Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 102

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ В СЛУЧАЕ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ

В.Н.Гольдберг

Горький 1977 г.

§ 0. Введение, постановка задачи и основные результаты работы

I. В области $\bar{G}_{\mathring{T}} = \{0 \le x \le 1 - \nu_1 t,\ 0 \le t \le \mathring{T}\},\ 0 < \mathring{T} < \nu_1^{-1}$, рассмотрим смешанную задачу

$$p_t + \lambda p_x = P(x, t, p, q) \tag{0.I}$$

$$q_t - \nu q_x = Q(x, t, p, q) \tag{0.2}$$

$$p(x,0) = p_0(x),\ q(x,0) = q_0(x) \tag{0.3}$$

$$\mu p_t(0,t) = A(t, p(0,t), q(0,t)) + \mu S(t), \tag{0.4}$$

где $p \in R^n$, $q \in R^m$, λ, ν – постоянные диагональные матрицы с собственными значениями $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0$, $1 \le r \le n$, и $\nu_1 \ge \nu_2 \ge \dots \ge \nu_m > 0$ соответственно, вектор-функция A аналитическая в области $\bar{G}_{\mathring{T}} \times R^{n+m}$, вектор-функции $p_0, q_0, P, Q, S \in C_2(\bar{G}_{\mathring{T}} \times R^{n+m})$. $\det A_p(0, p_0(0), q_0(0)) \ne 0$, $\mu > 0$ – малый скалярный параметр. Все величины в (0.I)–(0.4) вещественные.

Условимся называть задачу (0.I) – (0.4) при $\mu > 0$ задачей $\mu > 0$, а вырожденную задачу – задачей $\mu = 0$.

Предположим, что выполнятся условия согласования, необходимые для существования в $\bar{G}_{\mathring{T}}$ C_1 – решения задачи $\mu = 0$.

Тогда в соответствии с установленной в [I] теоремой об однозначной продолжаемости по t C_1 – решения задачи $\mu = 0$ возможны только следующие случаи:

I) в $\bar{G}_{\dot{T}}$ существует единственное решение $(\overset{(0)}{p}, \overset{(0)}{q}) \in C_1(\bar{G}_{\dot{T}})$ задачи $\mu = 0$, и $\det A_p(t, \overset{(0)}{p}(0,t), \overset{(0)}{q}(0,t)) \neq 0 \ \forall t \in [0, \dot{T}]$;

II) найдется такое $T^* \in (0, \dot{T}]$, что в $G_{T^*} = \{(x,t) \in \bar{G}_{T^*}, t < T^*\}$ существует единственное решение $(\overset{(0)}{p}, \overset{(0)}{q}) \in C_1(G_{T^*})$ задачи $\mu = 0$, $\det A_p(t, \overset{(0)}{p}(0,t), \overset{(0)}{q}(0,t)) \neq 0 \ \forall t \in [0, T^*)$, и

либо IIа) $\inf\limits_{0 \le t < T^*} |\det A_p(t, \overset{(0)}{p}(0,t), \overset{(0)}{q}(0,t))| = 0$,

$$M_0 = \sup_{G_{T^*}} \left[\|\overset{(0)}{p}(x,t)\|_n + \|\overset{(0)}{q}(x,t)\|_m \right] < \infty,$$

где $\|\cdot\|_s$ – евклидова норма вектора из R^s,

либо IIб) $M_0 = \infty$.

В случае I) и в случае IIа) при условии, что $T^* = \dot{T}$, и

$$J = \int_0^{T^*} |\det A_p(\tau, \overset{(0)}{p}(0,\tau), \overset{(0)}{q}(0,\tau))|^{-1} d\tau < \infty$$

в $\bar{G}_{\dot{T}}$, вообще говоря, существует единственное решение задачи $\mu > 0$, которое при $\mu \to 0$ в случае I) равномерно сходится в $\bar{G}_{\dot{T}}$ к решению $(\overset{(0)}{p}, \overset{(0)}{q})$ задачи $\mu = 0$, а в случае IIа) равномерно сходится в каждой замкнутой области $\Omega \in \bar{G}_{\dot{T}}$, не имеющей общих точек ни с одной из характеристик системы (0.I), выходящих из точки $x = 0, t = T^*$, к разрывному решению (р.р.) задачи $\mu = 0$ в $G_{\dot{T}}$ [I,2]+)

+) Определение решения задачи $\mu > 0$ в $\bar{G}_T$, $T \in (0, \dot{T}]$, и определения разрывного решения и фигурирующего ниже кусочно-гладкого решения задачи $\mu = 0$ в $\bar{G}_T$, $T \in (T^*, \dot{T}]$, см. соответственно в п. I § 2 и в п.2 §I.

Описанные результаты о разрешимости и сходимости решения задачи $\mu > 0$ можно интерпретировать соответственно как аналог теоремы А.Н.Тихонова [3] и как "качественный" аналог результатов Л.С.Понтрягина и Е.Ф.Мищенко [4–6] о существовании и сходимости решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к C_1 –решению и к разрывному в смысле Л.С.Понтрягина и Е.Ф.Мищенко решению вырожденной задачи.

2. В настоящей работе задача $\mu > 0$ изучается в случае II.а) при условии, что $T^* < \overset{\circ}{T}$ и $\mathcal{J} = \infty$. В этой ситуации согласно [2,7,8] найдется такое $\gamma \in (T^*, \overset{\circ}{T}]$, что в $\bar{G}_\gamma$ существуют, вообще говоря[+]:

а) два и только два кусочно-гладкие решения $(\overset{(s)}{p}, \overset{(s)}{q})$, $s=1,2$, задачи $\mu = 0$, совпадающие с решением $(\overset{(0)}{p}, \overset{(0)}{q})$ в $\bar{G}_{T^*}$; отметим, что $\overset{(1)}{p}, \overset{(1)}{q}, \overset{(2)}{q} \in C_1(\bar{G}_\gamma)$, $\overset{(2)}{p} \in C(\bar{G}_\gamma)$, но $\overset{(2)}{p} \bar{\in} C_1(\bar{G}_\gamma)$;

б) единственное р.р. $(\overset{(3)}{p}, \overset{(3)}{q})$ задачи $\mu = 0$.

Сформулируем теперь основные результаты данной работы.

<u>Теорема I</u>. Пусть выполняются условия У.I) – У.5), У.7) – У.9) из § I (при $n = 1$ условия У.I), У.4), У.5) опускаются). Тогда найдется такая вектор-функция $s(t) \in C_2[0, \gamma]$, что если число $\mu > 0$ достаточно мало, то в $\bar{G}_\gamma$ существует единственное решение $(p(\mu, x, t), q(\mu, x, t))$ задачи $\mu > 0$, и

$$\max_{\bar{G}_\gamma} \left[\| p(\mu,x,t) - \overset{(2)}{p}(x,t) \|_n + \| q(\mu,x,t) - \overset{(2)}{q}(x,t) \|_m \right] = O(\mu^{1/2}).$$

Если указанные в § I не равное нулю число a и число w_1 таковы, что $w_1 \neq 0$ и $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} w_1$, то можно положить $s(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \gamma]$.

[+] Достаточные для справедливости утверждений а), б) условия У.I) – У.6) приведены в § 1.

<u>Теорема 2</u>. Пусть выполняются условия У.I) – У.8), У.10) из § I (при n = I условия У.I), У.), У.5), У.10) опускаются). Тогда найдется такая вектор-функция $s(t) \in C_2[0,\tau]$, что если число $\mu > 0$ достаточно мало, то в $\bar{G}_\tau$ существует единственное решение задачи $\mu > 0$, которое равномерно сходится при $\mu \to 0$ к решению $(\overset{(3)}{p}, \overset{(3)}{q})$ задачи $\mu = 0$ в каждой замкнутой области $\Omega \in \bar{G}_\tau$, не имеющей общих точек ни с одной из характеристик системы (0.I), выходящих из точки $x=0$, $t=T^*$. Если $w_1 \neq 0$ и $\operatorname{sign} a \neq \operatorname{sign} w_1$, то можно положить $s(t) = 0$ $\forall t \in [0,\tau]$.

3. Конструкции, используемые в настоящей работе, применимы при исследовании сходимости решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае ветвления решения вырожденной задачи. Рассмотрим при $t \in [0, \mathring{T}]$, $\mathring{T} \in (0,\infty)$, задачу

$$\mu p' = \Lambda(t, p, q) + \mu s(t), \quad p(0) = p_0 \tag{0.5}$$

$$q' = Q(t, p, q), \quad q(0) = q_0, \tag{0.6}$$

где $p \in R^n$, $q \in R^m$, $\mu > 0$ – малый скалярный параметр. Предположим, что при продолжении по t C_1 – решения вырожденной задачи (0.5), (0.6) в некоторый момент $t = T^* < \mathring{T}$ возникает ситуация, аналогичная случаю IIа), соответствующая величина $J = \infty$ и выполняются условия, аналогичные У.I) – У.3). Тогда следуя [7] можно доказать разветвление C_1 –решения вырожденной задачи при $t > T^*$ на C_1 –решение и кусочно-гладкое решения. При условиях, аналогичных У.4) – У.9) имеют место соответствующие аналоги теорем I и 2 о сходимости решения задачи (0.5), (0.6) при подходящем выборе вектор-функции $s(t)$ к кусочно-гладкому и к разрывному в смысле Л.С.Понтрягина и Е.Ф.Мищенко решению вырожденной задачи.

Сходимость решения задачи (0.5), (0.6) при $S(t)=0$ к кусочно-гладкому решению вырожденной задачи установлена в[9, 10].

4. Остановимся на содержании §§ 1-3, составляющих данную статью+).

В § 1 формулируются условия У.1) – У.10), результаты о гладкости решения $(\overset{(0)}{p}, \overset{(0)}{q})$ в $\overline{G}_{T^*}$ и о существовании в $\overline{G}_T$ решений $(\overset{(i)}{p}, \overset{(i)}{q})$, $i=1, 2, 3$.

В § 2 в окрестности точки $t=T^*$ изучается поведение при $\mu \to 0$ решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из уравнения (0.4) в результате некоторого специального выбора вектор-функции $S(t)$ и замены вектор-функции $q(0,t)$ произвольной определенной в окрестности точки $t=T^*$ вектор-функцией класса C_1, близкой по норме пространства C_1 к вектор-функции $\overset{(0)}{q}(0,T^*)+\overset{(0)}{q}_t(0,T^*)(t-T^*)$.

В § 3 устанавливаются теоремы 3.1-3.3, из которых вытекают теоремы 1 и 2.

5. Введем некоторые обозначения.

а) Пусть векторы $p\in R^n$, $q\in R^m$.

Обозначим через p^k, $1\le k\le n$, и через q_j, $1\le j\le m$, компоненты векторов p и q соответственно.

б) Пусть $p=(p^1, p^2, \dots, p^n)$. Обозначим через $\hat{p}=(p^2, p^3, \dots, p^n)$, $p_i=(p^{\ell_i+1}, p^{\ell_i+2}, \dots, p^{\ell_i+k_i})$, $1\le i\le 2$, где k_i – кратность собственного значения λ_i, $\ell_1=0$, $\ell_i=\sum_{s=1}^{i-1} k_s$, $i\ge 1$. Тогда вектор-функцию $P(x,t,p,q)$ можно записать в виде

+) В статье изучается только случай $n>1$, требующий ряда дополнительных рассмотрений по сравнению со случаем $n=1$.

$$p(x,t,p,q)=\{p_1(x,t,p_1,p_{j+1},q),\ p_2(x,t,p_2,p_{j+2},q),\dots,$$

$$p_z(x,t,p_z,p_{j+z},q)\},\quad \forall (x,t)\in \overline{G}_{\overset{\circ}{T}},\ p\in R^n,\ q\in R^m$$

в) Пусть $(x,t)\in \overline{G}_{\overset{\circ}{T}}$. Обозначим через $\varkappa_i^-(\tau,x,t)=x+\lambda_i(\tau-t)$, $\varkappa_j^+(\tau,x,t)=x+\nu_j(t-\tau)$, $\xi_i(x,t)$, $\theta_i(x,t)$ – соответственно x и t – координаты точки пересечения границы области $\overline{G}_{\overset{\circ}{T}}$ с характеристикой $x=\varkappa_i^-(\tau,x,t)$ при продолжении ее для $\tau<t$; обозначим через $\tau^{-i,0,T^*}_{+1,1,0}$ t – координату точки пересечения характеристик $\xi=\varkappa_i^-(\tau,0,T^*)$ и $\xi=\varkappa_1^+(\tau,1,0)$.

г) Пусть числа $0\le\alpha<T\le\overset{\circ}{T}$, $T^*<\eta\le\overset{\circ}{T}$, $1\le i\le z$.
Обозначим через

$$\overline{G}_T=\{(x,t)\in\overline{G}_{\overset{\circ}{T}},\ t\le T\},\quad \mathcal{O}_\eta^1=\{(x,t)\in\overline{G}_\eta:\ x\ne\lambda_s(t-T^*)\ \forall s,\ 1\le s\le z\},$$

$$\overline{G}_T[i_\alpha]=\{(x,t):\ \alpha\le t\le T,\ 0\le x\le \min[\varkappa_i^-(t,0,\alpha),\ \varkappa_1^+(t,1,0)]\},$$

$$\overline{G}_T(i_\alpha)=\{(x,t)\in\overline{G}_T[i_\alpha],\ x\ne\lambda_i(t-\alpha)\},\ \overline{D}_T[i_\alpha]=\overline{G}_T\setminus\overline{G}_T(i_\alpha),$$

$$\overline{D}_T(i_\alpha)=\overline{G}_T\setminus\overline{G}_T[i_\alpha],\ \overline{G}'_{T*}=\overline{G}_{T*}\setminus(0,T^*),\ \text{где } (0,T^*)\text{-точка } x=0,\ t=T^*$$

д) Пусть матрицы $\Phi_i(x,t)=\|\varphi^i_{\alpha\beta}(x,t)\|$, $i=1,2$, определены на множестве $D\in\overline{G}_{\overset{\circ}{T}}$. Обозначим через

$$|\Phi_i(x,t)|=\sum_{\alpha,\beta}|\varphi^i_{\alpha\beta}(x,t)|,\quad |\Phi_i|_D=\sum_{\alpha,\beta}\sup_D|\varphi^i_{\alpha\beta}|,\quad |\Phi_1,\Phi_2|_D=\sum_{i=1}^2|\Phi_i|_D$$

е) $C_i(\gamma,\delta,\dots,\varkappa)$, $i=1,2,\dots$ – положительные постоянные, зависящие от данных задачи $\mu=0$ и постоянных $\gamma,\delta,\dots,\varkappa$; C_i – положительные постоянные, зависящие от данных задачи $\mu=0$. Постоянные $C(\gamma,\delta,\dots,\varkappa)$ и C, значения которых не существенны для проводимых рассуждений, не нумеруются.

ж) $\omega_i(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$, $i = 1, 2, \dots$ – функции, стремящиеся к нулю когда все $\zeta_s \to 0$. Функции $\omega(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$, значения которых не существенны для проводимых рассуждений, не нумеруются.

з) Пусть точка $(t, p, q) \in [0, \mathring{T}] \times R^n \times R^m$. Обозначим через $\gamma_i(t, p, q)$, $1 \le i \le n$, собственные значения матрицы $A_p(t, p, q)$.

и) Обозначим через E_ℓ, $1 \le \ell \le n$, единичную $(\ell \times \ell)$ – матрицу.

§ I. Существование и некоторые свойства решений $(\overset{(i)}{p}, \overset{(i)}{q})$, $i=1,2,3$.

