Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИФРИ)

Препринт № 88

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

З.Ф.Красильник

Горький – 1976 г.

А н н о т а ц и я

Обсуждаются условия генерации второй гармоники в зависимости от соотношений характерных длин линейного затухания, синхронизма и нелинейного взаимодействия волн в неравновесной среде.

Вырожденное взаимодействие волн хорошо изучено для некоторых типов неравновесных сред, в которых разность энергий волн в процессе взаимодействия сохраняется [1]. При этом удается отыскать первые интегралы и, следовательно, записать общие решения для амплитуд и фаз волн. В общем же случае обмен энергией между волнами и неравновесной средой носит достаточно сложный характер, так что найти закон сохранения в системе волн не представляется возможным. В качестве примера можно указать на взаимодействие акустоэлектронных волн в пьезополупроводниках [2,3], волн Толлмина–Шлихтинга в пограничном слое жидкости [4] и т.д. В настоящей работе приводятся некоторые общие для таких сред выводы об условиях генерации второй гармоники на основании качественного и аналитического рассмотрения уравнений для амплитуд и фаз волн, а также машинных экспериментов.

1. Качественный анализ взаимодействия

Система уравнений, описывающих вырожденное взаимодействие волн в стационарном ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) режиме, имеет следующий вид [5]:

$$\begin{cases} v_1 \dfrac{dU_1}{dx} = -\alpha_1 U_1 + \beta_1 e^{i\psi} U_1^* U_2 e^{-i\Delta k x} \\ v_2 \dfrac{dU_2}{dx} = -\alpha_2 U_2 + \beta_2 U_1^2 e^{i\Delta k x} \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $v_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ – соответственно групповые скорости, линейные декременты и модули коэффициентов нелинейного взаимодействия на основной (ω) и удвоенной (2ω) частотах; $\Delta K = K_2 - 2K_1$ – расстройка волновых векторов гармоники $K_2(2\omega)$ и волны основной частоты $K_1(\omega)$; ψ – суммарная фаза коэффициентов нелинейного взаимодействия (в консервативных средах $\psi = \pi$ [6]).

Введем переменные $a_1 = |u_1| \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{v_1 v_2} \right)^{1/2}$, $a_2 = |u_2| \frac{\beta}{v_1}$, тогда при $\alpha_{1,2} = \Delta K = 0$ система (1) перепишется в виде:

$$\frac{da_1}{dx} = a_1 a_2 \cos(\theta + \psi)$$
$$\frac{da_2}{dx} = a_1^2 \cos\theta \qquad (2)$$
$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{a_1^2}{a_2} \sin\theta - 2a_2 \sin(\theta + \psi), \quad \theta = \arg u_2 - 2\arg u_1$$

Известно частное решение системы (2) [4], "взрывающееся на конечном расстоянии X^*:

$$a_1 = (X^* - X)^{-1} (\cos\theta^* \cos(\theta^* + \psi))^{-1/2}, \quad a_2 = (X^* - X)^{-1} (\cos(\theta^* + \psi))^{-1} \qquad (3)$$

где θ^* определяется из соотношений

$$\operatorname{tg}\theta^* + 2\operatorname{tg}(\theta^* + \psi) = 0, \quad \cos(\theta^* + \psi) > 0 \qquad (4)$$

а X^* – из граничных условий.

Покажем, что на достаточно больших расстояниях амплитуды $a_{1,2}$ растут взрывным образом при произвольных граничных условиях $a_1(X=0) > 0$, $a_2(X=0) \geqslant 0$, а фаза θ в области "взрыва" близка к стационарному значению θ^* – см. (4).

Исследуем топологию пространства $\Omega(a_1, a_2, \theta)$ в области значений $0 \leqslant a_{1,2} < \infty$, $|\theta| \leqslant \pi$ (легко убедиться, что траектории в пространстве Ω периодичны по θ с периодом 2π). Трехмерную картину траекторий будем строить, исходя из вида сечений Ω плоскостями $a_{1,2} = a_{1,2}^0$, $\theta = \theta^0$, где $a_{1,2}^0$ и θ^0 –

произвольные константы.

Качественный вид сечения $\theta = \theta_0$ изображен на рис. 1. Значения a_1 и a_2 на плоскости (a_1, a_2) связаны уравнением

$$a_1^2 \cos\theta^0 = a_2^2 \cos(\theta^0 + \psi) + const \qquad (5)$$

Устойчивость состояний равновесия на прямой $a_1 = 0$ зависит от соотношения θ^0 и ψ.

