Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 94

МЕТОД МОНОТОННОСТИ И ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Я.И.Альбер

Горький – 1976

А н н о т а ц и я

Исследуется операторный метод регуляризации в задаче приближенного и устойчивого вычисления значения монотонного (аккретивного) нелинейного неограниченного оператора. Рассматриваются случаи, когда оператор определен на гильбертовых и банаховых пространствах, а также на линейных плотных множествах в этих пространствах.

Задача вычисления значения

$$x_0 = A y_0 \qquad (1)$$

неограниченного нелинейного оператора $A : Y \to X$, где X, Y – банаховы пространства, относится к классу неустойчивых задач. Ее исследованию посвящена обширная литература (см., например, [1–7]). В качестве приближенных методов предложены и изучены методы регуляризации, невязки и квазирешений. Все эти методы являются вариационными и сводятся к задачам минимизации соответствующих функционалов на ограниченных или неограниченных множествах. В настоящей заметке для решения задачи (1) предлагается операторный метод регуляризации, приводящий к решению операторных уравнений в исходном банаховом пространстве+). В отличие от вариационных методов операторный метод позволяет использовать свойство монотонности при доказательстве теорем существования и сходимости и получить оценки, подобные тем, которые раньше были известны только в случае линейного оператора в гильбертовом пространстве++).

+) В идейном отношении этот метод соответствует методу регуляризации А.Н.Тихонова нулевого порядка (1) (см.также [5]).

++) Заметим, что если оператор A монотонный, то функционал $\Phi(y)=\|Ay-x\|^{\alpha}, \alpha > 1$, входящий в описание вариационных методов, не является, вообще говоря, выпуклым, а его производная Фреше – монотонным отображением.

Пусть B -банахово пространство, B^* - ему сопряженное. Множество $G \in B \times B^*$ называется монотонным, если для любой пары элементов $\{y_1, x_1\}$ и $\{y_2, x_2\}$ из G выполняется соотношение $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \geq 0$ и максимальным монотонным (м.м.), если оно не является правильной частью никакого другого монотонного множества из $B \times B^*$. Оператор A с областью определения $D(A) \subseteq B$ и областью значений $R(A) \subseteq B^*$ называется монотонным (м.м.), если его график $G(A)$ - монотонное (м.м.) множество; деминепрерывным, если для любой последовательности y_n, сильно сходящейся к y ($y_n \to y$, y_n, $y \in D(A)$) соответствующие значения Ay_n слабо сходятся к Ay ($Ay_n \rightharpoonup Ay$); хеминепрерывным, если для любых y_1 и y_2, таких что $y_1 + \lambda y_2 \in D(A)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, последовательность $A(y_1 + \lambda y_2) \rightharpoonup Ay_1$ при $\lambda \to 0$. Ясно, что из деминепрерывности следует хеминепрерывность. Обратное также имеет место, если $D(A)$ - открытое или линейное плотное множество в B [8].

Предположим, что y_0 существует, оператор A - монотонный, однозначный и хеминепрерывный, а вместо y_0 задано y_δ такое, что $\|y_\delta - y_0\| \leq \delta$, $\delta \geq 0$. Необходимо построить последовательность $x^\delta \to x_0$, $\delta \to 0$+). Рассмотрим отдельно несколько случаев.

1. Оператор задан в гильбертовом пространстве H. Поставим в соответствие уравнению (1) операторное уравнение

$$y_\alpha^\delta + \alpha A y_\alpha^\delta = y_\delta \quad , \quad \alpha > 0 \qquad (2)$$

и установим связь $\alpha = \alpha(\delta)$, при которой $Ay_\alpha^\delta \to x_0$, когда $\lim\limits_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$. Легко проверить, что решение уравнения (2) существует и единственно при любой правой части y_δ [8]. Введем промежуточное уравнение, соответствующее точному значению y_0:

+) Многие результаты, изложенные ниже, будут справедливыми, если предположить, что A является максимальным (возможно многозначным) оператором.

$$y_\alpha^0 + \alpha A y_\alpha^0 = y_0 , \quad \alpha > 0 . \qquad (3)$$

Вследствие монотонности оператора A

$$(Ay - Ay_0 , y - y_0) \geq 0 , \quad \forall y \in H \qquad (4)$$

Положим $y = y_\alpha^0$. Тогда в силу (3)

$$(Ay_\alpha^0 - Ay_0 , y_\alpha^0 - y_0) = -\alpha (Ay_\alpha^0 - Ay_0 , Ay_\alpha^0) \geq 0 \qquad (5)$$