I. Пусть

У.I) существует такое $1 \leq \ell \leq n$, что при $1 \leq i \leq n$, $i \neq \ell$

$$A^i(t,p,q) = p^i - g^i(t,p^\ell,q) \;\forall t \in [0,T^*],\; p \in R^n,\; q \in R^m.$$

Положим $H(t,p^\ell,q) = A^\ell(t,p,q)\big|_{p^i = g^i(t,p^\ell,q),\, i \neq \ell}$.
Отметим, что $\inf\limits_{0 \leq t < T^*} |H_{p^\ell}(t, \overset{(0)\ell}{p}(0,t), \overset{(0)}{q}(0,t))| = 0$. Пусть

У.2) существует такое $\varepsilon_0 \in (0,T^*)$, что

$$\inf_{T^* - \varepsilon_0 \leq t < T^*} |H_{p^\ell p^\ell}(t, \overset{(0)\ell}{p}(0,t), \overset{(0)}{q}(0,t))| > 0.$$

При условиях У.I), У.2) $\overset{(0)}{p} \in C(\bar G_{T^*})$, $\overset{(0)}{q} \in C_1(\bar G_{T^*})$ [II].
Обозначим через $p^* = \overset{(0)}{p}(0,T^*)$, $\overset{*}{q} = \overset{(0)}{q}(0,T^*)$, $\overset{*}{q}_t = \overset{(0)}{q}_t(0,T^*)$.
Согласно [II] функция $p^\ell = \overset{(0)\ell}{p}(0,t)$ удовлетворяет при $t \in [0,T^*)$ уравнению

$$[C_3(t-T^*) + C_4(p^\ell - \overset{*\ell}{p}) + f_2(t,p^\ell)]\frac{dp^\ell}{dt} = C_1(t-T^*) + C_2(p^\ell - \overset{*\ell}{p}) + f_1(t,p^\ell),$$

где
$$f_i \in C_1([0,T^*] \times R^1), \quad f_i(T^*, \overset{*\ell}{p}) = \frac{\partial f_i(T^*, \overset{*\ell}{p})}{\partial p^\ell} = 0, \quad i = 1,2,$$
$$C_4 = H_{p^\ell p^\ell}(T^*, \overset{*\ell}{p}, q^*).$$

Пусть

У.3) $C_2 C_3 - C_1 C_4 \neq 0$.

Следуя [7] можно показать, что при условиях У.I)–У.3) уравнение $(C_3 + C_4\sigma)\sigma = C_1 + C_2\sigma$ имеет действительные различные корни σ_1, σ_2, вектор-функция $\overset{(0)}{p} \in C_1(\bar{G}_{T^*})$ и число $\overset{(0)\ell}{p}_t(0,T^*)$ совпадает с одним из чисел σ_1, σ_2. Не ограничивая общности предположим, что $\overset{(0)\ell}{p}_t(0,T^*) = \sigma_1$.

2. Обозначим через $\mathfrak{N}_T$, $T \in (T^*, \overset{\circ}{T}]$, множество определенных в $\bar G_T$ вектор-функций (p,q) таких, что $p \in C(\bar G_T)$,

$p_i \in C_1(\bar{G}_T[i_{T*}])$, $p_i \in C_1(\bar{D}_T[i_{T*}])$, $1 \le i \le r$, $q \in C_1(\bar{G}_T)$,
$(p,q) = (\overset{(0)}{p}, \overset{(0)}{q})$ в $\bar{G}_{T*}$.

Определение I.I. Вектор-функция $(p,q) \in \mathfrak{N}_T$, $T \in (T^*, \mathring{T}]$, называется кусочно-гладким решением (к.г.р.) задачи $\mu = 0$ в $\bar{G}_T$, если она удовлетворяет уравнению (0.2) в $\bar{G}_T$, уравнению (0.4) при $t \in (T^*, T]$, а вектор-функция p_i, $1 \le i \le r$, удовлетворяет в $\bar{D}_T(i_{T*}) \cup \bar{G}_T(i_{T*})$ уравнению

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial p_i}{\partial x} = P_i(x,t,p,q).$$

Из [7,II] вытекает

Предложение I.I. Найдется такое $\theta \in (T^*, \dot{T}]$, что при любом $T \in (T^*, \theta]$ в $\bar{G}_T$ существуют два и только два к.г.р. $(\overset{(i)}{p}, \overset{(i)}{q})$, $i=1,2$, задачи $\mu=0$, и $\overset{(i)}{p}{}^{\ell}_{+}(0, T^*+0) = \sigma_i$, $i=1,2$, $\overset{(1)}{p} \in C_1(\bar{G}_\theta)$, $\det A_p(t, \overset{(i)}{p}(0,t), \overset{(i)}{q}(0,t)) \ne 0$ $\forall t \in (T^*, \theta]$, $i=1,2$.

Замечание. Так как $\sigma_1 \ne \sigma_2$, то $\overset{(2)}{p} \bar{\in} C_1(\bar{G}_\theta)$.

Очевидно, что ноль есть собственное значение матрицы $A_p(T^*, p^*, q^*)$. Пусть

У.4) $\zeta_1(T^*, p^*, q^*) = 0$, $\operatorname{Re} \zeta_k(T^*, p^*, q^*) < 0$, $2 \le k \le n$

В силу условия У.4) существуют [4] невырожденная $n \times n$ - матрица L и $(n-1) \times (n-1)$ - матрица V такие, что

$$L^{-1} A_p(T^*, p^*, q^*) L = \operatorname{diag}[0, V]$$

Отметим, что действительные части всех собственных значений матрицы V отрицательны, и, следовательно [I2]

$$|\exp Vt| < C_5 \exp(-C_6 t) \quad \forall t \ge 0. \tag{I.I}$$

Обозначим через

$$W(t,q,y) = L^{-1} A(t, p^* + Ly, q) \quad \forall t \in [0, \dot{T}], \; y \in R^n, \; q \in R^m. \tag{I.2}$$

Отметим, что

$$W(t,q,y)=L^{-1}A_p(T^*,p^*,q^*)Ly+\mathcal{F}(t,q,y),$$

где $\mathcal{F}(t,q,y)=L^{-1}[A(t,p^*+Ly,q)-A_p(T^*,p^*,q^*)Ly]$. Следовательно,

$$W^1(t,q,y)=a(y^1)^2+b_0(t-T^*)+\sum_{j=1}^{m}b_j(q_j-q_j^*)+\Phi(t,q,y) \qquad (I.3)$$

$$\hat{W}(t,q,y)=V\hat{y}+\hat{\mathcal{F}}(t,q,y), \qquad (I.4)$$

где a, b_s, $0\leq s\leq m$ – постоянные, а функция Φ и вектор-функция $\hat{\mathcal{F}}$ таковы, что

$$\Phi(*)=\Phi_t(*)=\Phi_y(*)=\Phi_q(*)=\Phi_{y^1y^1}(*)=\hat{\mathcal{F}}(*)=\hat{\mathcal{F}}_y(*)=0. \qquad (I.5)$$

В (I.5) и далее символ $(*)$ заменяет символ $(T^*,q^*,0)$.

Пусть

У.5) $a\neq 0$

Предположим, что

$$a>0. \qquad (I.6)$$

<u>Замечание</u>. Неравенство (I.6) не ограничивает общности: чтобы перейти от случая $a<0$ к случаю $a>0$ достаточно в (0.I)–(0.4) положить $p=-p$ и заменить (0.4) уравнением $(-1)A(t,-p(0,t),q(0,t))=0$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dp}{d\tau}=A(T^*,p,q^*),\ \tau\in R^1. \qquad (I.7)$$

Полагая в (I.7) $p=p^*+Ly$, в силу (I.2) получим

$$\frac{dy}{d\tau}=W(T^*,q^*,y). \qquad (I.8)$$

Согласно [4,13] существует единственная траектория $y = y(\tau)$ системы (1.8), стремящаяся при $\tau \to -\infty$ к состоянию равновесия $y = 0$; в силу (I.6) найдется $\overset{\circ}{\xi} \in (0,\infty)$ такое, что $\frac{dy^1(\tau)}{d\tau} > 0 \ \forall \tau \in (-\infty, 0)$, $y^1(0) = \overset{\circ}{\xi}$, и

$$|\hat{\xi}(y^1)| \le C(y^1)^2, \quad W^1(T^*, q^*, y^1, \hat{\xi}(y^1)) \ge C(y^1)^2 \ \forall y^1 \in [0, \overset{\circ}{\xi}], \tag{I.9}$$

где $\hat{\xi}(y^1) = \hat{y}(\sigma(y^1))$, а $\tau = \sigma(y^1)$ – функция обратная к $y^1 = y^1(\tau)$. Отметим, что вектор-функция $\hat{\xi} = \hat{\xi}(y^1)$ при $y^1 \in (0, \overset{\circ}{\xi}]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{\xi}}{dy^1} = [W^1(T^*, q^*, y^1, \hat{\xi})]^{-1} \hat{W}(T^*, q^*, y^1, \hat{\xi}). \tag{I.10}$$

Пусть

У.6) траектория $p(\tau) = p^* + Ly(\tau)$ системы (I.7) определена на $[0,\infty)$ и при $\tau \to +\infty$ стремится к асимптотически устойчивому состоянию равновесия $p = \bar{p}$, $|\bar{p}| < \infty$, системы (I.7).

Обозначим через $\mathcal{R}_T$, $T \in (T^*, \overset{\circ}{T}]$, множество определенных в $\mathcal{O}^1_T$ вектор-функций (p, q) таких, что $(p,q) = (\overset{(0)}{p}, \overset{(0)}{q})$ в $\bar{G}'_{T^*}$,

$$q \in C(\bar{G}_T),\ p_i \in C(\bar{G}_T[i_{T^*}]),\ p_i \in C(\bar{D}_T[i_{T^*}]),\ 1 \le i \le r,$$
$$(p,q) \in C_1(\mathcal{O}^1_T),\quad p(0, T^* + 0) = \bar{p}.$$

При любых $T \in (T^*, \overset{\circ}{T}]$, $(p,q) \in \mathcal{R}_T$ положим

$$p_i(\lambda_i(t - T^*), t) = p_i(\lambda_i(t - T^*), t+0) \ \forall t \in [T^*, \min(T, \tau^{-i,0,T^*}_{+1,1,0})],\ 1 \le i \le r.$$

<u>Определение I.2</u>. Вектор-функция $(p,q) \in \mathcal{R}_T$, $T \in (T^*, \overset{\circ}{T}]$ называется р.р. задачи $\mu = 0$ в $\bar{G}_T$ если она удовлетворяет в $\mathcal{O}^1_T$ уравнениям (0.1), (0.2), а при $t \in (T^*, T]$ уравнению (0.4) и неравенствам $\mathrm{Re}\,\zeta_k(t, p(0,t), q(0,t)) < 0$, $1 \le k \le n$.

Согласно [8] имеет место+)

<u>Предложение I.2</u>. Найдется такое $\vartheta \in (T^*, \theta]$, что в $\bar{G}_\vartheta$ существует единственное р.р. $(\overset{(3)}{p}, \overset{(3)}{q})$ задачи $\mu = 0$.

3. Обозначим через

$$\mathcal{D}(c^1) = \{(t,q): |t - T^*| \le c^1,\ |q - q^*| \le c^1\}\ \forall c^1 \in (0,\infty)$$

$$D(c^1, c^2) = \{(t,q,y^1): (t,q) \in \mathcal{D}(c^1),\ |y^1| \le c^2\}\ \forall c^i \in (0,\infty),\ i = 1,2.$$

Зафиксируем произвольное число $c_0^* \in (0, \overset{\circ}{\xi})$ такое, что для любой точки $(t, q, y^1) \in D(c_0^*, c_0^*)$ существует единственное решение $\hat{y} = f(t, q, y^1) \in C_2(D(c_0^*, c_0^*))$ системы $\hat{W}(t, q, y^1, \hat{y}) = 0$, удовлетворяющее равенству $f(*) = 0$.

В силу (I.5)

$$f_{y^1}(T^*, q^*, 0) = 0. \tag{I.II}$$

Обозначим через

$$E(t, q, y^1) = W^1(t, q, y^1, f(t, q, y^1))\quad \forall (t, q, y^1) \in D(c_0^*, c_0^*).$$

Пусть

У.7) существуют число $c_1^* \in (0, c_0^*)$ и функции $\varphi^i(t,q) \in C_2(\mathcal{D}(c_1^*))$, $\varphi^i(T^*, q^*) = 0$, $|\varphi^i(t,q)| \le c_0^*$, $i = 1,2$, $\varphi^1 \ne \varphi^2$ в $\mathcal{D}(c_1^*)$ такие, что $E(t, q, \varphi^i(t,q)) = 0\quad \forall (t,q) \in \mathcal{D}(c_1^*)$, $i = 1,2$.

Положим

$$B(t, q, y^1) = [y^1 - \varphi^1(t,q)][y^1 - \varphi^2(t,q)]\ \forall (t,q) \in \mathcal{D}(c_1^*),\ y^1 \in R^1.$$

+) В [8] следует внести следующие исправления: I) определение множества R_T заменить определением, приведенным выше; 2) последнее равенство в теореме 2 заменить равенством $\inf\limits_{T^* \le t \le \theta^0} \min\limits_{1 \le k \le n} |\mathrm{Re}\, \rho_K(t)| = 0$, где $\rho_K(t)$ – собственные значения матрицы $H_p(t, \overset{1}{p}(0,t), \overset{1}{q}(0,t))$.

<u>Лемма I.I</u>. Существуют числа $c_k \in (0; c_k^*)$, $k = 0,1$ и положительная функция $z(t,q,y^1) \in C_2(\mathcal{D}(c_1,c_0))$, такие, что $|\varphi^i(t,q)| \le c_0 \ \forall (t,q) \in \mathcal{D}(c_1)$, $i = 1,2$ и

$$E(t,q,y^1) = B(t,q,y^1)\, z(t,q,y^1) \ \forall (t,q,y^1) \in \mathcal{D}(c_1,c_0).$$

Доказательство леммы I.I опускается.

Обозначим через $z_0 = \min\limits_{\mathcal{D}(c_1,c_0)} z(t,q,y^1)$, $z_1 = \max\limits_{\mathcal{D}(c_1,c_0)} z(t,q,y^1)$. По лемме I.I $z_0 > 0$.

Положим

$$\overset{(i)}{y}(t) = L^{-1}[\overset{(i)}{p}(0,t) - p^*] \quad \forall t \in [0, \mathcal{T}],\ i = 1,2$$

В силу (I.2) и предложения I.I, выбрав достаточно малое $\rho_0 > 0$ получим

$$(t, \overset{(i)}{q}(0,t), \overset{(i)}{y}{}^1(t)) \in \mathcal{D}(c_1,c_0) \quad \forall t \in [T^* - \rho_0, T^* + \rho_0],\ i = 1,2$$

$$\hat{\overset{(i)}{y}}(t) = f(t, \overset{(i)}{q}(0,t), \overset{(i)}{y}{}^1(t)) \quad \forall t \in [T^* - \rho_0, T^* + \rho_0],\ i = 1,2 \qquad (I.12)$$

$$E(t, \overset{(i)}{q}(0,t), \overset{(i)}{y}{}^1(t)) = 0 \quad \forall t \in [T^* - \rho_0, T^* + \rho_0],\ i = 1,2 \qquad (I.13)$$

$$\det W_y(t, \overset{(i)}{q}(0,t), \overset{(i)}{y}(t)) \ne 0 \quad \forall t \in [T^* - \rho_0, T^* + \rho_0],\ t \ne T^*,\ i = 1,2 \qquad (I.14)$$

<u>Лемма I.2.</u> $\varphi^1(t, \overset{(i)}{q}(0,t)) - \varphi^2(t, \overset{(i)}{q}(0,t)) \ne 0 \ \forall t \in [T^* - \rho_0, T^* + \rho_0], t \ne T^*, i = 1,2.$

Доказательство

Пусть z — произвольное комплексное число. Обозначим через

$$\mathcal{K}^j(t,q,z) = \det[W_y(t,q,\varphi^j(t,q)), f(t,q,\varphi^j(t,q)) - zE_n] \ \forall (t,q) \in \mathcal{D}(c_1), j = 1,2$$

Пользуясь (I.3)–(I.5), (I.II), и тождеством

$$\hat{W}(t,q,y^1,f(t,q,y^1))=0 \quad \forall (t,q,y^1)\in D(c_1,c_0)$$

нетрудно показать, что

$$\mathcal{K}^j(t,q,z)=\begin{vmatrix} h^j(t,q)-z, & w^j_{12}, & \dots, & w^j_{1n} \\ z\,w^j_{21}, & v_{22}-z+w^j_{22}, & \dots, & v_{2n}+w^j_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z\,w^j_{n1}, & v_{n2}+w^j_{n2}, & \dots, & v_{nn}-z+w^j_{nn} \end{vmatrix}, \quad j=1,2 \,, \tag{I.15}$$

где $h^j(t,q)=E_{y^1}(t,q,\varphi^j(t,q))$, v_{kl} – элементы матрицы V, а функции $w^j_{sd}=w^j_{sd}(t,q)\to 0$ при $t\to T^*$, $|q-q^*|\to 0$.

