{dx}, \\ \frac{\partial i_+}{\partial t} + (-a + \alpha_3 J) \frac{\partial i_+}{\partial x} - \alpha_2 i_+ \frac{\partial J}{\partial x} + \alpha_3 i_- \frac{\partial J}{\partial x} &= (4) \\ &= -\delta a \frac{\partial J}{\partial x} - \alpha_1 \alpha_2 J \frac{d\delta a}{dx}. \end{aligned}$$

Первое уравнение описывает рассеяние назад. Переходя в нем от  $x, y$  к переменным  $x, \eta$ , где  $\eta$  есть решение характеристического уравнения  $\eta_t - (a - \alpha_3 J)\eta_x = 0$ , легко найти  $i_-$  вне слоя:

$$i_- = -\alpha_1 \alpha_3 a \int_0^L \frac{\delta a(\eta) J \eta}{(a - \alpha_3 J)^2} d\eta. \quad (5)$$

Отсюда видно, что  $\langle i_- \rangle = 0$ . Для интенсивности рассеяния назад получаем

$$\langle t_-^2 \rangle = \alpha_1^2 \alpha_3^2 \lambda^2 e^{\int_0^L \frac{j_y^2 dy}{(a - \alpha_3 j)^2}}, \quad (6)$$

где  $\rho$  - масштаб корреляций, меньший длины волны  $\lambda$ . Из-за нелинейного искажения формы падающей волны (которое выразится в нарастающей  $j_y$ ) рассеянное поле более эффективно генерируется в конце слоя, чем в его начале. В результате интенсивность рассеяния назад при распространении мощного акустического сигнала превышает величину, известную из л. линейной теории. Нелинейность приводит также к изменению параметров среды для рассеянной волны. При этом, из-за взаимодействия с падающей волной, от ее интенсивности зависят время прихода фронта отраженной волны в точку наблюдения. Результат расчета для падающей волны определенной формы представлен на фиг. 2. Интенсивность рассеяния вперед вычисляется аналогично. Однако, поскольку рассеянная волна движется в поле падающей, ее интенсивность меняется и вне турбулентного слоя. В сущности, вне слоя распространяется одна интенсивная звуковая волна со случайными параметрами, удовлетворяющая уравнению (3) для  $j = j^*$  с граничным условием:  $j^*(L, t)$  - случайная функция с характерными значениями, определяемыми из Борновского приближения. Описание волны с помощью только одного уравнения первого порядка позволяет найти плотность вероятности волны за турбулентным слоем [6]. Для этого введем произвольную функцию  $\Phi(j)$ . С помощью (3) нетрудно получить уравнение для  $\langle \Phi \rangle$ , из которого после несложных преобразований имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j) dj \left\{ \frac{dW[j; x, t]}{dt} + a \frac{\partial W[j; x, t]}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial j} \left( j \int_{-\infty}^j \frac{\partial W[\xi; x, t]}{\partial x} d\xi \right) \right\} = 0. \quad (7)$$

Из-за произвольности функции  $\Phi(j)$  отсюда следует уравнение для плотности вероятности  $W$  интенсивной зву-

ктой волны, решение которого имеет вид [6]:

$$W[J; x, t] = W_0 \left[ J; t - \frac{x-L}{a} + \frac{\alpha_2 J (x-L)}{a^2} \right] - \frac{\alpha_2 x}{a^2} \int_J^{\infty} \frac{\partial W_0 \left[ \xi; t - \frac{x-L}{a} + \frac{\alpha_2 J (x-L)}{a^2} \right]}{\partial t} d\xi. \quad (8)$$

Здесь  $W_0$  - вероятностное распределение волны на выходе из слоя. Используя (8), можно найти все моменты волнового процесса  $\langle J^n(x, t) \rangle$ . В частности, если волна на выходе из слоя стационарна, то сохраняется одноточечная функция плотности вероятности  $W[J; x, t] = W_0[J]$  и все моменты волнового поля. Разумеется, на виде многоточечных вероятностных распределений нелинейность сказывается существенно. Уравнение для двухточечной плотности вероятности  $W_2 = W[J_1, J_2; t_1, t_2, x]$  находится аналогично (7) [6]:

