

**Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР**

**Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)**

Препринт № 98

**ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ
В ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ ВОЗБУДИМОЙ СРЕДЫ**

Ябло В.Г.

Горький - 1978 г.

А н н о т а ц и я

Рассмотрено формирование импульсов в возбудимой среде в случаях, когда $a = a(V)$ — скорость фронта возбуждения от величины медленной переменной V — представляет собой немонотонную зависимость. Показана возможность существования нескольких устойчивых стационарных импульсов возбуждения. Выяснены условия при которых спад импульса возбуждения распространяющегося в однородной среде может останавливаться.

Для правильной интерпретации процессов в возбудимых средах, желательно, как правило, иметь представление о возможных решениях математической модели, соответствующей исследуемой среде. Однако исследование моделей возбудимых сред встречается с серьезными математическими трудностями и поэтому в настоящее время полностью не проработано.

В работе с помощью приближенного аналитического подхода проводится исследование некоторых новых особенностей связанных с распространением импульсного возмущения. Выбранная модель возбудимой среды допускает существование нескольких устойчивых стационарных импульсов. Показано, что при некоторых начальных условиях один из фронтов возбуждения в импульсе может останавливаться. Рассмотрение таких процессов может оказаться полезным для понимания анамальных задержек импульса, а также условий возникновения нестационарных движений (типа ведущего центра [1, 3]) в возбудимой среде.

Поведение системы будем описывать следующей системой уравнений [1 + 3].

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v); \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \psi(u, v) \quad (1)$$

где $\varepsilon \ll 1$, а $\psi(u, v)$ $f(u, v)$ — заданные нелинейные функции (см. например, в [1 + 3]). Дополнительное требование для функции $f(u, v)$ будет изложено

но в пункте 2.

Метод исследования системы (1), связанный с разделением на быстрые волновые движения и последующую медленную релаксацию был изложен в [2], где рассматривалось формирование стационарного импульса. Напомним, что одной из основных характеристик такой системы является функция $Q = Q(V)$ — скорость быстрого фронта возбуждения, зависящая от величины медленной переменной V .

Целью настоящей работы является выяснение особенностей распространения импульсов возбуждения в средах с немонотонной зависимостью $Q = Q(V)$ (см. рис. 1) (формирование импульса при монотонной зависимости $Q(V)$ рассмотрено в [2]).

2. Сначала обсудим вид нелинейной функции $f(u, V)$ в случаях, когда может быть получена немонотонная зависимость $Q(V)$. При этом удобнее всего воспользоваться аналитическими формулами из работы [4], которые получены для нелинейной функции в виде полинома пятой степени

$$f(u, V) = f(u) [u - m_1(V)] [u - m_2(V)] [u - m_3(V)] \cdot [1 + \alpha(q)u + \beta(q)u^2] \quad (2)$$

где $\alpha = \frac{3g^2}{2 + g(V)(2m_1 + 2m_3 - 3m_2)}$; $\beta = -g - \frac{\alpha}{g}$; $f(V)$ и $g(V)$ заданные функции V . Зависимости $m_1(V)$; $m_3(V)$ и $m_2(V)$ представляют собой функции соответствующие устойчивым и неустойчивой ветвям N — образной характеристики на фазовой плоскости (u, V) . Некоторые варианты зависимости скорости от V показаны на рис. 1 а, б.

Обратим внимание, что представление $f(u, V)$ в виде (2) удобно при построении феноменологической модели из экспериментальных данных. В частности, тогда $m_1(V)$ и $m_3(V)$ могут быть определены из экспериментов на сосредоточенной модели, а экспериментальной зависимости скорости $Q(V)$ можно удовлетворить, подбирая функции $m_2(V)$ и $g(V)$.

3. Перейдем к рассмотрению динамики нестационарных процессов. Сначала рассмотрим случай, когда $a(V)$ обращается в нуль лишь в одной точке $V = V_{\mu p}$ (см. рис. 1а). Будем считать, что система полубесконечна ($0 \leq X \leq \infty$), а возбуждение импульсов производится внешним источником в точке $X = 0$. Положим, также, что истинное состояние равновесия U_p, V_p расположено на левой, устойчивой ветви N -образной характеристики (рис. 1а). Через a_1 и a_2 обозначим максимальное и минимальное значения скоростей в области нарушения монотонности $a = a(V)$ (рис. 1а). При этом значения медленной переменной V_1 и V_2 будут соответствовать скоростям $-a_1 = a(V_1)$ и $-a_2 = a(V_2)$. Тогда при $V_p > V_2$ или $V_p < V_2$ процесс формирования импульса качественно будет протекать так же как и при монотонной зависимости $a = a(V)$ [2]. Отличие будет проявляться лишь в немонотонности изменения скорости спада в процессе формирования стационарного импульса.