В силу леммы I.I

$$h^j(t,q)=(-1)^{j+1}[\varphi^1(t,q)-\varphi^2(t,q)]\,z\,(t,q,\varphi^j(t,q)), \quad j=1,2 \,. \tag{I.16}$$

Полагая в (I.15) $z=0$, $q=\overset{(i)}{q}(0,t)$, $i=1,2$ и учитывая (I.12)–(I.14), (I.16) и лемму I.I, получим утверждение леммы I.2. Лемма I.2 доказана.

Принимая во внимание (I.13) и леммы I.I и I.2, занумеруем функции φ^1, φ^2 так, что $\overset{(0)}{y}{}^1(T^*-\rho_0)=\varphi^1(T^*-\rho_0,\overset{(0)}{q}(0,T^*-\rho_0))$.

<u>Лемма I.3.</u> $\overset{(0)}{y}{}^1(t)=\varphi^1(t,\overset{(0)}{q}(0,t))\ \forall t\in[T^*-\rho_0,T^*]$.

Доказательство леммы I.3. опускается.

<u>Лемма I.4.</u> $\overset{(i)}{y}{}^1(t)=\varphi^i(t,\overset{(i)}{q}(0,t))\ \forall t\in[T^*,T^*+\rho_0]$, $i=1,2$.

Доказательство

Обозначим через

$$w_i=\frac{d\overset{(i)}{y}{}^1(T^*+0)}{dt}, \quad i=1,2 \,. \tag{I.17}$$

Докажем, что

$$w_1 \neq w_2. \tag{I.18}$$

В силу (I.II), (I.I2)

$$\overset{(i)}{p}_t (0, T^* + 0) = L \frac{d\overset{(i)}{y}(T^* + 0)}{dt} = L u_i \quad , i = 1,2 , \tag{I.19}$$

где $u_i = (w_i , f_t(*) + f_q(*) q^*_t)$. Из (I.I9), предложения I.I и неравенства $\sigma_1 \neq \sigma_2$ вытекает (I.I8). Учитывая (I.I3) и леммы I.I и I.2 нетрудно показать, что

либо a_I) $\overset{(1)}{y}{}^1 (t) = \varphi^1 (t, \overset{(1)}{q} (0,t)) \ \forall t \in [T^*, T^* + \rho_0]$,

либо $б_I$) $\overset{(1)}{y}{}^1 (t) = \varphi^2 (t, \overset{(1)}{q} (0,t)) \ \forall t \in [T^*, T^* + \rho_0]$.

Допустим, что имеет место утверждение $б_I$). Тогда в силу леммы I.3 и предложения I.I

$$w_1 = \varphi^1_t (T^*, q^*) + \varphi^1_q (T^*, q^*) q^*_t = \varphi^2_t (T^*, q^*) + \varphi^2_q (T^*, q^*) q^*_t . \tag{I.20}$$

Вследствие (I.I3) и лемм I.I и I.2

либо a_2) $\overset{(2)}{y}{}^1 (t) = \varphi^1 (t, \overset{(2)}{q} (0,t)) \ \forall t \in [T^*, T^* + \rho_0]$,

либо $б_2$) $\overset{(2)}{y}{}^1 (t) = \varphi^2 (t, \overset{(2)}{q} (0,t)) \ \forall t \in [T^*, T^* + \rho_0]$.

Каждое из утверждений a_2) и $б_2$) вместе с (I.20) приводит к противоречию с (I.I8). Итак, имеет место утверждение a_I).

В силу (I.I8) и утверждения a_I) имеет место утверждение $б_2$). Лемма I.4. доказана.

Вследствие леммы I.4

$$w_i = \varphi^i_t (T^*, q^*) + \varphi^i_q (T^*, q^*) q^*_t \quad , i = 1,2 \tag{I.21}$$

4. Пусть

у.8) $Re\, \zeta_k (t, \overset{(0)}{p} (0,t), \overset{(0)}{q} (0,t)) < 0 \ \ \forall t \in [0, T^*) , 1 \leq k \leq n$.

<u>Теорема I.I</u>. Существует такое число $\rho^* \in (0, \rho_0)$, что при $t \in (T^*, T^* + \rho^*]$

$$z_1(t,\overset{(1)}{p}(0,t),\overset{(1)}{q}(0,t)) > 0, \quad \mathrm{Re}\, z_s(t,\overset{(1)}{p}(0,t),\overset{(1)}{q}(0,t)) < 0,\ 2 \le s \le n \tag{I.22}$$

$$\mathrm{Re}\, z_i\,(t,\overset{(2)}{p}(0,t),\overset{(2)}{q}(0,t)) < 0, \quad 1 \le i \le n . \tag{I.23}$$

Доказательство

Пусть z — произвольное комплексное число, и

$$\det\left[V - z E_{n-1}\right] = (-1)^{n-1} z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-2} z + a_{n-1} .$$

Так как действительные части всех собственных значений матрицы V отрицательные, то [I2]

$$\mathrm{sign}\ a_{n-1} = (-1)^{n-1} . \tag{I.24}$$

Обозначим через $\mathcal{W}^j(t,q,\xi,z)$ определитель, получающийся из определителя $\mathcal{X}^j(t,q,z)$ при замене функции $h^j(t,q)$ произвольным числом $\xi \in R^1$. Разложив определитель $\mathcal{W}^j(t,q,\xi,z)$ по элементам первой строки, получим

$$\mathcal{W}^j(t,q,\xi,z) = (\xi - z)\left[(-1)^{n-1} z^{n-1} + (a_1 + \omega_1^j) z^{n-2} + \dots + (a_{n-1} + \omega_{n-1}^j)\right] + \sum_{s=1}^{n-1} \omega^j_{n-1+s} z^s = (-1)^n z^n + d_1^j(\xi) z^{n-1} + \dots + d_{n-1}^j(\xi) z + d_n^j(\xi), \tag{I.25}$$

где $\omega^j_k = \omega^j_k(t,q) \to 0$ при $t \to T^*$, $|q - q^*| \to 0$, а

$$d_n^j(\xi) = \xi\,(a_{n-1} + \omega^j_{n-1}) . \tag{I.26}$$

Пусть $z^j_k(t,q,\xi)$, $1 \le k \le n$ — корни полинома $\mathcal{W}^j(t,q,\xi,z)$. Легко видеть, что существует такое $c_2 \in (0, c_1)$, что при соответствующей нумерации корней $z^j_k(t,q,\xi)$ при $(t,q) \in D(c_2)$

$$z_1^j(t,q,0) = 0, \quad \mathrm{Re}\, z_k^j(t,q,0) < 0, \quad 2 \le k \le n, \quad j = 1,2 . \tag{I.27}$$

Учитывая (I.27), (I.24) нетрудно доказать существование такого числа $c_3 \in (0, c_2)$, что при любых $(t,q) \in D(c_3)$, $\xi \neq 0$, $|\xi| \le c_3$ и $j = 1,2$

$$\operatorname{sign} d_n^j(\xi) = (-1)^{n-1} \operatorname{sign} \xi \tag{I.28}$$

$$\operatorname{Im} z_1^j(t,q,\xi) = 0, \quad \operatorname{Re} z_1^j(t,q,\xi) \neq 0, \quad \operatorname{sign} z_1^j(t,q,\xi) = \operatorname{sign}\xi \tag{I.29}$$

$$\operatorname{Re} z_k^j(t,q,\xi) < 0, \quad 2 \le k \le n. \tag{I.30}$$

Положим

$$\xi^j(t) = h^j(t, q^{(j)}(0,t)) \quad \forall t \in [T^* - \rho_0, T^* + \rho_0], \; j = 1,2$$

Тогда при $t \in [T^* - \rho_0, T^* + \rho_0]$

$$\mathcal{X}^j(t, q^{(j)}(0,t), z) = \mathcal{W}^j(t, q^{(j)}(0,t), \xi^j(t), z), \; j = 1,2. \tag{I.31}$$

Зафиксируем произвольное $\rho^* \in (0, \rho_0)$ такое, что при $t \in [T^* - \rho^*, T^* + \rho^*]$

$$(t, q^{(j)}(0,t)) \in D(c_3), \; |\xi^j(t)| \le c_3, \; j = 1,2.$$

Из (I.2), (I.12), леммы I.3, условия У.8) и (I.31) имеем

$$\operatorname{Re} z_k^1(t, q^{(1)}(0,t), \xi^1(t)) < 0 \quad \forall t \in [T^* - \rho^*, T^*), \; 1 \le k \le n \tag{I.32}$$

Согласно [I2] в силу (I.32)

$$\operatorname{sign} d_n^1(\xi^1(t)) = (-1)^n \quad \forall t \in [T^* - \rho^*, T^*)$$

Поэтому вследствие (I.28), (I.16) и леммы I.I

$$\varphi^1(t, q^{(0)}(0,t)) - \varphi^2(t, q^{(0)}(0,t)) < 0 \quad \forall t \in [T^* - \rho^*, T^*) \tag{I.33}$$

Из (I.33), (I.2I), (I.I8) получим

$$w_1 - w_2 = 0 \tag{I.34}$$

Учитывая (I.34), выберем $\rho^* > 0$ столь малым, что

$$\varphi^1(t, q^{(j)}(0,t)) - \varphi^2(t, q^{(j)}(0,t)) > 0 \quad \forall t \in (T^*, T^* + \rho^*], \; j = 1,2. \tag{I.35}$$

Тогда

$$\operatorname{sign} \gamma^j(t) = (-1)^{j+1} \quad \forall t \in (T^*, T^* + \rho^*], \ j = 1,2. \tag{I.36}$$

Согласно (I.36), (I.29), (I.30) при $t \in (T^*, T^* + \rho^*]$

$$\operatorname{Im} \varkappa_1^j (t, q^{(j)}(0,t), \gamma^j(t)) = 0, \ \operatorname{sign} \varkappa_1^j (t, q^{(j)}(0,t), \gamma^j(t)) = (-1)^{j+1}, j = 1,2 \tag{I.37}$$

$$\operatorname{Re} \varkappa_k^j (t, q^{(j)}(0,t), \gamma^j(t)) < 0 \ , \ 2 \le k \le n \ , \ j = 1,2 \ . \tag{I.38}$$

Из (I.38), (I.37), (I.31),(I.2), (I.12) и леммы I.4 вытекает (I.22),(I.23). Теорема I.I доказана.

5. В теоремах I и 2, сформулированных во введении, фигурируют следующие условия У.9) и У.10).

У.9) $\operatorname{Re} z_i (t, \overset{(2)}{p}(0,t), \overset{(2)}{q}(0,t)) < 0 \quad \forall t \in [T^* + \rho^*, \mathcal{T}]$, $1 \le i \le n$

У.10) Каковы бы ни были $1 \le i \le 2$, $\tau \in R^1$ при $t \in (T^*, \overset{\circ}{T}_i]$, $\overset{\circ}{T}_i = \min(\mathcal{T}, \tau^{-i,0,T^*}_{+1,1,0})$, существует решение $p_i(t,\tau)$ задачи

$$\frac{dp_i}{dt} = P_i(\varkappa_i^-(t,0,T^*), t, p_i, \overset{1}{P}_{j\ne i}(\varkappa_i^-(t,0,T^*),t), \overset{1}{q}(\varkappa_i^-(t,0,T^*),t)),$$

$$p_i|_{t=T^*} = \rho_i(\tau) \ ,$$

где $\rho_i(\tau)$ – соответствующая K_i – мерная компонента решения $\rho = \rho(\tau)$ системы (I.7) указанного в условии У.6).

Условие У.10) существенно в теореме 2. В самом деле, можно построить такой пример задачи $\mu = 0$, что нарушение условия У.10) приводит к отсутствию в $\bar{G}_{\mathcal{T}}$ решения задачи $\mu > 0$ при любом сколь угодно малом $\mu > 0$ какова бы ни была вектор-функция $S(t) \in C_2[0, \mathcal{T}]$.

§ 2. Исследование задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

I. Введем

Определение 2.I.[+] Решением задачи $\mu \to 0$ в $\overline{G}_T$, $T \in (0, \tilde{T}]$, называется вектор-функция $(p, q) \in C(\overline{G}_T)$ с компонентами $p_i \in C_1(\overline{G}_T[i_0])$, $p_i \in C_1(\overline{D}_T[i_0])$, $1 \le i \le r$, $q \in C_1(\overline{G}_T)$, удовлетворяющая уравнениям (0.I)–(0.4) при соответствующих $(x,t) \in \overline{G}_T$.

Отметим, что если $(p(\mu,x,t), q(\mu,x,t))$ есть решение задачи $\mu \to 0$ в $\overline{G}_T$, $T \in (0,\tilde{T}]$, то в силу (0.4), (I.2) $y(\mu,t) = L^{-1}[p(\mu,0,t) - p^*]$ удовлетворяет уравнению

$$\mu \frac{dy(\mu,t)}{dt} = W(t, q(\mu,0,t), y(\mu,t)) + \mu \mathcal{S}(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

где $\mathcal{S}(t) = L^{-1} S(t)$. При исследовании задачи $\mu \to 0$ предположим, что неравенство (I.6) имеет место.

Замечание. Неравенство (I.6) не ограничивает общности: чтобы перейти от случая $a < 0$ к случаю $a > 0$ достаточно положить $p = -p$ в (0.I)–(0.4).