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial W_2}{\partial t_1} + \frac{1}{a} \frac{\partial W_2}{\partial t_2} - \frac{\alpha_2}{a^2} \frac{\partial}{\partial J_1} \left[ J_1 \int_{-\infty}^{J_1} \frac{\partial W_2}{\partial t_1} d\xi \right] - \frac{\alpha_2}{a^2} \frac{\partial}{\partial J_2} \left[ J_2 \int_{-\infty}^{J_2} \frac{\partial W}{\partial t_2} d\xi \right] = 0.$$

Решение уравнения (9) позволяет определить корреляционную функцию случайной интенсивной волны и ее спектр. Для стационарного распределения длина корреляции на стадии простой волны не меняется, а спектр выражается формулой [7]:

$$S(\omega, x) = - \frac{\partial^2}{\partial \nu_1 \partial \nu_2} \theta_2[\nu_1, \nu_2; \omega, x] \Big|_{\nu_1 = \nu_2 = \omega}, \quad (10)$$

где  $\theta_2$  - Фурье-образ двумерной характеристической функции, определяемой через  $W_2$ . В качестве примера на фиг. 3 изображен спектр волны для фазовых флуктуаций распределенных по нормальному закону. Отметим, что для

нормальных распределений некоторые корреляционные функции и соответствующие им спектры можно получить и непосредственно из (3) [8-13].

На больших расстояниях от слоя звуковая волна переходит в ударную. Поскольку при сравнительно большом разбросе параметров волны нельзя разделить простые и ударные волны в пространстве [14], то необходимо оценить применимость формул, основанных на представлении решения в виде простой волны. Так как ударной волне формально соответствует многозначная простая волна, то средняя плотность ударных фронтов, связанных с числом точек "перехлеста" формы волны для нормального начального распределения меняется в пространстве по следующему закону (фиг. 4) [8].

$$q(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\langle J_{tt}^2 \rangle}{\langle J_t^2 \rangle}} \exp \left\{ \frac{-a^4}{2\alpha^2 \langle J_t^2 \rangle (x-L)^2} \right\}. \quad (11)$$

Характерный масштаб изменения  $q$  есть средняя длина образования ударной волны  $(\lambda a / \gamma)$  [14]. Следовательно, только на этих расстояниях и справедливо решение в виде простых волн. На больших расстояниях необходимо учитывать поглощение энергии на фронте ударной волны. Поскольку поглощение зависит от амплитуды, то в среднем интенсивность шумовой волны спадает быстрее с расстоянием, чем в отсутствие флуктуаций [14]. В частности, для узкополосного Гауссова сигнала зависимость энергии акустической ударной волны от расстояния изображена на фиг. 5. Отметим, что плотность ударных волн растет с расстоянием (фиг. 4).

Если размеры турбулентной области велики, то необходимо учитывать обратное влияние рассеяния на интенсивную волну. Наиболее просто это можно показать для случая  $\gamma = 3$ , когда падающая и отраженная волны не взаимодействуют между собой. При этом  $J^+$  описывается, согласно (1), уравнением со случайными коэффициентами ( $J = J^+$ )

$$\frac{\partial J}{\partial t} + (\alpha + \gamma) \frac{\partial J}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\delta a \gamma) = 0, \quad (12)$$

от которого, аналогично (9), можно перейти к кинетическому уравнению для плотности вероятности [7]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (a - \langle (\delta a)^2 \rangle) \frac{\partial W}{\partial x} - \ell \langle (\delta v)^2 \rangle \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial J} \left\{ J \int_0^J \frac{\partial W}{\partial x} dJ \right\} = 0. \quad (13)$$

Решение (13) представимо в виде

$$W[J; x, t] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t - \tau) w[J; x, \tau] d\tau, \quad (14)$$

где  $w$  — плотность вероятности нелинейной волны в однородной среде (см. (8)), а  $g$  — функция Грин уравнения теплопроводности:

$$g(x, t) = \left[ 4\ell \frac{\langle (\delta a)^2 \rangle}{x^4} \ell x \right]^{-1/2} \exp \left\{ - \frac{\left[ t - \frac{x}{a} - \frac{\langle (\delta a)^2 \rangle}{a^3} x \right]^2}{4\ell \langle (\delta a)^2 \rangle x / a^4} \right\} \quad (15)$$