Сечения $a_{1,2} = a_{1,2}^0$ носят более сложный характер. Исследуем их для различных значений ψ.

а) $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Качественный вид сечений $a_1 = a_1^0$, $a_2 = a_2^0$ изображен на рис 2а,б. На плоскостях (θ, a_1) и (θ, a_2) имеются по два состояния равновесия типа седло в точках $\theta = n\pi - \psi$, $a_1 = 0$ и $\theta = n\pi$, $a_2 = 0$ соответственно (здесь $n = 0, 1$). При достаточно больших значениях $a_1 \gg a_2^0$ и $a_2 \gg a_1^0$ сепаратрисы сёдел приближаются к изоклинам горизонтальных касательных $a_1^2 \sin\theta + 2a_2^2 \sin(\theta + \psi) = 0$ на плоскостях $a_{1,2} = a_{1,2}^0$. В области малых значений амплитуд $0 < a_1 \ll a_2^0$; $0 < a_2 \ll a_1^0$ производные $\frac{d\theta}{da_{1,2}}(a_{2,1} = a_{2,1}^0) \gg 1$, так что в пространстве Ω траектории, приближаясь к плоскости $a_1 = 0$ (либо $a_2 = 0$), достаточно быстро переходят в слой θ, где амплитуда a_1 (либо a_2) уже нарастает. Таким образом, при любых граничных значениях $a_1(X = 0) > 0$, $a_2(X = 0) \geqslant 0$ амплитуды в дальнейшем остаются положительными.

Из вида сечений $a_{1,2} = a_{1,2}^0$ следует, что все траектории входятся в слой $-\psi < \theta < 0$, причем амплитуды $a_{1,2}$ в этом слое нарастают одновременно – см. (5), рис. 1а. При достаточно больших значениях $a_{1,2}$ траектории сколь угодно близко приближаются к поверхности горизонтальных изоклин $\Gamma = a_1^2 \sin\theta + 2a_2^2 \sin(\theta + \psi) = 0$; $(-\psi < \theta < 0)$, одновременно сближаясь между собой (рис. 3а). Следовательно, траектории приближаются к линии пересечения поверхностей $\Gamma(a_1, a_2, -\psi \; \theta < 0) = 0$ и плоскости $\theta = \theta^*$, соответствующей решению (3) системы (2).

Таким образом, можно заключить, что в области больших значений $a_{1,2}$ разность фаз волн стремится к стационарному значению θ^*. Волны $a_{1,2}$ при этом нарастают взрывным образом: $a_{1,2} \sim (X^* - \overset{\circ}{X})^{-1}$.

В пространстве Ω на расстояниях $\theta = \pm\pi$ от $\Gamma = 0$ расположены аналогичные поверхности горизонтальных изоклин $\Gamma_1 = \Gamma(\theta + \pi) = 0$ и $\Gamma_2 = \Gamma(\theta - \pi) = 0$. Топология траекторий вблизи этих поверхностей идентична описанной выше с точностью до смены направления движения на обратное. В целом траектории в пространстве Ω периодичны по θ с периодом 2π.

б) $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$. При переходе ψ через $\pi/2$ в сечениях $a_1 = a_1^0$ и $a_2 = a_2^0$ появляются пары новых состояний равновесия с координатами $\xi_{1,2}\left(\pm\frac{\pi}{2} - \psi, a_2^0\sqrt{-\frac{2}{\cos\psi}}\right)$ на плоскости (θ, a_1) и $\xi_{3,4}\left(\mp\frac{\pi}{2}, a_1^0\sqrt{-\frac{1}{2\cos\psi}}\right)$ на плоскости (θ, a_2). При $\frac{\pi}{2} < \psi < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\xi_{1,3}$ – устойчивые, а $\xi_{2,4}$ – неустойчивые узлы. При переходе ψ через значение $\psi_1 = \arccos(-1/3)$ узлы на плоскости (θ, a_2) трансформируются в фокусы с тем же характером устойчивости. Аналогичная трансформация происходит и с состояниями равновесия $\xi_{1,2}$ на плоскости (θ, a_1) при переходе ψ через значение $\psi_2 = \arccos(-1/\sqrt{5})$. Таким образом, при $\psi_2 < \psi < \pi$ все четыре состояния равновесия ξ_i – фокусы, причем $\xi_{1,3}$ – устойчивые, а $\xi_{2,4}$ – неустойчивые – рис.2в,г.