Более разнообразным будет поведение системы при $V_1 < V_p < V_2$. При этом оказывается возможным существование нескольких стационарных импульсов возбуждения в системе. Эти импульсы могут распространяться вдоль системы с одинаковой скоростью $a_p = a(V_p)$, однако имеют различную длительность (рис. 2). В первом стационарном импульсе медленная переменная изменяется от V_p до V_{1p} , во втором - от V_p до V_{2p} , в третьем - от V_p до V_{3p} (см. рис. 1 и рис. 2). С помощью зависимости $a = a(V)$ нетрудно проверить устойчивость этих импульсов. Два стационарных импульса (с длиной l_1 и l_3) устойчивы к изменениям их длительности, а импульс с известной промежуточной длиной l_2 оказывается неустойчивым образованием и поэтому в реальной системе наблюдаться не может. Этот импульс представляет собой некоторую границу для начальных условий, которая разделяет начальные возмущения, приводящие к формированию разных стационарных импульсов: если начальное возмущение по U имеет длительность $\tau_H = \frac{l_H}{a_p(V_p)}$ меньше чем $\tau_2 = \frac{l_2}{a_p(V_p)}$, то формируется короткий стационарный импульс; если $\tau_H > \tau_2$, то

формируется более длинный импульс. Формулы для длительности стационарного импульса и длины формирования импульсов записываются в виде следующих выражений:

$$t(V_p, V_*) = \int_{V_p}^{V_*} \frac{dV}{\psi(V, m_3(V))} \quad (3)$$

$$l_{\text{форм}} = \int_{V_H}^{V + 0,1(V_H - V)} \frac{dV}{\psi(V, m_3(V)) \left[\frac{1}{a(V)} - \frac{1}{a(V_p)} \right]} \quad (4)$$

Обратим внимание на существование простого гистерезисного явления при распространении стационарного импульса вдоль плавно неоднородной среды⁺). Пусть, например, $V_3 < V_p(x) < V_4$ где $V_3 < V_1, a V_4 > V_2$. Тогда в пространстве (см. рис. 3) имеется участок $X_1 < X < X_2$, где распространение стационарного импульса может проходить в двух формах (либо длинный, либо короткий импульс), а вне этого отрезка стационарный импульс может быть только одной длительности. При этом в зависимости от направления распространения импульса переход от одной стационарной формы импульса к другой будет происходить в разных точках системы. Длина отрезка $l_{\text{форм}}$ где происходит формирование нового стационарного импульса из предыдущего может быть оценена с помощью формулы (4). При распространении вправо (см. рис. 3) переход к более длинному импульсу произойдет за точкой X_2 , а импульсдвигающийся влево сожмется к более короткой форме лишь после прохождения точки X_1 .

4. Теперь кратко опишем еще более сложную ситуацию. Предположим, что $a(V)$ обращается в нуль при

⁺) Плавной будем называть такую неоднородность, характерный размер которой много больше длины фронта возбуждения. При этом для определения скорости фронта можно пользоваться зависимостью $a = a(V)$.

трех значениях $V_{i,кр} \ i=1,2,3$ (рис. 1 б). В этом случае в процессе формирования импульса могут образоваться остановившиеся фронты возбуждения.

Подробное изучение системы с неподвижными фронтами возможно, по-видимому, лишь численными методами, поэтому здесь мы в основном ограничимся рассмотрением только некоторых характерных ситуаций, приводящих к остановке фронта возбуждения внутри системы. Разберем следующие случаи:

а) $V_p < V_1$ (см. рис. 1 б). В такой системе может сформироваться только один стационарный импульс. Однако возбуждение убегающего от границы возмущения может быть произведено двумя способами, причем для этого необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

$$t_{нач} > t(V_p, V_{кр3}) \quad \text{или} \quad t(V_p, V_{кр1}) < t_{нач} < t(V_p, V_{кр2})$$

(см. формулу 3).

Если начальная длительность импульса $t_{нач}$ не удовлетворяет этим неравенствам, то спад такого импульса не будет распространяться вслед за фронтом и ограниченное в пространстве возмущение не сможет отойти от границы $X = 0$. Формирование импульса при $t_{нач} > t(V_p, V_{кр3})$ происходит обычным образом (см. [2]). Если же выполнено второе условие, то скорость движения спада все время будет меньше скорости фронта импульса. Величина V перед спадом будет постепенно увеличиваться, причем происходить это будет до тех пор, пока в месте нахождения спада V не достигнет значения $V_{кр2}$, после чего спад остановится. Расстояние от края системы до места остановки фронта определяется из формулы

$$l_0 = \int_{V_N}^{V_{кр2}} \frac{a(V_p) a(V) dV}{\varphi(V, m_3(V)) [a(V_p) - a(V)]} \quad (5)$$