Таким образом удается найти все моменты интенсивной волны, в частности можно показать, что среднее поле затухает из-за рассеяния. Этот же результат может быть получен с помощью известной процедуры замыкания уравнений для среднего поля (см., например, [3, 4]). Для этого воспользуемся разложением (2), где  $J(x, t) = J^+$  (в отличие от Борновского приближения) меняется из-за рассеяния. Уравнение для среднего поля малой, но конечной амплитуды имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial t} + a \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial x} + \alpha_2 \langle J \rangle \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial x} = - \langle \delta a \frac{\partial i_+}{\partial x} \rangle - \alpha_1 \alpha_2 \langle i_+ \frac{d\delta a}{dx} \rangle - \\ - \alpha_1 \alpha_3 \langle i_- \frac{d\delta a}{dx} \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Входящие в правую часть (16) рассеянные поля определяются системой уравнений (4), в которой пренебрегаем эллиптическими членами, и легко находятся

$$i_{\pm}(x, t) = \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial t} \int_0^x \frac{\delta a(y)}{a^2} dy - \alpha_1 \alpha_2 \langle J \rangle \frac{\delta}{a}, \quad (17)$$

$$i_-(x, t) = -\alpha_1 \alpha_2 \int_0^x \langle J(t + \frac{x}{a} - \frac{2y}{a}) \rangle \frac{d\delta a(y)}{dy} dy.$$

Решение (17) позволяет замкнуть уравнение для среднего поля, которое в общем случае является интегро-дифференциальным. Из (17) ясно, что интегральный оператор определяется только рассеянием назад. Если неоднородности мелкомасштабны, то уравнение (16) сводится к уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial \langle J \rangle}{\partial t} + \bar{a} \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial x} + 2\alpha_2 \langle J \rangle \frac{\partial \langle J \rangle}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \langle J \rangle}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

$$\mu = (1 + 4\alpha_1^2 \alpha_2^2) l \langle (\delta a)^2 \rangle / a.$$

Здесь  $\bar{a}$  - перенормированная скорость звука. Решение этого уравнения хорошо известно. В частности, если рассеяние невелико, то образуется ударная волна с шириной фронта порядка  $\mu / J$ . Отсюда следует, что флуктуации остаются мелкомасштабными в области ударного фронта лишь при малом уровне нелинейности  $\frac{J}{a} \ll \frac{\langle (\delta a)^2 \rangle}{a^2}$ ; при большей интенсивности необходимо анализировать исходное уравнение. В другом предельном случае крупномасштабных неоднородностей рассеянием назад, очевидно, можно пренебречь и среднее поле также описывается уравнением Бюргерса. Поскольку масштаб неоднородности велик, то затухание среднего поля значительно, так что в среднем ударная волна не образуется, хотя в каждой реализации формируется разрыв. Среднее поле в этом случае не является адекватной характеристикой нелинейности. Более точное описание здесь удается получить в рамках нелинейной геометрической акустики [15]. Можно показать, что на статистику интенсивности простой волны нелинейность не сказывается.

Выше мы ограничились изучением акустических волн в среде с пространственными флуктуациями. Если параметры среды меняются как в пространстве, так и во времени,



то возможен переход энергии от турбулентных движений в волну (ср. [16]). Из-за громоздкости здесь не приводится подробный вывод замкнутого уравнения для среднего поля. Отметим только, что для мелкомасштабных (в пространстве и во времени) неоднородностей среднее поле описывается уравнением Бюргерса с отрицательным коэффициентом турбулентной вязкости ( $\mu < 0$ ). Можно показать, что в решении такого уравнения за конечное время появляется особенность из-за параметрической неустойчивости волны, приводящей к "взрыву" поля [17]. Приведем здесь одно точное решение, описывающее "взрыв" волны (фиг. 6).

$$J(x,t) = \frac{J_0 e^{|\mu|k^2 t} \sin kx}{1 + \frac{J_0}{2k|\mu|} e^{|\mu|k^2 t} \cos kx} \quad (19)$$