Фазовый портрет системы (2) вблизи поверхности $\Gamma = 0$ при $\psi_2 < \psi < \pi$ изображен на рис. 3б. Как и в случае малых ψ (п. 1,а), при $a_{1,2} \to \infty$ траектории сколь угодно близко приближаются к кривой l_1, соответствующей решению (3), так что разность фаз взаимодействующих волн выходит на стационарное значение θ, а амплитуды нарастают взрывным образом.

На расстояниях $\theta_{1,2}(a_1, a_2) = \theta(a_1, a_2) \pm \pi$ от изображенных траекторий $^{1,2}\theta(a_1, a_2)$ расположены идентичные траектории с обратным направлением движения.

При замене ψ на $-\psi$ траектории, изображенные на рис. 3, 4, зеркально отображаются относительно плоскости $\theta = 0$ со сменой направления движения на обратное.

Таким образом, качественный анализ пространства Ω при $|\psi|<\pi$ позволяет сделать вывод о том, что при любых граничных значениях $a_1(x=0)>0$, $a_2(x=0)\geq 0$, $|\theta|\leq\pi$ волны $a_{1,2}$ в конечном итоге "взрываются", причем в области "взрыва" разность фаз θ близка к стационарному значению θ^*. Распределение амплитуд $a_{1,2}(x)$ и длина области "взрыва" x^* существенным образом зависят от фазы ψ, коэффициентов нелинейного взаимодействия и граничных условий.

При $|\psi|=\pi$ система (2) консервативна и легко интегрируется [6]. Первый интеграл имеет вид $a_1^2+a_2^2=const$, так что амплитуды $a_{1,2}$ всюду органичены.

2. Генерация второй гармоники. Аналитические и численные решения.

Приведем некоторые решения системы (1) с граничными условиями

$$u_1(x=0)=u_0,\quad u_2(x=0)=0 \qquad (6)$$

соответствующими задаче о генерации второй гармоники. В области малых значений ψ ($|\psi|\ll 1$), при $\Delta k=\alpha_{1,2}=0$ решение системы (1) с граничными условиями (6) имеет вид+)

$$\begin{cases} u_1=u_0\sec z\left(1-\dfrac{5\psi^2}{36}\right) \\ u_2=u_0\left(1-\dfrac{\psi^2}{12}\right)\operatorname{tg} z\left(1-\dfrac{5\psi^2}{36}\right),\ \theta=-\dfrac{2\psi}{3} \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь $z=u_0x\sqrt{\dfrac{\beta_1\beta_2}{v_1v_2}}$. Волны $a_{1,2}$ растут одновременно и "взрываются" на расстоянии $z^*=\dfrac{\pi}{2}\left(1+\dfrac{5\psi^2}{36}\right)$. Численное решение системы (1) при $\Delta k=\alpha_{1,2}=0$ и $0\leq|\psi|<\pi$ приведено на рис. 4. Как отмечалось, рас-

+) Решение (7) совпадает с известным [1] для $\psi=0$.

пределения $u_{1,2}(X)$ существенным образом зависят от ψ . Волны "взрываются" на меньшей длине, если уже в области возбуждения $0 < z \ll \frac{\pi}{2}$ накачка растет в поле гармоники (рис. 4а): $u_1 = u_0\left(1 + \frac{z^2}{2}\cos\psi\right)$, так что $\Delta u = u_1(z) - u_0 > 0$ при $|\psi| < \frac{\pi}{2}$. При $\frac{\pi}{2} < |\psi| < \pi$ можно выделить две характерные стадии взаимодействия. На начальной стадии $0 < z < z_1$ имеет место частичная перекачка энергии между волнами, на конечной $z_1 < z < z^*$ стадии волны растут одновременно и "взрываются". При этом размеры начальной области z_1 могут значительно превысить область одновременного роста амплитуд $z^* - z_1 \sim \frac{\pi}{2}$ – рис. 4 б.