Отсюда следует оценке

$$\| Ay_\alpha^0 \| \leq \| x_0 \| \qquad (6)$$

Далее, используя последнее неравенство, стандартными рассуждениями [9] доказываем, что при $\alpha \to 0$ $Ay_\alpha^0 \rightharpoonup \bar{x}$, где $\bar{x}$ – одна из предельных точек последовательности Ay_α^0. С другой стороны, $\| y_\alpha^0 - y_0 \| = \alpha \| Ay_\alpha^0 \| \to 0$, $\alpha \to 0$. Покажем, что $Ay_0 = \bar{x}$. Пусть $y = y_0 + tv$, где v – произвольный элемент пространства H , а $t > 0$ – числовой параметр. Имеем: $(Ay_\alpha^0 - A(y_0 + tv), y_\alpha^0 - y_0 - tv) = (Ay_\alpha^0, y_\alpha^0 - y_0) - t(Ay_\alpha^0, v) - (A(y_0+tv), y_\alpha^0 - y_0 - tv) \geq 0$. Пусть вначале $\alpha \to 0$, тогда $(A(y_0 + tv) - \bar{x}, v) \geq 0$. Поскольку A хеминепрерывен, то устремляя теперь $t \to 0$, получаем $(Ay_0 - \bar{x}, v) \geq 0$ для любого $v \in H$, что равносильно соотношению $Ay_0 = \bar{x}$. В силу однозначности оператора A $\bar{x} = x_0$. Итак, мы доказали слабую сходимость

$$Ay_\alpha^0 \rightharpoonup x_0 , \quad \alpha \to 0 . \qquad (7)$$

В пространстве H $\| Ay_\alpha^0 - x_0 \|^2 = (Ay_\alpha^0 , Ay_\alpha^0 - x_0) - (x_0 , Ay_\alpha^0 - x_0)$.

Это равенство в силу (5) и (6) дает: $\lim\limits_{\alpha \to 0} Ay_\alpha^0 = x_0$.

Далее проведем следующие оценки:

$$\| Ay_\alpha^\delta - x_0 \| \leq \| Ay_\alpha^\delta - Ay_\alpha^0 \| + \| Ay_\alpha^0 - x_0 \| ,$$

$$\| Ay_\alpha^\delta - Ay_\alpha^0 \| \leq \alpha^{-1} (\| y_\delta - y_0 \| + \| y_\alpha^\delta - y_\alpha^0 \|) .$$

Из (2) и (3), используя монотонность A, получаем $\|y_\alpha^\delta - y_\alpha^0\| \leq \delta$, в то время как

$$\|y_\alpha^\delta - y_0\| \leq \delta + \alpha\|x_0\| . \qquad (8)$$

Значит, $y_\alpha^\delta \to y_0$, когда $\alpha, \delta \to 0$ произвольным образом. Это же условие обеспечивает слабую сходимость $Ay_\alpha^\delta \rightharpoonup x_0$. Наконец, $\|Ay_\alpha^\delta - Ay_\alpha^0\| \leq 2\delta/\alpha$. Если $\delta/\alpha \to 0$ при $\alpha \to 0$, то $Ay_\alpha^\delta \to x_0$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть выполнены условия настоящего n^0. Для того, чтобы последовательность Ay_α^δ, где y_α^δ – решения уравнения (2), сильно (слабо) сходилась к $x_0 = Ay_0$, достаточно, чтобы $\frac{\delta}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$ $(\delta \to 0, \alpha \to 0)$. При $\delta = 0$ имеет место оценка $\|Ay_\alpha^0\| \leq \|x_0\|$.

Следствие 1. Пусть $Ay_\alpha^\delta \to x_0$ при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$ и $\|y_\delta - y_0\| \leq \delta$. Тогда $x_0 = Ay_0$.

Предыдущие утверждения можно переформулировать следующим образом.

Следствие 2. Для того, чтобы Ay_α^δ, $\delta \geq 0$, где y_α^δ – решения уравнения (2) и $\|y_\delta - y_0\| \leq \delta$, сходились при $\frac{\delta}{\alpha} \to 0$, $\alpha \to 0$ к некоторому $x_0 \in H$, необходимо и достаточно, чтобы $x_0 = Ay_0$.