Зафиксируем произвольное число $\delta^* \in (0, \min[1, \frac{1}{2}p^*, (\frac{1}{2}T^*)^{1/3}, \frac{1}{2}(\tilde{T}-T^*)])$. В §§ 2–3 используются следующие обозначения

$$T_0 = T^* - \delta^3, \quad T_1 = T^* + \delta \quad \forall \delta \in (0, \delta^*).$$

Из [I] следует, что каковы бы ни были $\delta \in (0, \delta^*)$ и $S(t) \in C_2[0,\tilde{T}]$ найдется, вообще говоря, зависящее от δ и $S(t)$ число $\mu_1(\delta) > 0$ (зависимость от $S(t)$ далее не указывается) такое, что при любом $\mu \in (0, \mu_1(\delta))$ в $\overline{G}_{T_0}$ существует единственное решение $(p(\mu,x,t), q(\mu,x,t))$ задачи $\mu \to 0$, и

[+] Определение 2.I вводится в связи с тем, что при $\mu \to 0$, вообще говоря, не выполняется условие согласования, необходимое для существования в $G_{\tilde{T}}$ решения задачи $\mu \to 0$ класса $C_1(\overline{G}_{\tilde{T}})$.

$$\begin{cases} \max\limits_{\bar G_{T_0}} |p(\mu,x,t)-\overset{(0)}{p}(x,t)| + \max\limits_{\bar G_{T_0}} |q(\mu,x,t)-\overset{(0)}{q}(x,t)| < C(T_0)\mu < \delta^3 \\ \max\limits_{0\le t\le T_0} |y(\mu,t)-\overset{(0)}{y}(t)| + \sup\limits_{0<t\le T_0} \left| \dfrac{dy(\mu,t)}{dt} - \dfrac{d\overset{(0)}{y}(t)}{dt} \right| + \\ \qquad + \max\limits_{\bar G_{T_0}} |q_t(\mu,x,t) - \overset{(0)}{q_t}(x,t)| = \omega(\mu) < \delta^3 \end{cases} \tag{2.1}$$

Вследствие (2.1) существует определенная при $\Delta\in(0,1)$ функция $\delta_1(\Delta)\in(0,\delta^*)$ и определенная при $\Delta\in(0,1),\delta\in(0,\delta_1(\Delta))$ функция $\mu_1(\Delta,\delta)\in(0,\mu_1(\delta))$ такие, что при любых $\Delta\in(0,1)$, $\delta\in(0,\delta_1(\Delta))$, $\mu\in(0,\mu_1(\Delta,\delta))$

$$|q_t(\mu,0,T_0)-\overset{*}{q}_t| < \Delta. \tag{2.2}$$

Зафиксируем произвольные $\Delta\in(0,1),\delta\in(0,\delta_1(\Delta)),\mu\in(0,\mu_1(\Delta,\delta))$. Обозначим через $\overset{0}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$ множество m -мерных вектор-функций $V(t)$ таких, что

а) каждая вектор-функция $V(t)$ непрерывна всюду на $[0,T_1]$ за исключением разве лишь одной точки $t=t(V)\in(T_0,T_1)$, где существуют и конечны величины $V_j(t(V)\pm 0)$, $1\le j\le m$;

б) $V(t)=q_t(\mu,0,t)\ \forall t\in[0,T_0]$, и $|V(t)-\overset{*}{q}_t|\le\Delta\ \forall t\in[T_0,T_1]$.

Зафиксируем произвольные вектор-функцию $V(t)\in\overset{0}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$ и число $\nu\in(-\infty,+\infty)$. Пусть вектор-функция $\varphi(t)\in C_2[0,\tau]$ и $\varphi^1(t)\equiv\nu$, $\hat\varphi(t)=0\ \forall t\in\left[\frac{T^*}{2},\tau\right]$. В настоящем параграфе решение $(y[t;V],q[t;V])$ задачи

$$\mu\dot y^1 = W^1(t,q,y)+\mu\varphi^1(t) \tag{2.3}$$

$$\mu\dot{\hat y} = \hat W(t,q,y)+\mu\hat\varphi(t) \tag{2.4}$$

$$y|_{t=T_0} = y(\mu,T_0) \tag{2.5}$$

$$\dot q = V(t),\quad q|_{t=T_0}=q(\mu,0,T_0) \tag{2.6}$$

изучается при $t\ge T_0$.

Отметим, что $y[t;v]=y(\mu,t)$, $q[t;v]=q(\mu,0,t)$ $\forall t\in[0,T_0]$.
В § 2 предполагается, что $w_1\neq 0$.

2. Установим некоторые вспомогательные неравенства.
Положим $\tau_0=T_0-\delta^3$ $\forall\delta\in(0,\delta^*)$. В силу (2.I) при $\delta\in(0,\delta^*)$, $\mu\in(0,\mu_1(\delta))$

$$|q[t;v]-q^*|<C_7\delta \quad \forall t\in[\tau_0,T_1]. \tag{2.7}$$

Пусть $C_7>1$ и $\delta^*>0$ таково, что $C_7\delta^*<c_1$, где c_1 – постоянная, фигурирующая в лемме I.I.
Обозначим через
$\varphi^i[t;v]=\varphi^i(t,q[t;v]),i=1,2$, $\vartheta[t;v]=\varphi^1[t;v]-\varphi^2[t;v]$ $\forall t\in[T_0,T_1]$.
Вследствие (I.2I), (I.34), (2.7), (2.I), выбрав Δ,δ,μ достаточно малыми, получим+)

$$-2(w_1-w_2)\delta^3<\vartheta[T_0;v]<-\frac{1}{2}(w_1-w_2)\delta^3 \tag{2.8}$$

$$|\dot\varphi^i[t;v]-w_i|<\omega_1(\delta,\Delta) \quad \forall t\in[T_0,T_1],\ i=1,2, \tag{2.9}$$

где функция $\omega_1(\delta,\Delta)$ не зависит от выбора вектор-функции $v(t)\in\mathring{\mathfrak{A}}^\mu_\Delta(T_0)$,

$$0<\frac{1}{2}(w_1-w_2)<\dot\vartheta[t;v]<2(w_1-w_2) \quad \forall t\in[T_0,T_1]. \tag{2.10}$$

Обозначим через $t_0[v]$ решение уравнения $\vartheta[t;v]=0$. Отметим, что

$$T_0<t_0[v]<T_0+4\delta^3<T^*+\frac{1}{4}\delta \tag{2.11}$$

$$\vartheta[t;v]<0 \quad \forall t\in[T_0,t_0),\quad \vartheta[t;v]>0 \quad \forall t\in(t_0,T_1] \tag{2.12}$$

В § 2 символы $y[t;v]$, $q[t;v]$, $\varphi^i[t;v]$, $\vartheta[t;v]$, $t_0[v]$ рассматриваются всегда при фиксированной вектор-функции $v(t)\in\mathring{\mathfrak{A}}^\mu_\Delta(T_0)$. Поэтому, не опасаясь недоразумения, условимся эти символы в § 2 записывать соответственно в виде $y[t]$, $q[t]$,

+) Далее мы будем иногда опускать возникающие по ходу проводимых рассуждений очевидные ограничения на Δ,δ,μ и некоторые вводимые далее числа.

$\varphi^i[t]$, $\vartheta[t]$, t_0.

Пусть число $d \in (0, \infty)$. При $t \in [T_0, T_1]$ обозначим через $y^1 = \psi_1^+(t; d)$ и через $y^1 = \psi_2^+(t; d)$ соответственно меньший и больший корни уравнения $B(t, q[t], y^1) = \mu d^2$. Легко видеть, что при $t \in [T_0, T_1]$

$$0 < \min(\varphi^1[t], \varphi^2[t]) - \psi_1^+(t; d) < \mu^{1/2} d \qquad (2.13)$$

$$0 < \psi_2^+(t; d) - \max(\varphi^1[t], \varphi^2[t]) < \mu^{1/2} d\,. \qquad (2.14)$$

Обозначим через $\tau_i(d)$ корень уравнения $\vartheta[t] = (-1)^i 2\mu^{1/2} d,\ i = 1,2$. В силу (2.8), (2.10), (2.11), (1.34)

$$|\tau_i(d) - t_0| < C\mu^{1/2} d\,,\ i = 1,2\,,\ T_0 < \tau_1(d) < t_0 < \tau_2(d) < T^* + \frac{3}{4}\delta \qquad (2.15)$$

при достаточно малом $\mu > 0$. При $t \in [T_0, \tau_1(d)] \cup [\tau_2(d), T_1]$ обозначим через $y^1 = \psi_1^-(t; d)$ и через $y^1 = \psi_2^-(t; d)$ соответственно меньший и больший корни уравнения $B(t, q[t], y^1) = -\mu d^2$. Заметим, что при $t \in [T_0, \tau_1(d)] \cup [\tau_2(d), T_1]$

$$0 < \psi_1^-(t; d) - \min(\varphi^1[t], \varphi^2[t]) < \mu^{1/2} d \qquad (2.16)$$

$$0 < \max(\varphi^1[t], \varphi^2[t]) - \psi_2^-(t; d) < \mu^{1/2} d\,. \qquad (2.17)$$

Зафиксируем произвольные числа C_8, C_9 такие, что

$$\sum_{i=1}^{2} \max_{D(C_7\delta)} |\varphi^i(t, q)| + \delta + \max_{\tau_0 \le t \le T^*} |\overset{(0)}{y}{}^1(t)| < C_8 \delta \qquad (2.18)$$

$$\max_{D(C_7\delta;\, C_8\delta)} |f(t, q, y^1)| + \delta + \max_{\tau_0 \le t \le T^*} |\hat{\overset{(0)}{y}}(t)| < C_9 \delta \qquad (2.19)$$

Пусть $\delta^* > 0$ таково, что $C_8\delta^* < C_0$, где C_0 – постоянная, фигурирующая в лемме I.I. Вследствие (2.I) при $t \in [\tau_0, T_0]$

$$|y^1[t]| < C_8\delta, \quad |\hat{y}[t]| < C_9\delta. \tag{2.20}$$

При $t \in [\tau_0, T_0]$ рассмотрим вектор-функцию $R(t) = \hat{y}[t] - f(t, q[t], y^1[t])$. Легко видеть, что

$$\mu \dot{R}(t) = VR(t) + \mathcal{X}_1(t) + \mu \mathcal{X}_2(t), \tag{2.21}$$

где

$$\mathcal{X}_1(t) = \hat{F}(t, q[t], y[t]) - \hat{F}(t, q[t], y^1[t], f(t, q[t], y^1[t])),$$

$$\mathcal{X}_2(t) = -\{f_t(t, q[t], y^1[t]) + f_q(t, q[t], y^1[t])V(t) +$$
$$+ f_{y^1}(t, q[t], y^1[t])\dot{y}^1[t]\}.$$

В силу (2.2I), (I.I) при $t \in [\tau_0, T_0]$

$$|R(t)| < C_5|R(\tau_0)|\exp\left[-\frac{C_6(t-\tau_0)}{\mu}\right] +$$
$$+ \frac{C_5}{\mu}\int_{\tau_0}^{t}\left\{\exp\left[-\frac{C_6(t-\tau)}{\mu}\right]\right\}\left[|\mathcal{X}_1(\tau)| + \mu|\mathcal{X}_2(\tau)|\right]d\tau. \tag{2.22}$$

Вследствие (I.5), (2.I), (2.7), (2.20)

$$|R(\tau_0)| < C, \quad |\mathcal{X}_1(t)| < \omega(\delta)|R(t)|, \quad |\mathcal{X}_2(t)| < C \quad \forall t \in [\tau_0, T_0]. \tag{2.23}$$

Подставляя (2.23) в (2.22) и выбирая δ достаточно малым согласно [I4], получим

$$|\hat{y}[T_0] - f(T_0, q[T_0], y^1[T_0])| < C\exp\left(-\frac{C_6\delta^3}{2\mu}\right) + \mu C - \mu C_{10} \tag{2.24}$$

Положим

$$E[t] = E(t, q[t], y^1[t]),\ B[t] = B(t, q[t], y^1[t]).$$

Согласно (2.3) при $t = T_0$

$$\mu \dot{y}^1[t] = E[t] + K(t) + \mu \nu^0 , \tag{2.25}$$

где $K(t) = W^1(t, q[t], y[t]) - W^1(t, q[t], y^1[t], f(t, q[t], y^1[t]))$.

В силу (I.5), (2.7), (2.20), (2.24) $|K(T_0)| \le \mu\, \omega(\mu, \delta)$.

Учитывая (I.17), (2.I) предположим, что при выбранных δ, μ

$$|\dot{y}^1[T_0] - w_1| < \frac{1}{2}|w_1| \tag{2.26}$$

и $\omega(\mu, \delta) < \frac{1}{4}|w_1|$. Тогда согласно (2.25)

$$\mu\left(w_1 - \frac{3}{4}|w_1| - \nu^0\right) < E[T_0] < \mu\left(w_1 + \frac{5}{4}|w_1| - \nu^0\right) \tag{2.27}$$

Пусть все рассуждения п.2 справедливы при $0 < \Delta < \Delta_0 < 1$, $\delta \in (0, \delta_2(\Delta))$, $\mu \in (0, \mu_2(\Delta, \delta))$.

<u>Лемма 2.I</u>. Пусть число $C_{11} \in (0, \infty)$. Тогда найдутся не зависящее от C_{11} число $\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$ и функции $\delta_3(\Delta, C_{11}) \in (0, \delta_2(\Delta))$ и $\mu_3(\Delta, \delta, C_{11}) \in (0, \mu_2(\Delta, \delta))$, зависящие от C_{11}, определенные соответственно при $\Delta \in (0, \Delta_1)$ и $\Delta \in (0, \Delta_1)$, $\delta \in (0, \delta_3(\Delta, C_{11}))$ и обладающие следующим свойством: если $\Delta \in (0, \Delta_1)$, $\delta \in (0, \delta_3(\Delta, C_{11}))$, $\mu \in (0, \mu_3(\Delta, \delta, C_{11}))$, $v(t) \in \mathring{\mathfrak{A}}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$, решение $y[t]$ существует на $[T_0, T]$, где $T \in (T_0, T_1]$, и при $t \in [T_0, T]$

$$|y^1[t]| \le C_8\delta,\ |\hat{y}[t]| \le C_9\delta,\ |\dot{y}^1[t]| \le C_{11} \tag{2.28}$$

то

$$\mu^{-1}E[t] - \omega_2^2(\mu, \delta) + \nu^0 < \dot{y}^1[t] < \mu^{-1}E[t] + \omega_2^2(\mu, \delta) + \nu^0 \tag{2.29}$$

$$\dot{y}^1[t] - \dot{y}^1[t] < \mu^{-1}E[t] + \frac{3}{4}|w_1| + \nu^0 - w_1 \tag{2.30}$$

$$\dot{y}^1[t] - \dot{y}^2[t] < \mu^{-1}E[t] - \frac{1}{4}w_2 + \nu^0 \quad \text{если } w_2 > 0 \tag{2.31}$$

$$\dot{y}^1[t]-\dot{y}^2[t]>\mu^{-1}\varepsilon[t]+\frac{1}{4}|w_2|+\nu \quad , \qquad \text{если } w_2<0 \quad (2.32)$$

$$|\hat{y}[t]-f(t,q[t],y^1[t])|<\mu C_{12} \qquad (2.33)$$

$$|\dot{\hat{y}}[t]|<C_{13} \quad , \qquad (2.34)$$

где постоянные C_{12}, C_{13} не зависят от C_{11} .

Доказательство

Очевидно, что при $t\in[T_0,T]$ имеет место неравенство (2.22), где τ_0 следует заменить на T_0. В силу (I.5),(I.II),(2.7),(2.28) при $t\in[T_0,T]$

$$|\mathcal{L}_1(t)|\le\omega(\delta)|R(t)|,\ |\mathcal{L}_2(t)|\le C_{14}+\omega(\delta)C_{11}<C_{14}+1. \qquad (2.35)$$

Подставляя (2.24), (2.35) в (2.22) и выбирая δ достаточно малым, согласно [I4] получим (2.33). Так как (2.25) имеет место при $t\in[T_0,T]$, то вследствие (I.5), (2.7), (2.28), (2.33) имеем (2.29) при $t\in[T_0,T]$. Пусть $\omega_1(\delta,\Delta)<\frac{1}{8}|w_1|$, $\omega_2^2(\mu,\delta)<\frac{5}{8}|w_1|$ и если $w_2\neq0$, то $\omega_1(\delta,\Delta)<\frac{1}{8}|w_2|$, $\omega_2^2(\mu,\delta)<\frac{5}{8}|w_2|$. Тогда из (2.29), (2.9) получим (2.30)–(2.32). Продифференцировав (2.4) по t получим, что функция $|\hat{y}[t]|$ удовлетворяет при $t\in[T_0,T]$ неравенству (2.22), где следует положить $\tau_0=T_0$,

$$R(t)=\dot{\hat{y}}[t],\quad \mathcal{L}_2(t)=0,$$

$$\mathcal{L}_1(t)=\hat{\mathcal{F}}_t(t,q[t],y[t])+\hat{\mathcal{F}}_q(t,q[t],y[t])v(t)+$$

$$+\hat{\mathcal{F}}_{y^1}(t,q[t],y[t])\dot{y}^1[t]+\hat{\mathcal{F}}_{\hat{y}}(t,q[t],y[t])\dot{\hat{y}}[t].$$

Учитывая (I.5), (2.7), (2.28), при $t\in[T_0,T]$ получим

$$|\mathscr{X}_1(t)|\le C_{15}+\omega(\delta)C_{11}+\omega(\delta)|\overset{\bullet}{\hat{y}}[t]|<C_{15}+1+\omega(\delta)|\overset{\bullet}{\hat{y}}[t]|; \quad (2.36)$$

Вследствие вытекающего из (2.I) неравенства $|\overset{\bullet}{\hat{y}}[T_0]|<C$, неравенства (2.36) и соответствующего неравенства из [I4] при достаточно малом δ неравенство (2.34) имеет место при $t\in[T_0,T]$. Лемма 2.I доказана.