Рассинхронизм увеличивает длину "взрыва" волн, и при достаточно малых значениях $u_{1,2}(X=0)$ +) может оказаться, что решение (1) всюду ограничено. Жесткое возбуждение взрывной неустойчивости может быть связано и с линейной диссипацией волн. Например, при одинаковых декрементах ++) $\frac{\alpha_{1,2}}{v_{1,2}} = \delta$, $\Delta k = 0$ накачка и генерируемая вторая гармоника "взрываются" на расстоянии $x^*(\delta,\psi) = -\frac{1}{\delta}\ln\left(1 - \frac{\delta}{u_0}\sqrt{\frac{v_1 v_2}{\beta_1\beta_2}}\, z^*(\psi)\right)$, где $z^*(\psi)$ – зависимость длины "взрыва" от ψ при $\delta = 0$ – рис. 5 , а порог, соответственно, определяется из условия $u_{0,\text{пор}} = \delta z^*(\psi)\sqrt{\frac{v_1 v_2}{\beta_1\beta_2}}$. Кривая $z^*(\psi)$ хорошо аппроксимируется выражением $z_1^* = \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}\frac{|\psi|}{2}$ с точностью $\left|\frac{z^* - z_1^*}{z^*}\right| < 0{,}08$.

При $\delta < 0$ порог, разумеется, отсутствует, а длина "взрыва" значительно уменьшается с ростом инкремента волн.

Изложенные в работе результаты свидетельствуют о

+) Так, при $\alpha_{1,2} = \psi = 0$ накачка и генерируемая вторая гармоника всюду ограничены, если $u_0 < \frac{|\Delta k|}{12}\left(\frac{v_1 v_2}{\beta_1\beta_2}\right)^{1/2}$ [1].

++) В случае равенства линейных инкрементов (декрементов) волн система (1) при $\Delta k = 0$ сводится к (2) заменой переменных $a_1 = e^{\delta x}|u_1|\left(\frac{\beta_1\beta_2}{v_1 v_2}\right)^{1/2}$, $a_2 = e^{\delta x}|u_2|\frac{\beta_1}{v_1}$, $x' = -\frac{1}{\delta}\ln(1 - x\delta)$.

взрывном характере взаимодействия волн основной и удвоенной частот в неравновесной среде.

В условиях полного синхронизма и отсутствии линейной диссипации гармоника и основная волна "взрываются" при произвольных граничных условиях $U_1(X=0)>0$, $U_2(X=0)>0$. Распределения $U_{1,2}(X)$ могут быть качественно различными в зависимости от соотношения фаз коэффициентов нелинейного взаимодействия. Бифуркационные значения ψ следующие: $\pm\frac{\pi}{2}$, $\arccos(-\frac{1}{3})$, $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$, π. В работе приведены аналитические выражения $U_{1,2}(X)$ для малых значений $|\psi|\ll 1$ и численные решения для $|\psi| < 165^{\circ}$.

Жесткий режим возбуждения взрывной неустойчивости может быть связан как с линейной диссипацией, так и с рассинхронизмом волн. Например, при $\frac{\alpha_{1,2}}{V_g}=\delta$, $\Delta K=0$ $U_{\theta,\text{пор}}$ определяется из выражения: $U_{\theta,\text{пор}}=\delta\left(\frac{V_1V_2}{\beta_1\beta_2}\right)^{1/2}Z^*(\psi)$, где $Z^*(\psi)$ – зависимость длины взрыва от суммарной фазы коэффициентов нелинейного взаимодействия в отсутствии линейной диссипации волн.

Как правило, параметры ψ, $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, ΔK одновременно зависят от внешних источников, поддерживающих неравновесность среды. В условиях взаимосвязанности указанных величин поиск оптимальных режимов генерации чрезвычайно затруднен. При выяснении главных факторов, определяющих характер усиления волн, представляются полезными приведенные в работе обсуждения и оценки для некоторых соотношений длин линейного усиления (затухания), синхронизма и нелинейного взаимодействия волн.

К примеру, в пьезополупроводниках параметры ψ $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ и ΔK меняются в широких пределах при различных значениях скорости дрейфа электронов V_d. Так, фаза ψ убывает от π до малых значений с ростом $\gamma=\frac{V_d}{V_s}-1$ от 0 до $\gamma\gg 1$ [3] (здесь V_s – скорость звука). Генерация акустической гармоники наиболее эффективна в области значений $\gamma\sim 4{,}2\frac{\omega_c}{\omega}$, $a=\frac{\omega^2}{\omega_c\omega_d}\sim 3$, где ω, ω_c и ω_d – соответственно частота волны накачки, максвелловская и диффузионная частота.