Интересно выяснить поведение функции $\sigma(\alpha) = \|y_\alpha^\delta - y_\delta\|$ и $\rho(\alpha) = \|Ay_\alpha^\delta\|$ на интервале $\alpha \in [\alpha_0, \infty)$ при фиксированном $\delta \geq 0$. Обозначим $x_\alpha^\delta = Ay_\alpha^\delta$. Прежде всего, функция $\rho(\alpha)$ ограничена, так как

$$\|x_\alpha^\delta\| \leq \|x_0\| + 2\delta\alpha_0^{-1}$$

Далее, $\rho(\alpha)$ непрерывно, что проверяется аналогично [9]. Из равенства $\sigma(\alpha) = \alpha\rho(\alpha)$ следует, что $\sigma(\alpha)$ также непрерывна при $\alpha_0 \leq \alpha \leq \infty$. Пусть теперь $\alpha_2 > \alpha_1$. Очевидно

$$(x_{\alpha_1}^\delta - x_{\alpha_2}^\delta, y_{\alpha_1}^\delta - y_{\alpha_2}^\delta) + (x_{\alpha_1}^\delta - x_{\alpha_2}^\delta, \alpha_1 x_{\alpha_1}^\delta - \alpha_2 x_{\alpha_2}^\delta) = 0$$

Отсюда

$$\alpha_1(x_{\alpha_1}^\delta, x_{\alpha_1}^\delta - x_{\alpha_2}^\delta) \leq \alpha_2(x_{\alpha_2}^\delta, x_{\alpha_1}^\delta - x_{\alpha_2}^\delta),$$

$$\alpha_1 \| x^\delta_{\alpha_1} - x^\delta_{\alpha_2} \|^2 \leqslant (\alpha_2 - \alpha_1)(x^\delta_{\alpha_2}, x^\delta_{\alpha_1} - x^\delta_{\alpha_2}).$$

Последнее неравенство дает $\|x^\delta_{\alpha_2}\| \leqslant \|x^\delta_{\alpha_1}\|$, т.е. ограниченная снизу функция $\rho(\alpha)$ монотонно не возрастает и стремится к конечному пределу. Величина этого предела нам известна в случае линейного положительного и нелинейного положительно-определенного оператора, а именно $\lim_{\alpha \to \infty} \rho(\alpha) = 0$. При этом $\|y^\delta_\alpha\| \to 0$, $\alpha \to \infty$, и значит,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sigma(\alpha) = \|y_\delta\|. \tag{9}$$

Пусть $k > 2$ произвольное число, такое, что $k\delta^p \leqslant \|y_\delta\|$, $\delta < 1, p < 1$. Вспоминая (8), имеем $\|y^\delta_\alpha - y_\delta\| \leqslant 2\delta + \|x_0\|\alpha$. Выберем α настолько малым, чтобы $\alpha\|x_0\| \leqslant (k-2)\delta$. Тогда $\|y^\delta_\alpha - y_\delta\| \leqslant k\delta^p$. В силу (9) и непрерывности $\sigma(\alpha)$ найдется по крайней мере одно значение $\bar\alpha$, для которого $\|y^\delta_{\bar\alpha} - y_\delta\| = k\delta^p$. Здесь $y^\delta_{\bar\alpha}$ –решение уравнения (2) при $\alpha = \bar\alpha$. При этом из соотношения

$$k\delta^p = \sigma(\bar\alpha) = \bar\alpha \rho(\bar\alpha) \leqslant \bar\alpha \|x_0\| + 2\delta^p$$

вытекает апостериорная оценка $\bar\alpha \geqslant (k-2)\delta^p / \|x_0\|$. Отсюда

$$\|x^\delta_{\bar\alpha}\| = k\delta\bar\alpha^{-1} \leqslant k(k-2)^{-1}\|x_0\|$$

Значит, последовательность $x^\delta_{\bar\alpha}$ ограничена при каждом $\delta > 0$ и поэтому слабо компактна в H. Предположим (выделяя, если необходимо, подпоследовательность), что $x^\delta_{\bar\alpha} \rightharpoonup \tilde x$, $\delta \to 0$. С другой стороны, $\|y^\delta_{\bar\alpha} - y_0\| \leqslant \|y^\delta_{\bar\alpha} - y_\delta\| + \|y_\delta - y_0\| \leqslant (k+1)\delta^p \to 0$, $\delta \to 0$. Из хеминепрерывности и монотонности A следует $Ay_0 = \tilde x$. Аналогично теореме 1 доказывается, что при $\delta \to 0$ $Ay^\delta_{\bar\alpha} \to Ay_0 = \tilde x = x_0$. Итак: справедлива