3. В настоящем пункте доказывается

Теорема 2.I. Пусть $w_1\ne 0$. Тогда существуют числа $\sigma>0$, $\Delta_1^*\in(0,1)$, определенная при $\Delta\in(0,\Delta_1^*)$ функция $\delta_1^*(\Delta)\in(0,\delta_1(\Delta))$ и определенная при $\Delta\in(0,\Delta_1^*)$, $\delta\in(0,\delta_1^*(\Delta))$ функция $\mu_1^*(\Delta,\delta)\in(0,\mu_1(\Delta,\delta))$ такие, что каковы бы ни были $\Delta\in(0,\Delta_1^*)$, $\delta\in(0,\delta_1^*(\Delta))$, $\mu\in(0,\mu_1^*(\Delta,\delta))$, $V(t)\in\overset{\bullet}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$ решение $(y[t],q[t])$ задачи (2.3)–(2.6) при $\mathcal{V}=-\frac{\sigma}{2}(1-\operatorname{Sign} w_1)$ существует на $[T_0,T_1]$, и

$$|y[t]|<C\delta \quad \forall t\in[T_0,T_1] \quad (2.37)$$

$$|\dot{y}[t]|<C \quad \forall t\in[T_0,T_1] \quad (2.38)$$

$$|\hat{\dot{y}}[t]-f(t,q[t],y^1[t])|<C_{12}\mu \quad \forall t\in[T_0,T_1] \quad (2.39)$$

$$|y^1[t]-\varphi^1(t,q[t])|<C\mu^{1/2} \quad \forall t\in[T_0,t_0[V]] \quad (2.40)$$

$$|y^1[t]-\varphi^2(t,q[t])|<C\mu^{1/2} \quad \forall t\in[t_1[V],T_1], \quad (2.41)$$

где число $t_1[V]$ удовлетворяет неравенствам

$$t_0[V]\le t_1[V]<T^*+\frac{3}{4}\delta,\ t_1[V]-t_0[V]<C\mu^{1/2} \quad (2.42)$$

Доказательство

Доказательство теоремы 2.I. разделено на п.п. 1^0–4^0. В 1^0 устанавливаются некоторые неравенства, справедливые при любых $w_2 < w_1$, $w_1 \neq 0$. В 2^0 теорема 2.I доказывается в случае $w_1 < 0$ и в случае $w_1, w_2 > 0$, в 3^0 – в случае $w_1 > 0$, $w_2 < 0$, а в 4^0 – в случае $w_1 > 0$, $w_2 = 0$.

Положим $\sigma = 4(|w_1| + |w_2| + 1)$, $d = 1 + \sigma^{1/2} z_0^{-1/2}$.
Пусть числа $h_2 \in (0, \infty)$, $C_{11} = \sigma + z_1(d^2 + 9h_2^2)$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$, $\delta \in (0, \delta_3(\Delta, C_{11}))$, $\mu \in (0, \mu_3(\Delta, \delta, C_{11}))$ и вектор-функция $v(t) \in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$.

1^0. Согласно (2.26) при $t = T_0$

$$|\dot{y}^1[t]| < C_{11}. \tag{2.43}$$

Положим $\bar{t} = T_1$ если $w_1 < 0$ или $w_1, w_2 > 0$ и $\bar{t} = t_0$, если $w_1 > 0, w_2 \leq 0$. Пусть $\mathfrak{M}_0$ есть множество таких $\tau \in (T_0, \bar{t}]$, что $y[t]$ существует на $[T_0, \tau]$ и при $t \in [T_0, \tau]$ имеют место неравенства (2.20), (2.43). Пусть $\gamma_0 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}_0\}$.
Вследствие леммы I.3 и (2.I) $|y^1[T_0] - \varphi^1[T_0]| = \omega(\mu)$.
Поэтому в силу (2.8), (I.34)

$$y^1[T_0] < \varphi^1[T_0] + \omega(\mu) < \varphi^2[T_0] - \frac{1}{2}(w_1 - w_2)\delta^3 + \omega(\mu) < y^2[T_0]. \tag{2.44}$$

Учитывая (2.27), (2.44), (2.3) и лемму I.I, имеем

$$\psi_1^+(T_0; d) < y^1[T_0] < \varphi^1[T_0]. \tag{2.45}$$

Положим в лемме 2.I $T = \gamma_0$. Вследствие (2.44), (2.45), (2.29)–(2.31), (2.9), выбирая Δ, δ, μ достаточно малыми, получим при $t \in [T_0, \gamma_0]$

$$y^1[t] < \min\{y^1[t], y^2[t]\}. \qquad (2.46)$$

В силу (2.9) при $t \in [T_0, T_1]$

$$|\dot\psi_1^+(t;d)| - |w_1| + |w_2| + \omega(\delta,\Delta) < |w_1| + |w_2| + \frac{1}{2}. \qquad (2.47)$$

В силу (2.46) $b[t] > 0 \quad \forall t \in [T_0, \tau_0]$. Согласно (2.29),(2.47) и лемме I.I при $t \in [T_0, \tau_0]$

$$\dot y^1[t] - \dot\psi_1^+(t;d) > \mu^{-1} b[t] z_0 - [|w_1| + |w_2| + 1] + \varkappa. \qquad (2.48)$$

Из (2.45), (2.48) при $t \in [T_0, \tau_0]$ получим

$$\psi_1^+(t;d) < y^1[t]. \qquad (2.49)$$

В силу (2.46), (2.49), (2.7), (2.I3), (2.I4), (2.I8), (2.33) при $t \in [T_0, \tau_0]$ имеют место неравенства (2.20), и

$$0 < b[t] < \mu d^2. \qquad (2.50)$$

Вследствие (2.29), (2.50) неравенство (2.43) имеет место при $t \in [T_0, \tau_0]$. Следовательно,

$$\tau_0 = \bar t. \qquad (2.5I)$$

Из (2.20), (2.33), (2.34), (2.43) вытекает, что неравенства (2.37) – (2.39) имеют место при $t \in [T_0, \bar t\,]$.

Пусть все рассуждения в I^0 справедливы при $\Delta \in (0, \Delta_2)$, $\delta \in (0, \delta_4(\Delta, C_{11}))$, $\mu \in (0, \mu_4(\Delta, \delta, C_{11}))$.

2^0. Пусть $w_1 < 0$ или $w_1, w_2 > 0$. Согласно (2.5I) $\tau_0 = \bar t = T_1$ Положим $t_1[v] = t_0[v]$. В силу (2.II), (2.I3), (2.46), (2.49) имеем (2.40)-(2.42). Итак, если $w_1 < 0$ или $w_1, w_2 > 0$, то теорема 2.I доказана.

3^0. Пусть $w_1 > 0$, $w_2 < 0$. Пусть $\Delta \in (0, \Delta_2)$, $\delta \in (0, \delta_4(\Delta, C_{11}))$, $\mu \in (0, \mu_4(\Delta, \delta, C_{11}))$. Отметим, что при $t \in [T_0, t_0]$ имеют место неравенства (2.37)-(2.40). Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество таких $\tau\in(t_0,T_1]$, что $y[t]$ существует на $[t_0,\tau]$, и при $t\in[t_0,\tau]$ имеют место неравенства (2.20), (2.43) и $\delta[t]>0$. Согласно I° $\mathfrak{M}_1\neq\Phi$. Обозначим через $\mathfrak{T}_1=\sup\{\tau\in\mathfrak{M}_1\}$. Положим в лемме 2.I $T=\mathfrak{T}_1$. В силу (2.20), (2.33), (2.34), (2.43) неравенства (2.37)-(2.39) имеют место при $t\in[T_0,\mathfrak{T}_1]$. Вследствие (2.12), (2.32), (2.46)

$$y^1[t]\le\varphi^2[t]\quad\forall t\in[t_0,\mathfrak{T}_1]. \tag{2.52}$$

Легко видеть, что неравенства (2.49), (2.50), а, следовательно, и неравенства (2.20), (2.43), имеют место при $t\in[t_0,\mathfrak{T}_1]$. В силу (2.46), (2.49), (2.13)

$$-\mu^{1/2}d<y^1[t_0]-\varphi^2[t_0]<0. \tag{2.53}$$

Вследствие (2.32), (2.53)

$$y^1[t]-\varphi^2[t]>-\mu^{1/2}d+\frac{1}{4}|w_2|(t-t_0)\quad\forall t\in[t_0,\mathfrak{T}_1]. \tag{2.54}$$

Обозначим через $l(t)$ правую часть (2.54). Пусть $t=\xi$ есть корень уравнения $l(t)=0$. Учитывая (2.11), имеем

$$\xi=t_0+4\mu^{1/2}d\,|w_2|^{-1}<T_1. \tag{2.55}$$

Из (2.52),(2.55) вытекает, что $\mathfrak{T}_1<\xi$. Следовательно, $\delta[\mathfrak{T}_1]=0$ и в силу (2.52), (2.12)

$$y^1[\mathfrak{T}_1]=\varphi^2[\mathfrak{T}_1]. \tag{2.56}$$

В следствие (2.55)

$$t_0<\mathfrak{T}_1<t_0+4\mu^{1/2}d\,|w_2|^{-1}. \tag{2.57}$$

Согласно (2.57), (2.10)

$$0<\vartheta[t]<2C_{16}\mu^{1/2}\quad\forall t\in[t_0,\gamma_1]. \tag{2.58}$$

Зафиксируем произвольное число

$$h_1>\max\{C_{16},(w_1+|w_2|+1)^{1/2}\,\tau_0^{-1/2}\}. \tag{2.59}$$

Пусть $h_2>h_1$. В силу (2.10), (2.11), (2.58) $\gamma_1<\tau_2(h_1)<\tau_2(h_2)$ и

$$t_0<\tau_2(h_2)<T^*+\frac{1}{4}\delta+4\mu^{1/2}h_2(w_1-w_2)^{-1}<T^*+\frac{1}{2}\delta \tag{2.60}$$

при $\mu<\mu_5(\Delta,\delta,C_{11},h_2)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_2$ множество таких $\tau\in(\gamma_1,\tau_2(h_2)]$, что $y[t]$ существует на $[\gamma_1,\tau]$ и при $t\in[\gamma_1,\tau]$ имеют место неравенства (2.20), (2.43). Пусть $\gamma_2=\sup\{\tau\in\mathfrak{M}_2\}$. Положим в лемме 2.1 $T=\gamma_2$. В силу (2.20), (2.33), (2.34), (2.43) неравенства (2.37)–(2.39) имеют место при $t\in[\gamma_1,\gamma_2]$. Учитывая (2.12), (2.56), (2.30), (2.32) при $t\in(\gamma_1,\gamma_2]$ получим

$$\varphi^2[t]<y^1[t]<\varphi^1[t]. \tag{2.61}$$

Из (2.61), (2.33), (2.18), (2.19) вытекает, что неравенства (2.20) имеют место при $t\in(\gamma_1,\gamma_2]$. В следствие (2.61) и определения числа γ_2

$$-\mu h_2^2\le B[t]<0\quad\forall t\in(\gamma_1,\gamma_2]. \tag{2.62}$$

В силу (2.23), (2.56) и леммы 1.1 неравенство (2.33) имеет место при $t\in(\gamma_1,\gamma_2]$. Таким образом, $\gamma_2=\tau_2(h_2)$. Обозначим через

$$\phi(t)=\frac{1}{2}\{\varphi^1[t]+\varphi^2[t]\}\quad\forall t\in[T_0,T_1].$$

Отметим, что

$$\psi_1^-(t;h_2)<\phi(t)<\psi_2^-(t;h_2)\quad\forall t\in(\tau_2(h_2),T_1]. \tag{2.63}$$

Докажем, что если h_2 достаточно велико, то

$$y^1[\tau_2(h_2)] < \gamma(\tau_2(h_2)). \qquad (2.64)$$

Допустим, что при любом сколь угодно большом h_2

$$y^1[\tau_2(h_2)] \geq \gamma(\tau_2(h_2)). \qquad (2.65)$$

В следствие (2.56), (2.57), (2.I2) $y^1[\vartheta_1] < \gamma(\vartheta_1)$. Пусть существует такое $\eta \in [\tau_2(h_1), \tau_2(h_2)]$, что $y^1[\eta] = \gamma(\eta)$. Учитывая (2.9), (2.29), лемму I.I и (2.59) при достаточно малых Δ, δ, μ, не зависящих от η, h_1, h_2, имеем

$$\dot y^1[\eta] - \dot\gamma(\eta) < -\frac{z_0}{4\mu}\vartheta^2[\eta] + \frac{1}{2}[w_1 + |w_2| + 1] < 0. \qquad (2.66)$$

В силу (2.65),(2.66)

$$y^1[t] > \gamma(t) \quad \forall t \in [\tau_2(h_1), \tau_2(h_2)]. \qquad (2.67)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Обозначим через

$$\varphi^1_\varepsilon[t] = \varphi^1[t] - \varepsilon\vartheta[t], \ \varphi^2_\varepsilon[t] = \varphi^2[t] + \varepsilon\vartheta[t] \quad \forall t \in [t_0, T_1].$$

Очевидно, что

$$\varphi^2[t] < \varphi^2_\varepsilon[t] < \gamma(t) < \varphi^1_\varepsilon[t] < \varphi^1[t] \quad \forall t \in (t_0, T_1] \qquad (2.68)$$

В силу (2.46), (2.5I)

$$y^1[t_0] < \varphi^1_\varepsilon[t_0]. \qquad (2.69)$$

Из (2.29), (2.9) при достаточно малых $\varepsilon, \Delta, \delta$, не зависящих от h_1, h_2, имеем

$$\dot y^1[t] - \dot\varphi^1_\varepsilon[t] < \mu^{-1}E[t] - \frac{1}{2}w_1 \quad \forall t \in [t_0, \tau_2(h_2)]. \qquad (2.70)$$

Так как $E(t, q[t], \varphi^1_\varepsilon[t]) \leq 0$, то вследствие (2.69), (2.70) $y^1[t] < \varphi^1_\varepsilon[t] \ \forall t \in [t_0, \tau_2(h_2)]$. Учитывая теперь (2.67), (2.68), получим

$$\varphi_\varepsilon^2[t] < y^1[t] < \varphi_\varepsilon^1[t] \quad \forall t \in [\tau_2(h_1), \tau_2(h_2)]. \tag{2.71}$$

В силу (2.29), (2.71) при $t \in [\tau_2(h_1), \tau_2(h_2)]$

$$\dot y^1[t] - \dot\gamma(t) < \mu^{-1} \max_{\varphi_\varepsilon^2[t] \le y^1 \le \varphi_\varepsilon^1[t]} E(t, q[t], y^1) +$$

$$+ \frac{1}{2}(w_1 + |w_2| + 1) < -\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)\vartheta^2[t] z_0}{\mu} + \frac{1}{2}(w_1 + |w_2| + 1).$$

Поэтому, выбрав h_1 достаточно большим, при $t \in [\tau_2(h_1), \tau_2(h_2)]$ получим

$$\dot y^1[t] - \dot\gamma(t) < -\varepsilon(1-\varepsilon) 4 h_1^2 z_0 + \frac{1}{2}(w_1 + |w_2| + 1) = -c_{17}^2. \tag{2.72}$$

В следствие (2.71), (2.72) при $t \in [\tau_2(h_1), \tau_2(h_2)]$

$$y^1[t] - \gamma(t) < \varphi_\varepsilon^1[\tau_2(h_1)] - \gamma(\tau_2(h_1)) - c_{17}^2[t - \tau_2(h_1)] = \tag{2.73}$$

$$= \mu^{1/2}(1 - 2\varepsilon) h_1 - c_{17}^2 [t - \tau_2(h_1)].$$

Полагая в (2.73) $t = \tau_2(h_2)$ и выбирая h_2 достаточно большим, получим противоречие с (2.65). Итак, неравенство (2.64) установлено.