При этом линейные инкременты волн и модули коэффициентов нелинейного взаимодействия близки к своим максимальным значениям, а фаза $\psi \sim 48^{\circ}$.

Автор благодарен Е.Н.Пелиновскому и М.И.Рабиновичу за обсуждение работы

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Фазовый портрет сечения $\theta = \theta^*$.
а) $-x, y > 0$; б) $-x > 0, y < 0$
в) $-x < 0, y > 0$; г) $x, y < 0$
где $x = \cos^2(\theta^* + \psi)$, $y = \cos^2\theta^*$.

Рис. 2. Фазовый портрет сечений $a_1 = a_1^0$ и $a_2 = a_2^0$ при $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ (а и б) и $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}}) < \psi < \pi$ (в и г);
1 – изоклины горизонтальных касательных,
2 – изоклины вертикальных касательных.

Рис. 3. Траектории в пространстве $\Omega(a_1, a_2, \theta)$ вблизи поверхности горизонтальных изоклин $\Gamma(a_1, a_2, -\psi < \theta < 0) = 0$ при:
а) $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ и б) $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}}) < \psi < \pi$.
На поверхность нанесена сетка. Кривые l_1, l_2, l_3 – пересечение поверхности $\Gamma = 0$ с плоскостями $\theta = \theta^*$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$.

Рис. 4. Распределение волн $u_{1,2}(z)$ при различных значениях суммарной фазы ψ коэффициентов нелинейного взаимодействия:
а) 1 – $u_{1,0}$, 2 – $u_{2,0}$ при $\psi = 0$; 3 – $u_{1,0}$, 4 – $u_{2,0}$ при $|\psi| = 60^\circ$, 5 – $u_{1,0}$, 6 – $u_{2,0}$ при $|\psi| = 90^\circ$;
б) 1 – $u_{1,0}$, 2 – $u_{2,0}$ при $|\psi| = 120^\circ$; 3 – $u_{1,0}$, 4 – $u_{2,0}$ при $|\psi| = 150^\circ$, 5 – $u_{1,0}$, 6 – $u_{2,0}$ при $|\psi| = 179^\circ 30'$.
Здесь $u_{1,0} = u_1/u_0$, $u_{2,0} = u_2/u_0$

Рис. 5. Зависимость длины взрыва z^* от $|\psi|$

ЛИТЕРАТУРА

1. М.И.Рабинович. В.П.Реутов. Изв. ВУЗов. "Радиофизика", 16, 815, 1973.
2. H.Kroger. Appl.Phys.Lett., 4, 190, 1964.
3. З.Ф.Красильник. ФТП, в печати.
4. A.D.Craik. J.Fluid.Mech., 50, 393, 1971.
5. М.И.Рабинович, А.Л.Фабрикант. Изв. ВУЗов, "Радиофизика", 19, 1976.
6. Н.Бломберген. Нелинейная оптика. "Мир", М., 1962.