<u>Теорема 2.</u> Пусть A –линейный положительный или нелинейный положительно-определенный и монотонный оператор. Пусть $k > 2$, $\delta < 1$, $0 < p < 1$. Тогда существует, по крайней мере, одно значение $\alpha = \bar\alpha$, при котором $\sigma(\bar\alpha) = k\delta^p$. Если $y^\delta_{\bar\alpha}$ – решение уравнения (2) при

$\alpha = \bar{\alpha}$, то $\lim_{\delta\to 0} \| A y^{\delta}_{\bar\alpha} - x_0 \| = 0$.

Замечание. В [10] приведен пример нелинейного хеминепрерывного, монотонного неограниченного оператора в пространстве l^2.

2. Оператор задан на плотном в H множестве $D(A)$.

Пусть однозначный монотонный хеминепрерывный оператор определен на плотном линейнсм множестве $D(A) \subset H$ со значениями $R(A) \subseteq H$. Известно, что для того, чтобы уравнение $Av = w$ имело решение, принадлежащее $D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $v_0 \in D(A)$, что для любого $v \in D(A)$ выполняется неравенство

$$(Av - w, v - v_0) \geq 0 \tag{10}$$

Предположим, как и выше, что $x_0 = Ay_0$ существует, т.е. $y_0 \in D(A)$ и вновь рассмотрим уравнение (2). Пусть оно имеет решение для всех $y_\delta \in H: \|y_\delta - y_0\| \leq \delta$, $\delta \geq 0$. Используя (10) и линейность $D(A)$ совершенно аналогично предыдущему устанавливаем справедливость всех утверждений n° 1. Укажем частные случаи, когда можно гарантировать существование решения уравнения (2) для любой правой части [11, 12]:

1). Оператор A -монотонный однозначный и представим в виде $A = L + F$, где L – линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(L) = D(A)$, такой, что сопряженный оператор L^* есть замыкание своего сужения на пересечение $D(L) * D(L^*)$, а F – нелинейный ограниченный хеминепрерывный оператор из всего H в H;

2) в представлении $A = L + F$ L – м.м. оператор на плотном множестве $D(A)$, F – монотонный, ограниченный, хеминепрерывный в H; Более общее

3) $A = F_1 + F_2$, где F_1 – м.м. оператор на плотном множестве $D(F_1) = D(A)$, $0 \in D(F_1)$, F_2 – монотонный, однозначный, хеминепрерывный и ограниченный оператор в H.

Особый интерес представляет случай линейного оператора A с плотной областью определения. Пусть, например, $A \geq 0$ и $A^* \geq 0$. Тогда A – максимальный монотонный и замкнутый оператор. В частности таковым является положительный самосопряженный оператор – к этому сводится задача (1), если рассматривать уравнение Эйлера для параметрического функционала Тихонова [5].

3. <u>Оператор действует из банахова пространства B в его сопряженное B^*</u>. Предположим, что B и B^* – строго выпуклы и B, кроме того, является E – пространством [9]. Пусть $U(x)$ дуальное отображение пространства B^* в B.

В силу наложенных условий $U(x)$ – строго монотонный, однозначный, ограниченный и хеминепрерывный оператор. Пусть опять вместо точного значения y_0 известны его приближения y_δ, а $x_0 = Ay_0$ существует. Рассмотрим уравнение

$$y_\alpha^\delta + \alpha U(Ay_\alpha^\delta) = y_\delta \tag{11}$$

Предположим, что оно имеет решение для любой правой части y_δ [8, 14]. Тогда

$$(Ay_\alpha^\delta - x_0, y_\alpha^\delta - y_0) = (Ay_\alpha^\delta - x_0, y_\alpha^\delta - y_\delta) + (Ay_\alpha^\delta - x_0, y_\delta - y_0) \geq 0$$

Отсюда

$$\alpha(Ay_\alpha^\delta - x_0, U(Ay_\alpha^\delta)) \leq (Ay_\alpha^\delta - x_0, y_\delta - y_0) .$$

или

$$\|Ay_\alpha^\delta\|^2 - \|Ay_\alpha^\delta\|\left(\frac{\delta}{\alpha} + \|x_0\|\right) - \frac{\delta}{\alpha}\|x_0\| \leq 0 .$$