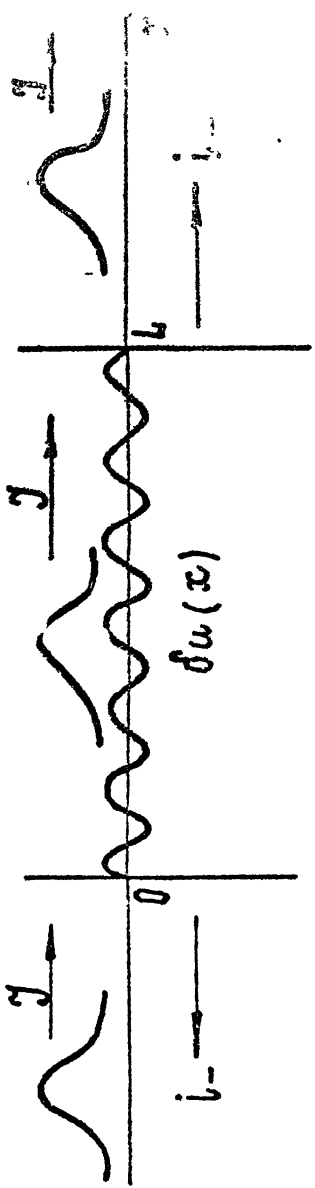
Это решение обращается в бесконечность за время  $t_v = [|\mu|k^2 J_0^2 / 4k^2]$ . В области "взрыва" необходимо учитывать факторы, приводящие к поглощению либо на высоких частотах, либо при больших амплитудах. При этом возможна стабилизация амплитуды акустической волны на определенном уровне.

В этом кратком обзоре нам представлялось существенным рассмотреть различные подходы к проблеме распространения интенсивных акустических сигналов в случайных средах с целью выработки единого взгляда и получения строгих результатов.