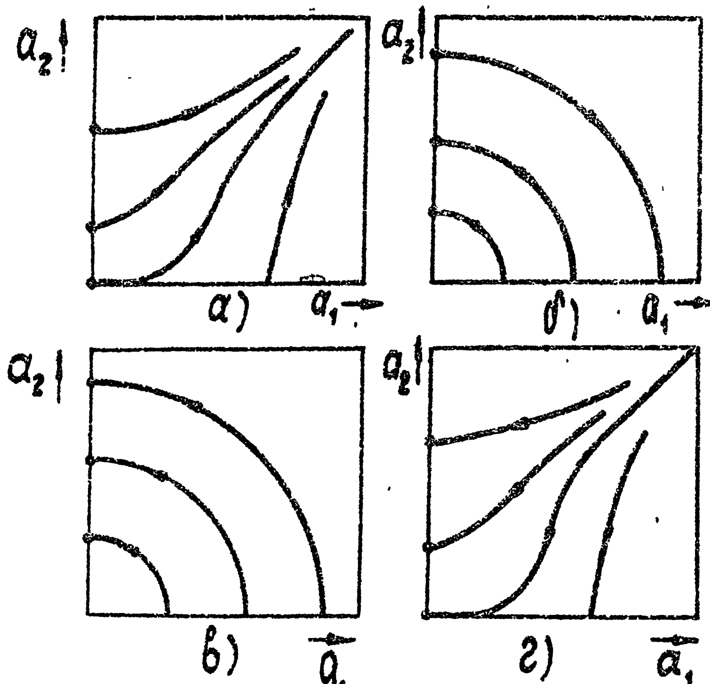


Рис. 1

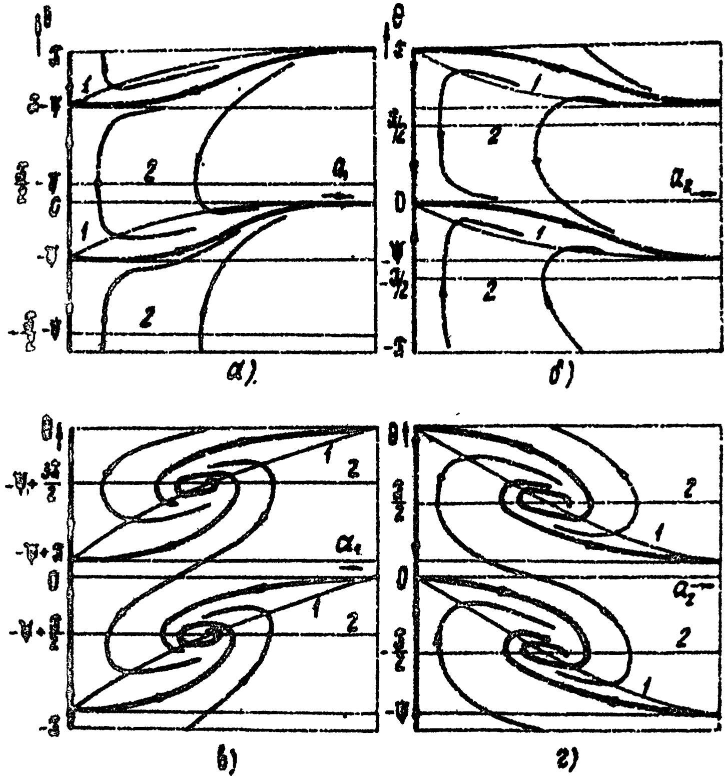
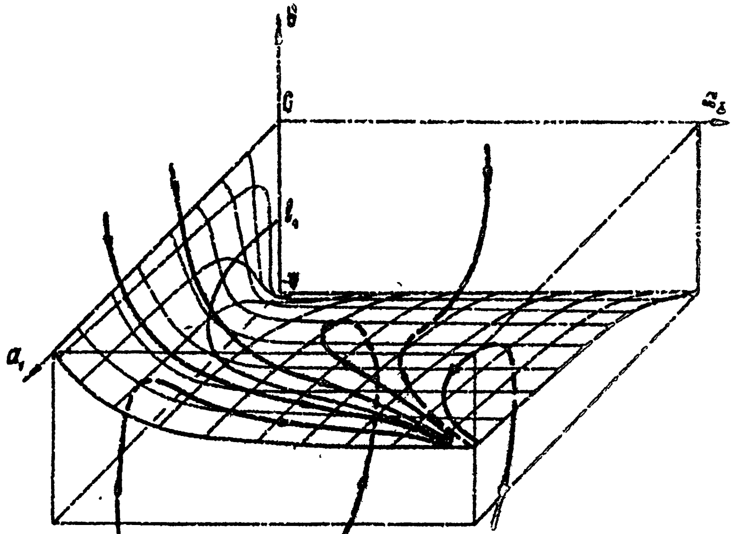
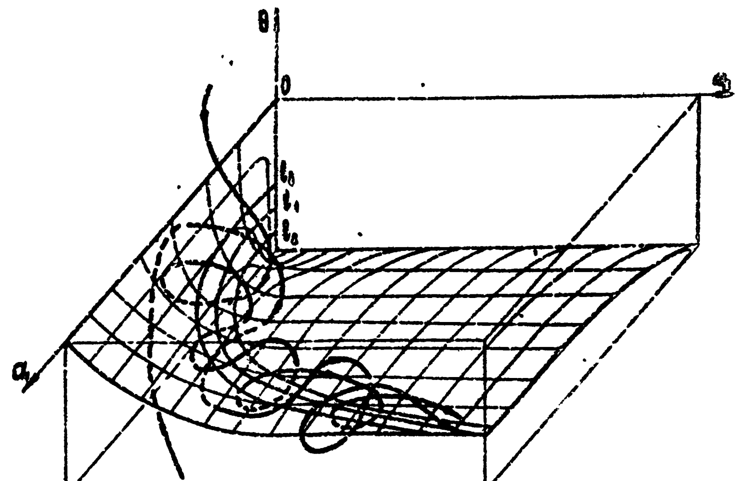


Рис. 2.