Обозначим через $\mathfrak{M}_3$ множество таких $\tau \in [\tau_2(h_2), T_1]$, что $y[t]$ существует на $[\tau_2(h_2), \tau]$ и при $t \in [\tau_2(h_2), \tau]$ имеют место неравенства (2.20), (2.43). Пусть $\tau_3 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}_3\}$. Положим в лемме 2.1 $T = \tau_3$. В силу (2.20), (2.33), (2.34), (2.43) неравенства (2.37)–(2.39) имеют место при $t \in [\tau_2, \tau_3]$. В следствие (2.61), (2.64) и равенства $\gamma(\tau_2(h_2)) = \psi_1^-(\tau_2(h_2); h_2)$

$$\varphi^2[\tau_2(h_2)] < y^1[\tau_2(h_2)] < \psi_1^-(\tau_2(h_2); h_2) \tag{2.74}$$

В силу (2.32), (2.74)

$$y^1[t] > \varphi^2[t] \quad \forall t \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]. \tag{2.75}$$

Логически возможны следующие случаи:

а) при $t \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]$

$$y^1[t] < \psi_1^-(t; h_2) \tag{2.76}$$

б) существует $\varkappa \in (\tau_2(h_2), \vartheta_3]$ такое, что

$$y^1[\varkappa] \geq \psi_1^-(\varkappa; h_2).$$

Рассмотрим случай а). Из (2.75), (2.76), (2.33), (2.16)–(2.19) вытекает, что при $t \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]$ имеют место неравенства (2.20) и $-\mu h_2^2 < b[t] < 0$. Поэтому в силу (2.29) и леммы I.I неравенство (2.43) имеет место при $t \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]$. Следовательно, $\vartheta_3 = T_1$. Положим $t_1[\nu] = \tau_2(h_2)$. В силу (2.75), (2.76), (2.15), (2.16) имеем (2.41), (2.42). Итак, в случае а) теорема 2.I доказана.

Рассмотрим случай б). Учитывая (2.64) и замечая, что (2.66) имеет место при любом $\eta \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]$ таком, что $y^1[\eta] = \gamma(\eta)$, получим

$$y^1[t] < \gamma(t) \quad \forall t \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]. \tag{2.77}$$

В следствие (2.75), (2.77), (2.33), (2.18), (2.19) неравенства (2.20) имеют место при $t \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]$. Покажем, что неравенство (2.43) имеет место при $t \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]$. Пусть существует такое $\tau \in [\tau_2(h_2), \vartheta_3]$, что $y^1[\tau] = \psi_1^-(\tau; h_2)$. В силу (2.29), леммы I.I и (2.9), (I.34)

$$2\{\dot y^1[\tau] - \dot\psi_1^-(\tau; h_2)\} < -2h_2^2 z_0 + w_1 + |w_2| + 1 + \tag{2.78}$$
$$+ 2\vartheta[\tau](w_1 - w_2)(\vartheta^2[\tau] - 4\mu h_2^2)^{-1/2}.$$

Из (2.78), (2.59) имеем

$$2\{\dot{y}^1[\tau]-\dot{\psi}_1^-(\tau;h_2)\}<g(\vartheta[\tau]), \qquad (2.79)$$

где

$g(s)=-h_2^2 z_0+2s(w_1-w_2)(s^2-4\mu h_2^2)^{-1/2} \quad \forall s\in(2\mu^{1/2}h_2,\infty)$.

В силу (I.34) $g'(s)<0 \quad \forall s\in(2\mu^{1/2}h_2,\infty)$. Выбрав достаточно большим h_2, получим, что уравнение $g(s)=0$ имеет единственный действительный корень $s^*=2\mu^{1/2}h_2\,\theta(h_2)$, где

$$\theta(h_2)=[1-4(w_1-w_2)^2 h_2^{-4} z_0^{-2}]^{-1/2}\in(1,2). \qquad (2.80)$$

Следовательно,

$$g(s)<0 \qquad \forall s>2\mu^{1/2}h_2\,\theta(h_2). \qquad (2.81)$$

Положим $\tau_3(h_2)=\tau_2(h_2\theta(h_2))$. В силу (2.10), (2.11)

$$\tau_3(h_2)<T^*+\frac{1}{4}\delta+8\mu^{1/2}h_2(w_1-w_2)^{-1}<T^*+\frac{1}{2}\delta \qquad (2.82)$$

при достаточно малом $\mu>0$. Покажем, что $\tau_3(h_2)<\vartheta_3$. Пусть $\tau_3(h_2)\geq\vartheta_3$. Тогда в силу (2.10)

$$\vartheta[t]\leq s^*<4\mu^{1/2}h_2 \qquad \forall t\in[\tau_2(h_2),\vartheta_3]. \qquad (2.83)$$

В следствие (2.75), (2.77), (2.83)

$$-4\mu h_2^2\leq b[t]<0 \qquad \forall t\in[\tau_2(h_2),\vartheta_3]. \qquad (2.84)$$

Из (2.29), леммы I.I и (2.84) вытекает, что неравенство (2.43) имеет место при $t\in[\tau_2(h_2),\vartheta_3]$. В силу (2.82) это противоречит определению величины ϑ_3. Следовательно, $\tau_3(h_2)<\vartheta_3$. Логически возможны следующие случаи:

I) $y^1[\tau_3(h_2)]\leq\psi_1^+(\tau_3(h_2);h_2)$; 2) $y^1[\tau_3(h_2)]=\psi_1^-(\tau_3(h_2);h_2)$.

Если имеет место случай I), то в силу (2.79), (2.81)

$y^1[t] < \psi_1^-(t;h_2)\ \forall t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_3]$. Поэтому в следствие (2.29), (2.75) неравенство (2.43) имеет место при $t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_3]$. Следовательно, $\vartheta_3 = T_1$. Положим $t_1[\nu] = \tau_3(h_2)$. Учитывая (2.15), (2.16), (2.75) имеем (2.42), (2.41). Итак, в случае 1) теорема 2.1 доказана.

Рассмотрим случай 2). В силу (2.77), (2.63) $b(\tau_3(h_2)] < -\mu h_2^2$. Обозначим через $\mathfrak{M}_4$ множество таких $\tau \in [\tau_3(h_2), \vartheta_3]$, что $b[t] < -\mu h_2^2\ \forall t \in [\tau_3(h_2), \tau]$. Пусть $\vartheta_4 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}_4\}$. В силу (2.29), леммы 1.1 и (2.77) при достаточно малых δ, μ

$$y^1[t] < \gamma(\tau_3(h_2)) - \frac{3}{4} h_2^2 z_0 [t - \tau_3(h_2)] \quad \forall t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_4]. \tag{2.85}$$

При $t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_4]$ обозначим через

$$\ell_1(t) = \gamma(\tau_3(h_2)) - \frac{3}{4} h_2^2 z_0 [t - \tau_3(h_2)] - \psi_1^-(t; h_2). \tag{2.86}$$

Учитывая определение величины $\tau_3(h_2)$, имеем

$$\ell_1(\tau_3(h_2)) < \mu^{1/2} h_2\, \omega(h_2^{-1}).$$

В силу (2.9), (2.81), выбирая достаточно большой h_2 , получим при $t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_4]$

$$\ell_1'(t) < -\frac{3}{4} h_2^2 z_0 + w_1 + |w_2| + 1 + \vartheta[t]\,(w_1 - w_2)(\vartheta^2[t] - 4\mu h_2^2)^{-1/2} <$$
$$< -\frac{3}{4} h_2^2 z_0 + w_1 + |w_2| + 1 + \frac{1}{2} h_2^2 z_0 < -\frac{1}{8} h_2^2 z_0 .$$

Следовательно,

$$\ell_1(t) < m(t) \quad \forall t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_4], \tag{2.87}$$

где $m(t) = \mu^{1/2} h_2\, \omega(h_2^{-1}) - \frac{1}{8} h_2^2 z_0 [t - \tau_3(h_2)]$. Пусть $t = \tau_4(h_2)$ есть корень уравнения $m(t) = 0$. Так как

$$\tau_4(h_2) - \tau_3(h_2) = \mu^{1/2}\,\omega(h_2^{-1}), \tag{2.88}$$

то, выбирая достаточно малым μ, в силу (2.82) получим

$$\tau_4(h_2) < T^* + \frac{3}{4}\delta. \tag{2.89}$$

Отметим, что

$$\vartheta_4 < \tau_4(h_2). \tag{2.90}$$

Действительно, если $\vartheta_4 \geq \tau_4(h_2)$, то, полагая в (2.86), (2.87) $t = \tau_4(h_2)$, в силу (2.85) получим неравенство $y^1[\tau_4(h_2)] < \psi_1^-(\tau_4(h_2); h_2)$, которое противоречит определению величины ϑ_4. В следствие (2.10), (2.88), выбирая h_2 достаточно большим, получим

$$\vartheta[t] < \vartheta[\tau_3(h_2)] + C[t - \tau_3(h_2)] < 6\mu^{1/2} h_2 \quad \forall t \in [\tau_3(h_2), \tau_4(h_2)]. \tag{2.91}$$

В силу (2.75), (2.77), (2.91)

$$-9\mu h_2^2 < B[t] < 0 \quad \forall t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_4]. \tag{2.92}$$

Из (2.29), леммы 1.1 и (2.92) вытекает, что неравенство (2.43) имеет место при $t \in [\tau_3(h_2), \vartheta_4]$. Следовательно, в силу (2.89), (2.90) $\vartheta_4 < \vartheta_3$. Поэтому $B[\vartheta_4] = -\mu h_2^2$ и вследствие (2.77), (2.63) $y^1[\vartheta_4] = \psi_1^-(\vartheta_4; h_2)$. Полагая в (2.79) $\tau = \vartheta_4$ и учитывая (2.81), получим

$$y^1[t] < \psi_1^-(t; h_2) \quad \forall t \in (\vartheta_4, \vartheta_3] \tag{2.93}$$

В силу (2.75), (2.93) $-\mu h_2^2 < B[t] < 0 \quad \forall t \in (\vartheta_4, \vartheta_3]$. Поэтому вследствие (2.29) и леммы 1.1 неравенство (2.43) имеет место при $t \in (\vartheta_4, \vartheta_3]$. Следовательно, $\vartheta_3 = T_1$.
Положим $t_1[v] = \vartheta_4$. В силу (2.88)-(2.90), (2.15) имеем (2.42). Из (2.75), (2.93), (2.16) следует (2.41). Итак, в случае $w_1 - 0$, $w_2 < 0$ теорема 2.1 доказана полностью.

4^0. Пусть $w_1 > 0$, $w_2 = 0$. Зафиксируем произвольные числа $h_2 \in (0,\infty)$, $\Delta \in (0,\Delta_2)$, $\delta \in (0,\delta_4(\Delta, C_{11}))$, $\mu \in (0,\mu_5(\Delta,\delta,C_{11},h_2))$. Из I^0 вытекает, что $y[t]$ существует на $[T_0, t_0]$ и при $t \in [T_0, t_0]$ имеют место неравенства (2.20), (2.43) и (2.37)-(2.40). Обозначим через $\mathfrak{M}_5$ множество таких $\tau \in (t_0, T_1]$, что $y[t]$ существует на $[t_0,\tau]$ и при $t \in (t_0,\tau]$ имеют место неравенства (2.20), (2.43). Пусть $\vartheta_5 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}_5\}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Учитывая (2.45), (2.47) и замечая, что неравенство (2.48) имеет место при $t \in [T_0, \vartheta_5]$, получим

$$y^1[t] > \psi_1^+(t;d) \quad \forall t \in [t_0, \vartheta_5]. \tag{2.94}$$

В следствие (2.46)

$$y^1[t_0] < \varphi_\varepsilon^2[t_0]. \tag{2.95}$$

В силу (2.29), (2.9) при $t \in [t_0, \vartheta_5]$

$$\dot y^1[t] - \dot\varphi_\varepsilon^2[t] < \mu^{-1}E[t] + \omega_2^2(\mu,\delta) - \{\dot\varphi^2[t] + \varepsilon(\dot\varphi^1[t] - \dot\varphi^2[t])\} =$$

$$= \mu^{-1}E[t] - \varepsilon w_1 + \omega(\mu,\delta,\Delta) < \mu^{-1}E[t] - \frac{\varepsilon}{2} w_1 \tag{2.96}$$

при достаточно малых Δ, δ, μ. Так как $E(t, q[t], \varphi_\varepsilon^2[t]) < 0$ $\forall t \in (t_0, \vartheta_5]$, то вследствие (2.95), (2.96)

$$y^1[t] < \varphi_\varepsilon^2[t] \quad \forall t \in [t_0, \vartheta_5]. \tag{2.97}$$

Положим в лемме 2.I $T = \vartheta_5$. Из (2.94), (2.97), (2.33), (2.13), (2.18), (2.19) вытекает, что неравенства (2.20) имеют место при $t \in [t_0, \vartheta_5]$. Рассуждая от противного и пользуясь (2.94), (2.97), (2.29), (2.60) нетрудно показать, что $\vartheta_5 = \tau_2(h_2)$.

Обозначим через $\tau_5(h_2)=\tau_2\left(\frac{h_2}{2}[\varepsilon(1-\varepsilon)]^{-1/2}\right)$. Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым и учитывая (2.10), (2.11) нетрудно показать, что

$$\tau_2(h_2)<\tau_5(h_2)<T^*+\frac{1}{2}\delta \quad \text{при } 0<\mu<\mu_6(\Delta,\delta,C_{11},h_2,\varepsilon) \tag{2.98}$$

$$\psi_\varepsilon^2[\tau_5(h_2)]=\varphi_1^-(\tau_5(h_2);h_2)$$

$$\psi_\varepsilon^2[t]<\psi_1^-(t;h_2) \quad \forall t\in[\tau_2(h_2),\tau_5(h_2)]. \tag{2.99}$$

Рассуждая от противного и пользуясь (2.94), (2.97)-(2.99), (2.29) нетрудно показать, что $\tau_5(h_2)<\vartheta_5$. Поэтому согласно (2.97), (2.99)

$$y^1[t]<\psi_1^-(t;h_2) \quad \forall t\in[\tau_2(h_2),\tau_5(h_2)]. \tag{2.100}$$

Выберем h_2 столь большим, что величина $\tau_3(h_2)$ определена и имеет место соотношение (2.80). Тогда в силу (2.10) $\tau_3(h_2)<\tau_5(h_2)$ при достаточно малом ε. Дословно повторив применительно к случаю $w_2=0$ рассуждения, проводившиеся при выводе неравенств (2.78), (2.79), получим, что если существует такое $\tau\in[\tau_3(h_2),\vartheta_5]$, что $y^1[\tau]=\psi_1^-(\tau;h_2)$, то

$$\dot{y}^1[\tau]-\dot{\psi}_1^-(\tau;h_2)<0 \tag{2.101}$$

В следствие (2.100), (2.101)

$$y^1[t]<\psi_1^-(t;h_2) \quad \forall t\in[\tau_5(h_2),\vartheta_5]. \tag{2.102}$$

Пользуясь теперь (2.94), (2.29) нетрудно показать, что неравенство (2.43) имеет место при $t\in[t_0,\vartheta_5]$. Следовательно, $\vartheta_5=T_1$. Положим в лемме 2.I $T=T_1$. В силу (2.20), (2.33), (2.34), (2.43) при $t\in[t_0,T_1]$ имеем (2.37)-(2.39). Обозначим через $t_1[V]=\tau_2(h_2)$. Из (2.15) и (2.94), (2.100), (2.102), (2.13), (2.16) получим соответственно (2.42) и (2.41). Итак, в случае $w_1>0$, $w_2=0$ теорема 2.I доказана.