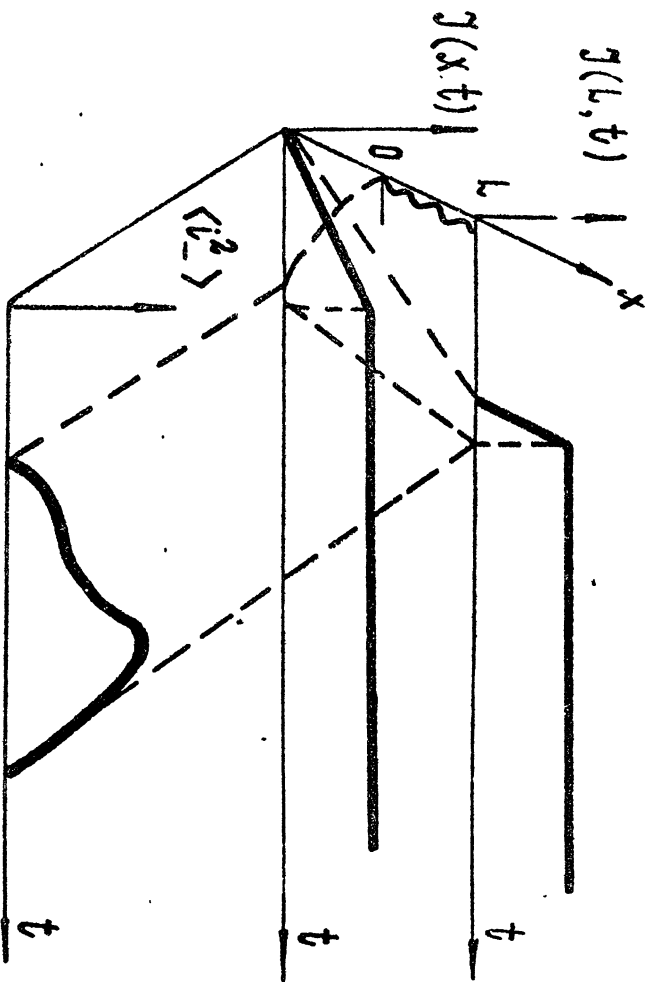
## ЛИТЕРАТУРА

1. A.D.Pierce, D.T.Magliery. JASA, 1972, 51, 702.
2. J.A.Scrimger, R.G.Turner. JASA, 1969, 46, 771.
3. A.G.George, K.J.Plotkin. J.Fl.Mech., 1973, 58, 461; Phys.Fl., 1971, 14, 548.
4. Е.Н.Пелиновский, А.И.Саячев, В.Е.Фридман. Акуст.ж., 1972, 18, 627, Радиофизика 1974, 17, 876.
5. Е.Н.Пелиновский, Тр. УШ Всесоюзной Акуст. конф., М., 1973.
6. А.Н.Малахов, А.И.Саячев. Радиофизика 1974, 17, 699, ЖЭТФ 1974, 67, 940.
7. А.И.Саячев. Радиофизика, 1974, 17, 1025.
8. В.П.Кузнецов, Акуст. ж., 1969, 15, 554; 1970, 16, 155.
9. О.В.Руденко, А.С.Чиркин. Акуст. ж., 1974, 20, 297; ЖЭТФ 1974, 67, 1903; ДАН 1974, 214, 1046.
10. В.А.Красильников, О.В.Руденко, А.С.Чиркин. Акуст.ж., 1975, 21, № 1.
11. Е.Н.Пелиновский. Радиофизика, 1976, 19, 2. Препринт НИРФИ, № 69, 1975.
12. A.Brissaud, U.Frisch et al. Ann.Geoph., 1973, 29, 539.
13. F.H.Fenlon. JASA, 1973, 53, 1752; 1974, 55, 35.
14. Е.Н.Пелиновский, В.Е.Фридман. Акуст.ж., 1972, 18, 590. Акуст.методы и средства исслед.океана. Владивосток, 1974. 1, 35.
15. Л.А.Островский, Е.Н.Пелиновский, В.Е.Фридман. Препринт НИРФИ № 74, 1975. Акуст. ж., (в печати).

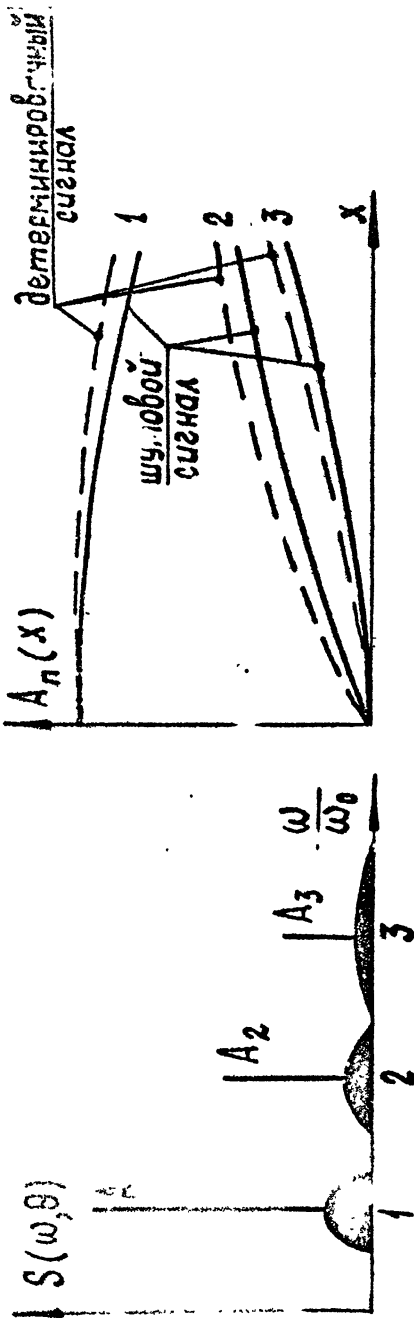
16. B.E. McGowan, L.A. Musak. Geoph.Fl.Dyn., 1973, 4, 243.
17. E.H. Пелиновский, В.Е. Фридман, ПММ 1974, 38, 991.