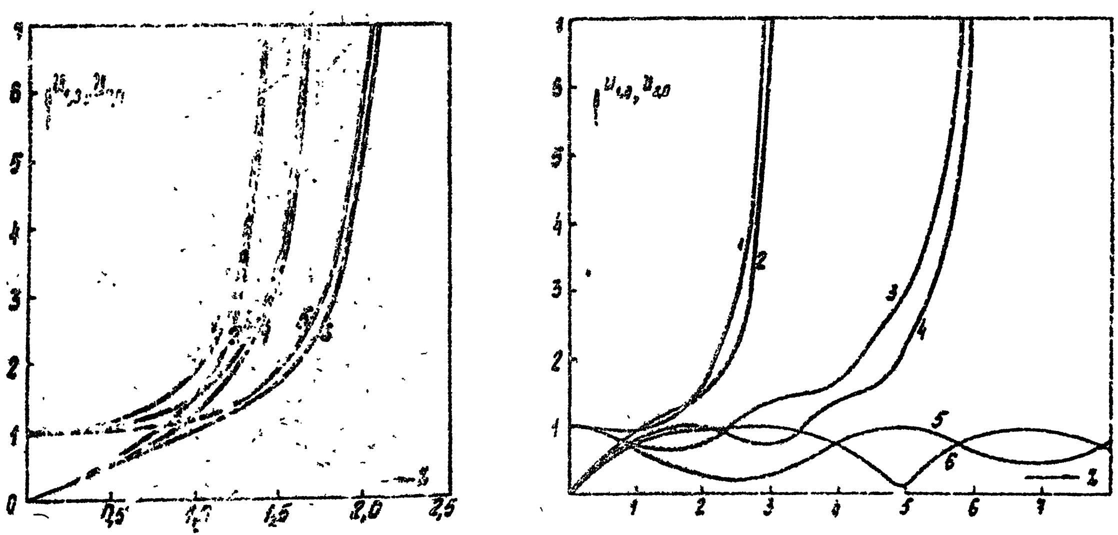


а)



б).

рис. 3



а)   б)

Рис. 4.

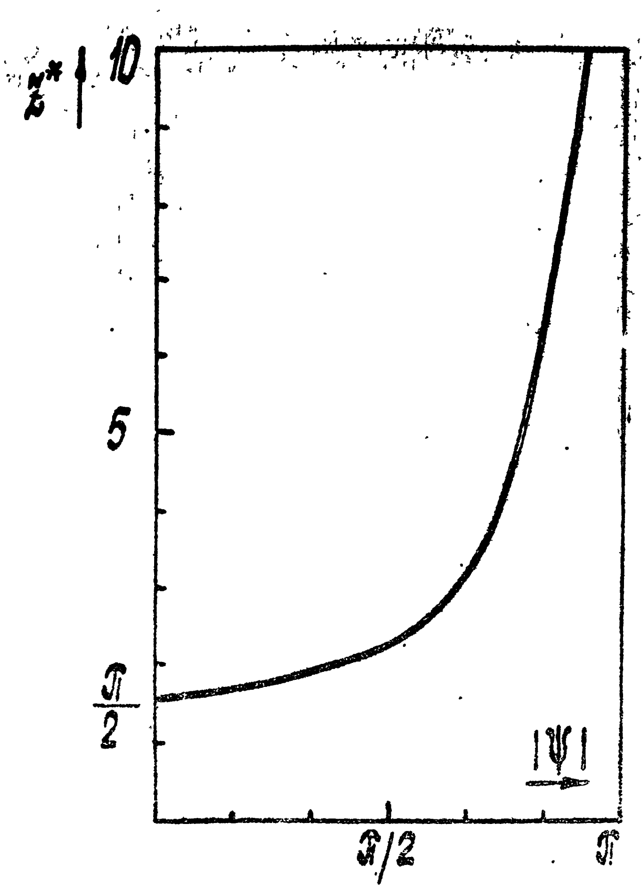


Рис. 5