б) $V_1 < V_p < V_{кр1}$. В такой системе возможно существование двух устойчивых стационарных импульсов. Короткий импульс возбуждается, если начальная длительность возмущения удовлетворяет неравенству

$t(V_p, V_{kp1}) < t < t(V_p, V_1^*)$ (см. рис. 1б). Длинный импульс возбуждается при условии $t(V_p, V_{kp3}) < t_{нач}$. Если же $t(V_p, V_1^*) < t_{нач} < t(V_p, V_{kp3})$, то спад импульса будет двигаться замедляясь и через некоторое время остановится. Место остановки определяется из формулы (5).

в) $V_{kp1} < V_p < V_{kp2}$ Распространяющийся импульс в системе возбужден быть не может.

б) $V_{kp2} < V_p < V_{kp3}$ Возможно существование одного стационарного импульса, скорость распространения которого равна $a(V_p)$, а длительность $\tau = t(V_p, V)$.

д) $V_p > V_{kp3}$ Распространение импульсов невозможно.

Б. В заключение отметим, что на реальных возбудимых объектах, таких, например, как автоколебательные химические реакции, волокна сердечных мышц и т.п. непосредственное измерение нелинейных характеристик встречается со значительными трудностями, поэтому о них судят по отклику системы на внешнее возмущение. При этом часто, когда отклик становится сложным, поведение системы пытаются объяснить с помощью усложнения исходной модели, в частности, увеличивая число переменных. В связи с этим хотелось показать возможность более подробного изучения простых моделей среды и выявление на них новых типов поведения. Здесь удалось показать существование некоторых нетривиальных режимов, используя для этого такую качественную характеристику системы (1), как зависимость $a = a(V)$.

К сожалению, сейчас весьма затруднительно предположить в какой конкретной среде могут проявить себя описанные здесь процессы. Вызвано это тем, что детальный вид нелинейной функции $f(u, V)$ не определен даже для известных моделей, а исследование отклика системы на специально заданное внешнее воздействие также пока не проводилось. Однако имеются некоторые косвенные данные, подтверждающие возможность существования интересующих нас характеристик среды. Так в определенных автоколебательных химических реакциях

была обнаружена немонотонная зависимость скорости волн от начальной концентрации исходных веществ [5]. Если бы при этом удалось показать, что состояние равновесия с изменением концентрации соответствующих веществ меняется монотонно, то эти изменения явились бы прямым подтверждением немонотонности $q = q(V)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.М.Жаботинский. Радиофизика, т. 17, вып. 4, 596, 1974.
2. Л.А.Островский, В.Г. Яхно. Биофизика. т. 20, вып. 3, 489, 1976.
3. Ю.К.Гольцова, Г.М.Жислин, В.Г.Яхно. Биофизика (в печати).
4. В.Г.Яхно. Биофизика. т. 21, вып. 3. 1976.
5. О.В.Куйбышева. Дипломная работа 1973 МГУ.

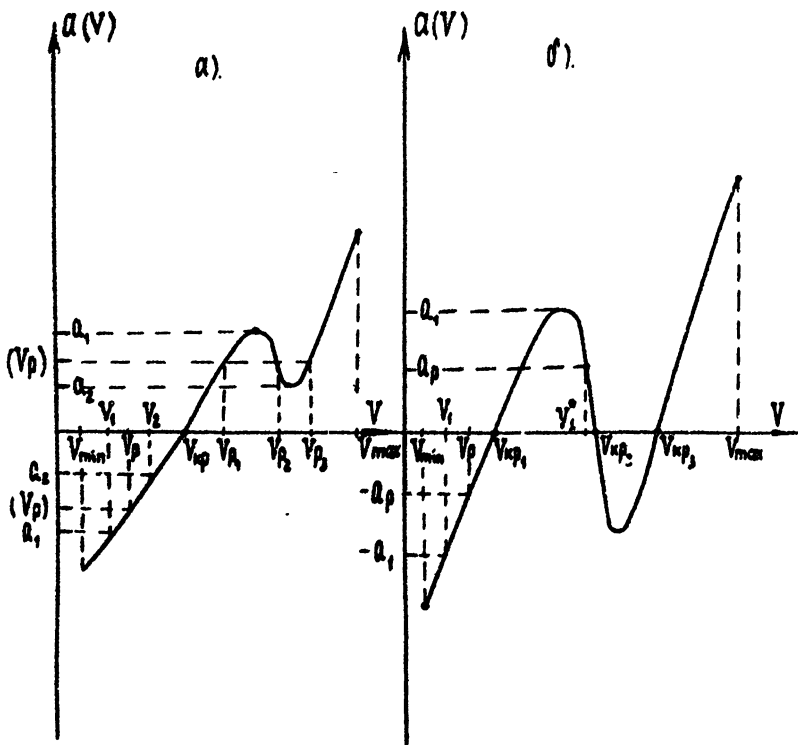


Рис. 1.