4. В настоящем пункте доказывается

<u>Теорема 2.2</u>. Пусть $w_1 \neq 0$. Тогда существуют числа $\sigma > 0$, $\eta^* \in (0, \zeta_0)$, $\Delta_2^* > 0$, определенная при $\Delta \in (0, \Delta_2^*)$, $\eta \in (0, \eta^*)$ функция $\delta_1^*(\Delta, \eta) > 0$ и определенная при $\Delta \in (0, \Delta_2^*)$, $\eta \in (0, \eta^*)$, $\delta \in (0, \delta_1^*(\Delta, \eta))$ функция $\mu_1^*(\Delta, \eta, \delta) > 0$ такие, что каковы бы ни были $\eta \in (0, \eta^*)$, $\Delta \in (0, \Delta_2^*)$, $\delta \in (0, \delta_1^*(\Delta, \eta))$, $\mu \in (0, \mu_1^*(\Delta, \eta, \delta))$ и вектор-функция $V(t) \in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$ решение $(y[t], q[t])$ задачи (2.3)-(2.6) при $\gamma = \frac{\sigma}{2}(1 + \operatorname{Sign} w_1)$ существует на $[T_0, T_1(V)]$, где число

$$T_0 < T_1(V) < T^* + \frac{3}{4}\delta \tag{2.103}$$

и имеют место следующие соотношения:

$$|y[t]| < 3\eta \qquad \forall t \in [T_0, T_1(V)] \tag{2.104}$$

$$y^1[T_1(V)] = \eta \tag{2.105}$$

$$|\hat{y}[t] - \hat{\xi}(y^1[t])|_{t = T_1(V)} < \omega(\delta, \mu) \tag{2.106}$$

$$\int_{T_0}^{T_1(V)} |\dot{y}[\tau]| d\tau < \omega(\eta), \tag{2.107}$$

где функции $\omega(\delta, \mu)$, $\omega(\eta)$ не зависят от выбора вектор-функции $V(t) \in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$.

Доказательство

Зафиксируем произвольные числа $\sigma > 2[|w_1| + |w_2| + 1]$, $\beta > 2[\sigma + |w_1| + |w_2| + 1]^{1/2} z_0^{-1/2}$, $C_{11} > 2|w_1| + \beta^2 z_1 + \sigma + 1$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$, $\delta \in (0, \delta_3(\Delta, C_{11}))$, $\mu \in (0, \mu_3(\Delta, \delta, C_{11}))$ и вектор-функцию $V(t) \in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$.

I°. Согласно (2.8) $\vartheta[T_0] < -2\mu\beta$ при достаточно малом μ. В силу (2.27) и леммы I.I $-\mu\beta^2 < \beta[T_0] < 0$. Поэтому либо

$$\varphi^1[T_0] < y^1[T_0] < \psi_1^-(T_0\,;\beta) \tag{2.108}$$

либо

$$\psi_2^-(T_0\,;\beta) < y^1[T_0] < \varphi^2[T\ ]. \tag{2.109}$$

В силу (2.8), (2.17)

$$\varphi^1[T_0] < \psi_2^-(T_0\,;\beta) - \frac{1}{4}\delta^3(\vartheta_1 - \vartheta_2). \tag{2.110}$$

Из леммы 1.3, (2.1), (2.110) получим

$$y^1[T_0] < \varphi^1[T_0] + \omega(\mu) < \psi_2^-(T_0\,;\beta). \tag{2.111}$$

В силу (2.111) при достаточно малом $\mu \to 0$ имеют место неравенства (2.108). Согласно (2.26) при $t = T_0$

$$|\dot{y}^1[t]| < C_{11} \tag{2.112}$$

2^0. Обозначим через $\mathfrak{M}^1$ множество таких $\tau \in (T_0, t_0]$, что $y[t]$ существует на $[T_0, \tau]$, и при $t \in [T_0, \tau]$ имеют место неравенства (2.20), (2.112) и $\beta[t] < 0$. Пусть $\vartheta^1 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}^1\}$. Положим в лемме 2.1 $T = \vartheta^1$. В следствие (2.108), (2.29), леммы 1.1 и (2.9) при достаточно малых Δ, δ, μ

$$\varphi^1[t] < y^1[t] \quad \forall t \in [T_0, \vartheta^1]. \tag{2.113}$$

Из определения множества $\mathfrak{M}^1$ следует, что

$$y^1[t] < \varphi^2[t] \quad \forall t \in [T_0, \vartheta^1). \tag{2.114}$$

В силу (2.113), (2.114), (2.33), (2.18), (2.19) неравенства (2.20) имеют место при $t \in (T_0, \vartheta^1]$. Покажем, что $\vartheta^1 = \tau_1(\beta)$. Допустим, что $\vartheta^1 < \tau_1(\beta)$. Пусть существует такое $\tau \in (T_0, \vartheta^1)$, что $y^1[\tau] = \psi_1^-(\tau;\beta)$. Тогда в силу (2.29) и леммы 1.1

$$\dot{y}^1[\tau] - \dot{\psi}_1^-(\tau;\beta) < -\beta^2 z_0 + \nu + \omega_2^2(\mu,\delta) - \dot{\psi}_1^-(\tau;\beta) \tag{2.115}$$

Учитывая (2.9), (I.34) нетрудно показать, что при достаточно малых δ, Δ

$$\dot{\psi}_1^-(t;\,\ell) > -\frac{1}{2}\left[|w_1| + |w_2| + 1\right] \quad \forall t \in [T_0, \tau_1(\ell)) . \tag{2.II6}$$

В следствие (2.I08), (2.II5), (2.II6) $y^1[t] < \psi_1^-(t;\ell)\,\forall t \in [T_0, \eta^1)$. Отсюда и из (2.II3), (2.II4) следует, что при $t \in [T_0, \eta^1]$

$$-\mu\ell^2 \leq B[t] \leq 0. \tag{2.II7}$$

Поэтому в силу (2.29) и леммы I.I неравенство (2.II2) имеет место при $t \in [T_0, \eta^1]$. Учитывая теперь (2.I5), получаем противоречие с определением числа η^1. Итак, $\eta^1 > \tau_1(\ell)$. Легко видеть, что неравенства (2.II7), а, следовательно, и неравенство (2.II2) имеют место при $t \in [T_0, \eta^1]$. В следствие (2.II3), (2.II4) $\eta^1 < t_0$. Теперь очевидно, что $B[\eta^1] = 0$ и в силу (2.II3)

$$y^1[\eta^1] = \varphi^2[\eta^1]. \tag{2.II8}$$

Из (2.29), леммы I.I, (2.9), (2II8), (I.34) имеем

$$\dot{y}^1[\eta^1] - \dot{\varphi}^2[\eta^1] > 0.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^2$ множество таких $\tau \in (\eta^1, T_1]$, что $y[t]$ существует на $[\eta^1, \tau]$, и при $t \in (\eta^1, \tau]$ имеют место неравенства (2.20), (2.II2) и $0 < B[t] < \mu\ell^2$. Отметим, что $\mathfrak{M}^2 \neq \Phi$. Пусть $\eta^2 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}^2\}$. Положим в лемме 2.I $T = \eta^2$. В силу (2.29), леммы I.I и (2.9), (I.34)

$$\dot{y}^1[t] - \dot{\varphi}^i[t] > \frac{|w_1|}{2} \quad \forall t \in (\eta^1, \eta^2],\ i = 1,2 \tag{2.II9}$$

Из (2.II9), (2.II8), (2.II3) имеем

$$y^1[t]-y^i[t]>\frac{|w_1|}{2}(t-\vartheta^1)\ \forall t\in(\vartheta^1,\vartheta^2],\ i=1,2. \qquad (2.120)$$

В следствие определения множества $\mathfrak{M}^2$ и (2.120)

$$\max\{y^1[t],\ y^2[t]\}<y^1[t]\leq\psi_2^+(t;\delta)\ \forall t\in(\vartheta^1,\vartheta^2]. \qquad (2.121)$$

В силу (2.121), (2.14), (2.18), (2.33), (2.19), (2.29) и леммы I.I неравенства (2.112), (2.20) и $\beta[t]>0$ имеют место при $t\in(\vartheta^1,\vartheta^2]$.

Согласно (2.119), (2.120) $\dot\beta[t]>\frac{|w_1|^2}{2}(t-\vartheta^1)$. Следовательно, $\beta[t]>\frac{|w_1|^2}{4}(t-\vartheta^1)^2\ \forall t\in[\vartheta^1,\vartheta^2]$. Отсюда, учитывая (2.11) получим

$$\vartheta^2-\vartheta^1+2\mu^{1/2}\delta\,|w_1|^{-1}<t_0+2\mu^{1/2}\delta\,|w_1|^{-1}<T^*+\frac{1}{2}\delta. \qquad (2.122)$$

Из проведенных рассуждений следует, что

$$\beta[\vartheta^2]=\mu\delta^2. \qquad (2.123)$$

В следствие (2.123), (2.121), (2.13)

$$y^1[\vartheta^2]=\psi_2^+(\vartheta^2;\delta). \qquad (2.124)$$

Пользуясь (2.1), (2.9), (2.11), (2.13), (2.14), (2.122), нетрудно заметить, что при достаточно малом μ

$$|\psi_2^+(\vartheta^2;\delta)|<C_{17}\delta^3. \qquad (2.125)$$

Отметим, что согласно (2.29), (2.125) и (2.33), (2.34)

$$\dot y^1[\vartheta^2]>\frac{3}{4}\delta^2 z, \qquad (2.126)$$

$$|\dot{\hat y}[\vartheta^2]-f(\vartheta^2,q[\vartheta^2],y^1[\vartheta^2])|<\mu C_{12},\ |\dot{\hat y}[\vartheta^2]|<C_{13} \qquad (2.127)$$

3°. Зафиксируем произвольное число $\eta\in(0,\min(\varepsilon_0,\dot\xi))$. Обозначим через $\mathfrak{M}^3$ множество таких $\tau\in(\vartheta^2,T_1]$, что $y[t]$ существует на $[\vartheta^2,\tau]$ и при $t\in(\vartheta^2,\tau]$

$$y^1[t] < \eta, \quad |\hat{y}[t]| < 2\eta, \quad \dot{y}^1[t] > \frac{1}{2}\delta^2 z_0. \qquad (2.128)$$

Очевидно, что $\mathfrak{M}^3 \neq \Phi$ при достаточно малых δ, μ. Пусть $\vartheta^3 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}^3\}$. Оценим сверху функцию $M(t) = \max\limits_{\vartheta^2 \le \tau \le t} \mu \dot{y}^1[\tau]$ при $t \in [\vartheta^2, \vartheta^3]$. В силу (2.9), (2.128)

$$\dot{y}^1[t] - \dot{\varphi}^i[t] > \frac{1}{4}\delta^2 z_0 \quad \forall t \in [\vartheta^2, \vartheta^3], \; i = 1,2. \qquad (2.129)$$

В следствие (2.129), (2.124), (2.14)

$$y^1[t] - \varphi^i[t] > \frac{1}{4}\delta^2 z_0 (t - \vartheta^2) \; \forall t \in [\vartheta^2, \vartheta^3], \; i = 1,2. \qquad (2.130)$$

Из (2.129), (2.130) имеем

$$\dot{s}[t] > \frac{1}{8}\delta^4 z_0^2 (t - \vartheta^2) \quad \forall t \in [\vartheta^2, \vartheta^3]. \qquad (2.131)$$

Рассмотрим вектор-функцию $e(t) = \hat{y}[t] - f(t, q[t], y^1[t]) \; \forall t \in [\vartheta^2, \vartheta^3]$. Легко видеть, что при любом $t \in [\vartheta^2, \vartheta^3]$ имеет место неравенство (2.22), где τ_0 следует заменить на ϑ^2. Отметим, что фигурирующие в (2.22) функции $|\mathcal{X}_i(t)|$, $i = 1,2$ в силу (1.5), (2.128), (2.7), (1.11) удовлетворяют при $\tau \in [\vartheta^2, \vartheta^3]$ неравенствам

$$|\mathcal{X}_1(t)| < \omega(\delta, \eta)|e(t)|, \quad \mu|\mathcal{X}_2(t)| \le \mu C + \omega(\delta, \eta) M(t).$$

Поэтому, учитывая (2.127), при любых $\vartheta^2 \le t < T \le \vartheta^3$ имеем

$$|e(t)| < C\mu + \frac{\omega(\delta,\eta)}{\mu} \int\limits_{\vartheta^2}^{t} \exp\left[-\frac{C_6(t-\tau)}{\mu}\right] |e(\tau)|\, d\tau + \omega(\delta,\eta) M(t) \le$$

$$\le C\mu + \omega_3(\delta,\eta) \max_{\vartheta^2 \le t \le T} |e(t)| + \omega(\delta,\eta) M(T). \qquad (2.132)$$

Пусть $\omega_3(\delta, \eta) < 1/2$ при рассматриваемых δ, η. Тогда вследствие (2.132)

$$|e(t)| \leq C\mu + \omega(\delta,\eta)M(t) \quad \forall t \in [q^2, q^3]. \tag{2.133}$$

Из (2.25), учитывая (2.131), (2.123), лемму I.I. (I.5), (2.7), (2.128), (2.133) получим при $t \in [q^2, q^3]$

$$M(t) \leq B[t]z_1 + \omega_4(\delta,\eta)M(t) + \omega(\delta,\eta)\mu + \mu\mathcal{H}. \tag{2.134}$$

Пусть $\omega_4(\delta,\eta) < \frac{1}{2}$ при рассматриваемых δ, η. Тогда

$$M(t) < 2B[t]z_1 + \omega(\delta,\eta)\mu + 2\mu\mathcal{H} \quad \forall t \in [q^2, q^3] \tag{2.135}$$

В следствие (2.25), (2.131), (2.123), (2.133), (2.135) при достаточно малых δ, η

$$\mu\dot{y}^1[t] > B[t]z_0 - \omega(\delta,\eta)\{B[t]z_1 + C\mu + \mu\mathcal{H}\} + \mu\mathcal{H} > \tag{2.136}$$

$$> B[t]\cdot\frac{3}{4}z_0 + \frac{3}{4}\mu\mathcal{H} - \mu\omega(\delta,\eta) \quad \forall t \in [q^2, q^3].$$

В силу (2.136), (2.123), (2.131)

$$\dot{y}^1[t] > \frac{1}{2}b^2 z_0 + \frac{3}{64\mu}b^4 z_0^3 (t-q^2)^2 \quad \forall t \in [q^2, q^3]. \tag{2.137}$$

Согласно (2.137), (2.124), (2.125)

$$y^1[t] > \frac{b^4 z_0^3}{64\mu}(t-q^2)^3 - C_{17}\delta^3 \quad \forall t \in [q^2, q^3]. \tag{2.138}$$