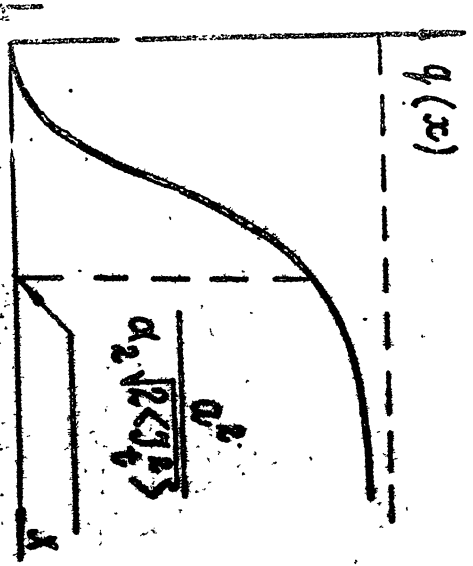
Фиг. 1



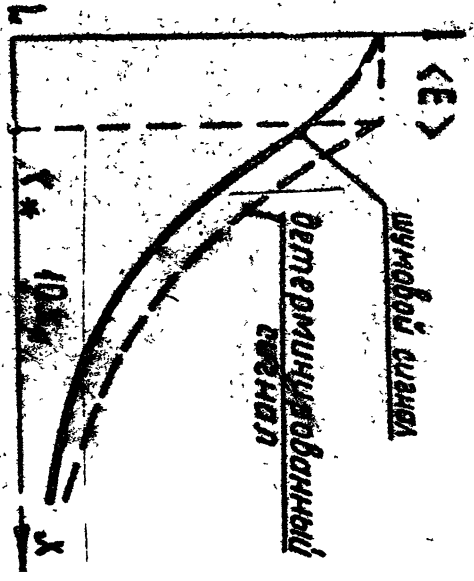
$\Phi_{u_2. 2}$



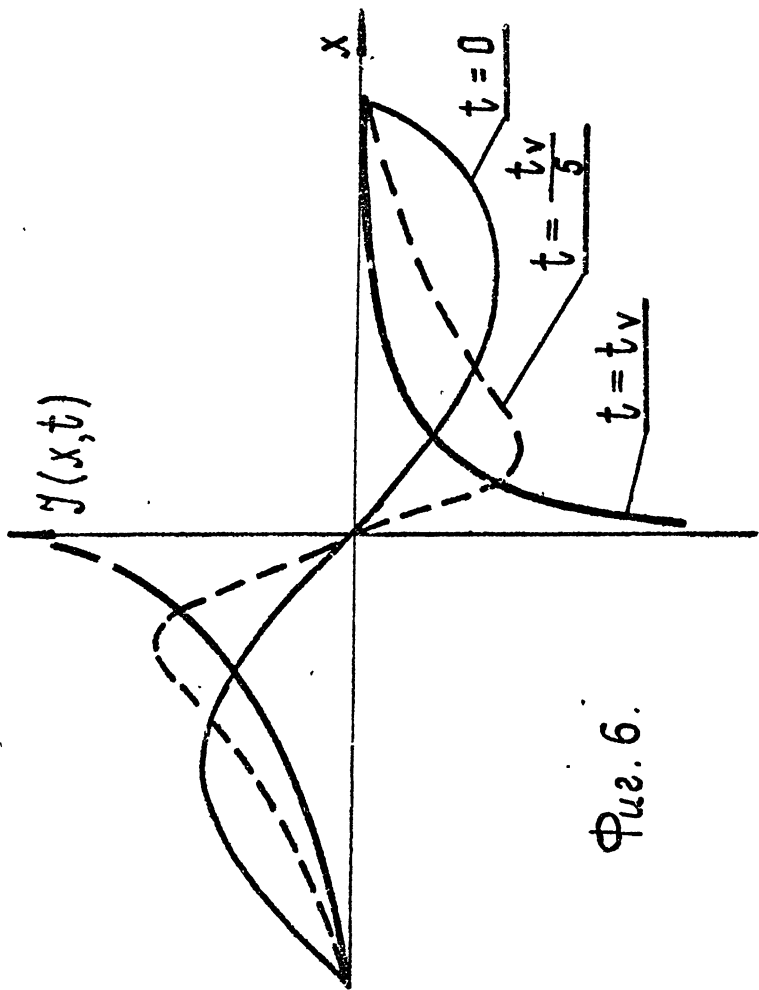
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6.