Из этого неравенства получаем, что если $\frac{\delta}{\alpha} < C_1$, то $\|Ay_\alpha^\delta\| \leq \frac{2\delta}{\alpha} + \|x_0\| \leq C_2$ и аналогично доказательству теоремы 1 показываем, что $Ay_\alpha^\delta \rightharpoonup Ay_0$, если

$\frac{\delta}{\alpha} < C_1$ и $Ay_\alpha^\delta \to Ay_0$, если $\frac{\delta}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Здесь необходимо воспользоваться тем, что в E -пространстве из сходимости норм элементов и слабой сходимости следует сильная сходимость. Вместе с теоремой 1 для рассматриваемого случая справедливы все утверждения n^0 1, а при условии существования решения уравнения (11) справедливы результаты n^0 2, когда $D(A)$ плотное линейное множество в B.

Пусть $\delta = 0$. Тогда

$$(Ay_\alpha^0 - Ay_0, y_\alpha^0 - y_0) = -\alpha(Ay_\alpha^0 - x_0, U(Ay_\alpha^0)) \geq 0$$

Воспользовавшись тем, что

$$(Az, U(Az)) = \|Az\|^2, \quad \|U(Az)\| = \|Az\|,$$

получаем $\|Ay_\alpha^0\| \leq \|x_0\|$. Это совпадает с оценкой (6) (ср. с [13]).

4. <u>Оператор задан в банаховом пространстве B</u>.

Пусть $A: B \to B$ аккретивный оператор [8]. Это означает, что для любых $x, y \in B$ имеет место неравенство

$$(Ax - Ay, J(x - y)) \geq 0$$

Здесь J – дуальное отображение пространства B в B^*. Предположим далее, что норма в E – пространстве B дифференцируема по Гато. Тогда дуальное отображение есть положительно-однородный оператор. Снова рассмотрим уравнение (2), как метод решения (1). Из неравенства $(Ay_\alpha^0 - x_0), J(y_\alpha^0 - y_0)) \geq 0$, используя (3), получаем $(Ay_\alpha^0 - x_0, J(Ay_\alpha^0)) \leq 0$. Отсюда вновь следует оценка (6). Далее аналогичными доказательствами можно установить все результаты n^0 1,2.

В заключение отметим, что дуальное отображение существует в любом банаховом пространстве. Наиболее просто оно записывается в гильбертовом пространстве (тождественный оператор), пространствах l^p, L^p, W_m^p.

Это позволяет применить полученные результаты для вычисления значений неограниченных операторов, возникающих в задачах математической физики, оптимизации и в других прикладных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. М., "Наука", 1975.
2. В.А.Морозов. Линейные и нелинейные некорректные задачи. Сб. "Итоги науки и техники", сер. Математический анализ, 1973. Т. 11, 129–178.
3. О.А.Лисковец. Об устойчивом вычислении значения замкнутого оператора. Докл. АН БССР, 1971, 15, № 6, 481–483.
4. В.К.Иванов. Линейные неустойчивые задачи с многозначными операторами. Сиб. матем.ж., 1970, 11, № 5, 1009–1016.
5. В.А.Морозов. Об одном устойчивом методе вычисления значений неограниченных операторов. Докл. АН СССР, 1969, 185, № 2, 267–270.
6. В.Н.Страхов. Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике 1. Изв. АН СССР. Физ.Земли, 1969, № 8, 30–53.
7. В.В.Васин. К задаче вычисления значений неограниченного оператора в В-пространствах. Изв. ВУЗов, "Математика", 1972, № 5, 22–28.
8. М.М.Вайнберг. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.
9. Я.И.Альбер. О решении нелинейных уравнений с монотонными операторами в банаховом пространстве. Сиб. матем. ж., 1975, 16, № 1, 3–11.
10. R.T.Rockafellar. Local boundedness of non-linear monotone operators. Michigan. Math.J., 1969, 16, 397–407.

11. F.E.Browder. Strongly nonlinear parabolic boundery value problems. Am.J. Math.,1964, 86, N 2, 339-357.

12. F.E.Browder. Nonlinear Maximal Monotone Operators in Banach Space. Math. Ann., 1968, 175, N 2, 89-113.

13. H.Brezis, G.Stampacchia. Sur la regularite de la solution d'inequations elliptiques. Bull.Sos.Math.France, 1968, 96, 153-180.

14. Ж.-Л.Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., "Мир", 1972.