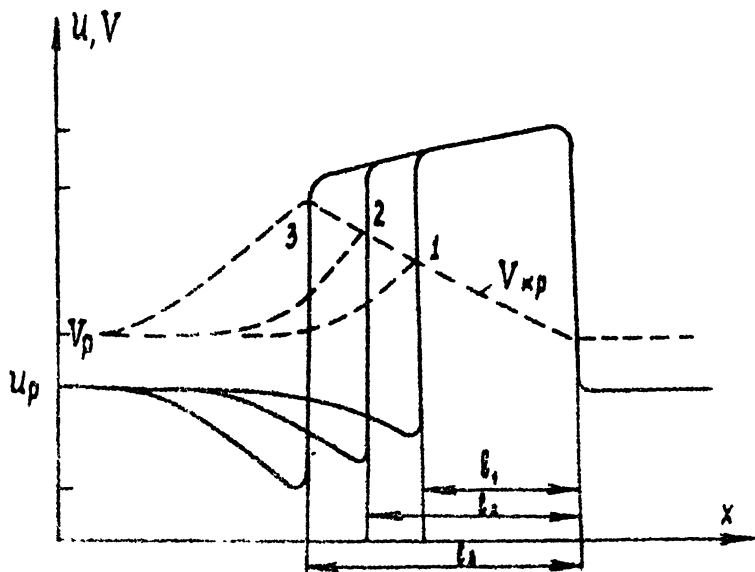


Рис. 2.

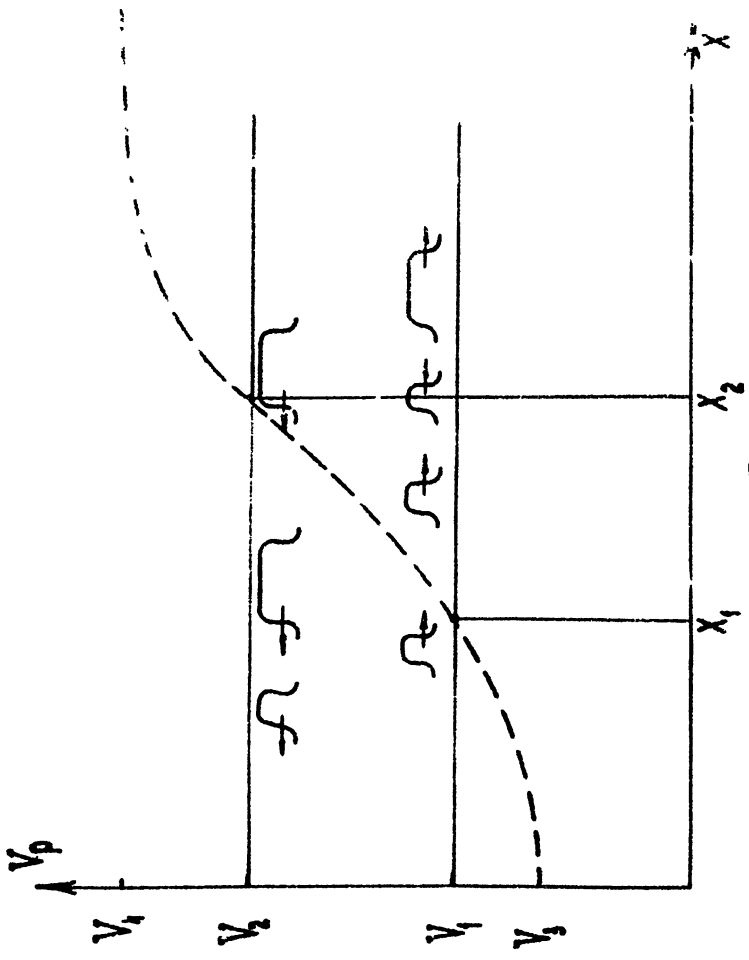


Рис. 3

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Различные варианты немонотонной зависимости скорости фронта от величины γ

Рис. 2. Стационарные импульсы системы (1), в случае $V_1 < V_p < V_2$. 1 и 3 – устойчивые к возмущениям импульсы, 2 – неустойчивый импульс

Рис. 3. Гистерезисное явление при трансформации стационарного импульса из одной формы в другую. На участке $X_1 < X < X_2$ могут распространяться оба устойчивых стационарных импульса. В зависимости от направления распространения импульса, переход от короткого импульса к длинному и обратно будет происходить в разных точках пространства.