Обозначим через $n(t)$ правую часть неравенства (2.138). Пусть $t = \zeta$ есть корень уравнения $n(t) = \eta$. В следствие (2.138), (2.122)

$$q^3 < \zeta < q^2 + C_{18}\mu^{1/3} - T^* + \frac{3}{4}\delta. \tag{2.139}$$

Оценим сверху $|\hat{y}[t]|$ $\forall t \in [q^2, q^3]$. Положим

$$u(t) = \hat{y}[t](\dot{y}^1[t])^{-1} \quad \forall t \in [q^2, q^3].$$

Из (2.3), (2.4) имеем при $t \in [q^2, q^3]$

$$\mu \dot{u}(t) = Vu(t) + N_1(t)u(t) + N_2(t) , \tag{2.140}$$

где
$$N_1(t) = \hat{\mathfrak{F}}_{\hat{y}}(t, \dot{q}[t], y[t]) - \{(\dot{y}^1[t])^{-1}[W_t^1(t, q[t], y[t]) +$$
$$+ W_q^1(t, q[t], y[t])v(t)] + W_{y^1}^1(t, q[t], y[t]) +$$
$$+ W_{\hat{y}}^1(t, q[t], y[t])u(t)\} E_{n-1} ,$$

$$N_2(t) = \hat{\mathfrak{F}}_{y^1}(t, q[t], y[t]) + (\dot{y}^1[t])^{-1}\{\hat{\mathfrak{F}}_t(t, q[t], y[t]) +$$
$$+ \hat{\mathfrak{F}}_q(t, q[t], y[t])v(t)\} .$$

Согласно (2.126), (2.127) выбирая число β достаточно большим, получим

$$|u(\vartheta^2)| < C\beta^{-2} < 1 . \tag{2.141}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^4$ множество $\tau \in [\vartheta^2, \vartheta^3]$ таких, что $|u(t)| < 1 \ \forall t \in [\vartheta^2, \tau]$. Пусть $\vartheta^4 = \sup\{\tau \in \mathfrak{M}^4\}$. В силу (1.5), (2.7), (2.128), (2.137), (2.141)

$$|N_i(t)| < \omega(\delta, \eta, \beta^{-2}) \quad \forall t \in [\vartheta^2, \vartheta^4] , \ i = 1,2 \tag{2.142}$$

Из (2.140) вытекает, что функция $|u(t)|$ удовлетворяет при $t \in [\vartheta^2, \vartheta^4]$ неравенству, аналогичному (2.22). Поэтому в силу (2.141), (2.142), выбирая достаточно малыми δ, η и достаточно большим β, получим

$$|u(t)| < \omega(\delta, \eta, \beta^{-2}) < \frac{1}{2} \quad \forall t \in [\vartheta^2, \vartheta^4] \tag{2.143}$$

В следствие (2.143) $q^3 = q^4$. Учитывая (2.143), (2.124), (2.125), (2.127), (2.7), получим при $t \in [q^2, q^3]$

$$|\hat{y}[t]| = |\hat{y}[q^2]| + y^1[t] - y^1[q^2] < \omega(\mu, \delta) + y^1[t]. \tag{2.144}$$

Следовательно, выбрав достаточно малыми δ, μ, получим

$$|\hat{y}[t]| < \frac{3}{2}\eta \quad \forall t \in [q^2, q^3]. \tag{2.145}$$

Из (2.139), (2.145), (2.137) вытекает, что

$$y^1[q^3] = \eta. \tag{2.146}$$

В следствие (2.124), (2.125), (2.137) каково бы ни было достаточно малое $\delta > 0$ существует единственное число $\tau(\delta) \in (q^2, q^3)$ такое, что $y^1[\tau(\delta)] = \delta$.

Согласно (2.144)

$$|\hat{y}[\tau(\delta)]| < \omega(\mu, \delta). \tag{2.147}$$

Обозначим через $z(t) = \hat{y}[t] - \hat{\xi}(y^1[t]) \; \forall t \in [\tau(\delta), q^3]$. Оценим сверху величину $|z[q^3]|$. В силу (2.3), (2.4), (I.10)

$$\mu \dot{z}(t) = V z(t) + \Sigma(t) \quad \forall t \in [\tau(\delta), q^3], \tag{2.148}$$

где

$$\Sigma(t) = \hat{\mathfrak{F}}(t, q[t], y[t]) - \hat{\mathfrak{F}}(T^*, q^*, y^1[t], \hat{\xi}(y^1[t])) +$$

$$+ \hat{W}(T^*, q^*, y^1[t], \hat{\xi}(y^1[t]))[W^1(T^*, q^*, y^1[t], \hat{\xi}(y^1[t]))]^{-1} \times$$

$$\times \{\Phi(T^*, q^*, y^1[t], \hat{\xi}(y^1[t])) - \Phi(t, q[t], y[t]) - \delta_0(t - T^*) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \delta_j (q_j[t] - q_j^*) - \mu V\}.$$

Учитывая (2.I47), (I.9), (2.7), (I.5), (2.I28), получим при $t \in [\tau(\delta), q^3]$

$$|z(\tau(\delta))| \leq \omega(\mu, \delta), \quad |\Sigma(t)| \leq \omega(\delta, \mu) + \omega(\delta, \eta)\,|z(t)|. \tag{2.149}$$

В следствие (2.I48), (2.I49) выбирая достаточно малыми δ, η, получим

$$|z(t)| < \omega(\delta, \mu) \quad \forall t \in [\tau(\delta), q^3]. \tag{2.150}$$

Полагая $T_1(v) = q^3$ нетрудно заметить, что из проведенных рассуждений вытекают все утверждения теоремы 2.2. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. Теоремы существования, единственности и сходимости решения задачи $\mu > 0$.

В § 3 изучается однозначная разрешимость в $\bar{G}_q$ и сходимость решений задач $\mu > 0$ при указываемых ниже вектор-функциях $s(t) \in C_2[0,q]$ к решениям $(\overset{(i)}{p}, \overset{(i)}{q})$, $i = 2,3$. В п.п. I,2 соответствующие теоремы устанавливаются для случая $w_1 \neq 0$; случай $w_1 = 0$ рассматривается в п.3.

I. В настоящем пункте устанавливается

<u>Теорема 3.I</u>. Пусть выполнены условия У.I)–У.5), У.7)–У.9) и $w_1 \neq 0$. Тогда найдутся вектор-функция $\overset{(1)}{s}(t) \in C_2[0,q]$ и число $\mu_0 > 0$ такие, что при любом $\mu \in (0, \mu_0]$ в $\bar{G}_q$ существует единственное решение $(p(\mu,x,t), q(\mu,x,t))$ задачи $\mu > 0$ при $s(t) = \overset{(1)}{s}(t)$, и

$$|p(\mu,.) - \overset{(2)}{p},\ q(\mu,.) - \overset{(2)}{q}|_{\bar{G}_q} < C\mu^{1/2}.$$

Если $w_1 > 0$, то можно положить $\overset{(1)}{s}(t) = 0 \ \forall t \in [0,q]$.

Доказательство

1^0. Пусть σ, γ – числа, фигурирующие в теореме 2.I, а вектор-функция $\overset{(1)}{\varphi}(t) \in C_2[0,q]$ и $\overset{(1)}{\varphi}{}^1(t) = \gamma$, $\overset{(1)}{\hat{\varphi}}(t) = 0 \quad \forall t \in [\frac{1}{2}T^*, q]$. Положим в (0.4) $s(t) = \overset{(1)}{s}(t)$, где $\overset{(1)}{s}(t) = L\overset{(1)}{\varphi}(t)$. Отметим, что если $w_1 > 0$, то можно положить $\overset{(1)}{s}(t) = 0 \quad \forall t \in [0,q]$. 2^0. Выберем произвольные $\Delta \in (0, \Delta^*)$, $\delta \in (0, \delta_1^*(\Delta))$, $\mu \in (0, \mu_1^*(\Delta,\delta))$, где $\Delta^*, \delta_1^*(\Delta), \mu_1^*(\Delta,\delta)$ – числа, указанные в теореме 2.I. Отметим, что в $\bar{G}_{T_0}$ существует единственное решение $(p(\mu,x,t), q(\mu,x,t))$ задачи $\mu > 0$ и имеют место неравенства (2.I), (2.2). Обозначим через $\mathcal{G}_\eta$ множество таких $T \in (T_0, T_1]$, что в $\bar{G}_T$ решение $(p(\mu,x,t), q(\mu,x,t))$ задачи $\mu > 0$ существует+), и

+) Согласно лемме 2 из [I] решение задачи $\mu > 0$ единственно в $\bar{G}_T$.

$$|q_t(\mu,0,t)-q^*_t|<\Delta \quad \forall t\in[T_0,T]. \tag{3.I}$$

В силу леммы 2 из [I] и (2.2) $\varphi_\eta \neq \phi$. Обозначим через $T_\Delta = \sup\{T\in\varphi_\eta\}$. Покажем, что при достаточно малых δ,μ.

$$T_\Delta = T_1 \in \varphi_\eta \tag{3.2}$$

Положим в (2.3), (2.4) $\gamma(t) = \overset{(1)}{\gamma}(t)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,T_\Delta - T_0)$. Определим на $[0,T_1]$ вектор-функцию $v_\varepsilon(t)\in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^{\mu}_{\Delta}(T_0)$, полагая

$v_\varepsilon(t)=q_t(\mu,0,t)\ \forall t\in[0,T_\Delta-\varepsilon],\ v_\varepsilon(t)=q_t(\mu,0,T_\Delta-\varepsilon)\ \forall t\in[T_\Delta-\varepsilon,T_1].$
Легко видеть, что при $t\in[0,T_\Delta-\varepsilon]$

$$y(\mu,t)=L^{-1}[p(\mu,0,t)-\overset{*}{p}]=y[t;v_\varepsilon],\ q(\mu,0,t)=q[t;v_\varepsilon]. \tag{3.3}$$

Согласно (3.3), (2.37)

$$|p(\mu,0,t)|<C \quad \forall t\in[T_0,T_\Delta-\varepsilon] \tag{3.4}$$

Пользуясь (3.4) и очевидным обобщением на случай произвольных n, m леммы 4 из [I5] и выбрав $\delta>0$ достаточно малым, нетрудно показать, что $|p(\mu,.),q(\mu,.)|_{\bar G_{T_\Delta-\varepsilon}}<C$. Поэтому в следствие леммы 2 из [I] решение $(p(\mu,x,t),q(\mu,x,t))$ задачи $\mu>0$ существует в $\bar G_{T_\Delta}$, и

$$|p(\mu,.),q(\mu,.)|_{\bar G_{T_\Delta}}<C \tag{3.5}$$

$$y(\mu,t)=y[t;v_0] \quad \forall t\in[T_0,T_\Delta], \tag{3.6}$$

где
$v_0[t]=q_t(\mu,0,t)\ \forall t\in[T_0,T_\Delta],\ v_0[t]=q_t(\mu,0,T_\Delta)\ \forall t\in[T_\Delta,T_1].$
Оценим функцию $|q_t(\mu,0,t)-q^*_t|$ при $t\in[T_0,T_\Delta]$. Пользуясь уравнениями (9), (29) из [1] и учитывая, что $\overset{(0)}{q}\in C_1(\bar G_{T^*})$, в силу (3.4), (2.I) при $t\in[T_0,T_\Delta]$ получим

$$\left|\frac{\partial q_j(\mu,0,t)}{\partial t} - \frac{\partial \overset{(0)}{q}_j(0,T^*)}{\partial t}\right| \le \omega(\mu,\delta) + \tag{3.7}$$

$$+C\int_{T_0}^{t}\left[|p_t(\mu,\xi,\tau)| + |q_t(\mu,\xi,\tau)|\right]_{\xi=\varkappa_j^+(\tau,0,t)} d\tau \quad, 1\le j\le m.$$

Из (3.5), (3.7), (2.I) и леммы 3 из [I] имеем

$$|q_t(\mu,0,t)-q_t^*| \le \omega(\mu,\delta) + C\int_{T_0}^{t}|\dot{y}(\mu,\tau)|d\tau \quad \forall t\in[T_0,T_\Delta].$$

Отсюда в силу (3.6), (2.38) при достаточно малых δ,μ получим

$$|q_t(\mu,0,t)-q_t^*| < \frac{\Delta}{2} \quad \forall t\in[T_0,T_\Delta]. \tag{3.8}$$

В следствие (3.8) и леммы 2 из [I] имеем (3.2).

3^0. Покажем теперь, что если δ,μ достаточно малы, то при $t\in[T_0,T_1]$

$$|q(\mu,0,t)-\overset{(2)}{q}(0,t)| < \mu^{1/2}. \tag{3.9}$$

Обозначим через $\nabla p(x,t) = p(\mu,x,t) - \overset{(2)}{p}(x,t)$; $\nabla q(x,t) = q(\mu,x,t) - \overset{(2)}{q}(x,t)$. Учитывая, что вектор-функции $(p(\mu,.),q(\mu,.))$ и $(\overset{(2)}{p},\overset{(2)}{q})$ удовлетворяют в $\bar{G}_{T_1}$ системе (7), (8), из [I], при $(x,t)\in\bar{G}_{T_1}$ получим

$$\nabla p_i(x,t) = \nabla p_i(\xi_i(x,t),\theta_i(x,t)) + \int_{\theta_i(x,t)}^{t}\Big\{\varepsilon_{ii}(\mu,\xi,\tau)\nabla p_i(\xi,\tau) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ i\ne j}}^{z}\varepsilon_{ij}(\mu,\xi,\tau)\nabla p_j(\xi,\tau) + \mathcal{F}_i(\mu,\xi,\tau)\nabla q(\xi,\tau)\Big\}_{\xi=\varkappa_i^-(\tau,x,t)} d\tau, \; 1\le i\le z \tag{3.10}$$

$$\nabla q_j(x,t) = \int_0^t\Big\{\sum_{s=1}^{z}K_j^s(\mu,\xi,\tau)\nabla p_s(\xi,\tau) + \tag{3.11}$$

$$+\mathcal{L}_j(\mu,\xi,\tau)\nabla q(\xi,\tau)\Big\}_{\xi=\varkappa_j^+(\tau,x,t)} d\tau, \quad 1\le j\le m,$$

где ε_{ij}, $\mathcal{F}_i$, K_j^s, $\mathcal{L}_j$, непрерывные в $\bar{G}_{T_1}$ матрицы соответствующих размеров. Пусть $\mathcal{Z}_i(\mu,x,t)$ есть $(K_i\times K_i)$ – матрица, удовлетворящая в $\bar{G}_{T_1}$ уравнению

$$\overset{1}{\chi}_i(\mu,x,t) = E_{K_i} + \int\limits_{\theta_i(x,t)}^{t} \varepsilon_{ii}(\mu,\xi,\tau)\overset{1}{\chi}_i(\mu,\xi,\tau)\Big|_{\xi=\varkappa_i^-(\tau,x,t)} d\tau . \tag{3.12}$$

Легко видеть, что решение $\overset{1}{\chi}_i \in C(\bar{G}_{T_1})$ уравнения (3.12) существует и единственно. Из (3.12), (3.5) имеем

$$|\overset{1}{\chi}_i(\mu,.)|_{\bar{G}_{T_1}} < C. \tag{3.13}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\overset{2}{\chi}_i(\mu,x,t) = \nabla p_i(x,t) - \overset{1}{\chi}_i(\mu,x,t)\nabla p_i(\xi_i(x,t),\theta_i(x,t)),\ 1\le i\le r. \tag{3.14}$$

Из (3.10), (3.11) в силу (3.12), (3.14) имеем

$$\overset{2}{\chi}_i(\mu,x,t) = \int\limits_{\theta_i(x,t)}^{t} \Big\{\varepsilon_{ii}(\mu,\xi,\tau)\overset{2}{\chi}_i(\mu,\xi,\tau) + \mathcal{F}_i(\mu,\xi,\tau)\nabla q(\xi,\tau) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r} \varepsilon_{ij}(\mu,\xi,\tau)\Big[\overset{1}{\chi}_j(\mu,\xi,\tau)\nabla p_j(\xi_j(\xi,\tau),\theta_j(\xi,\tau)) + \overset{2}{\chi}_j(\mu,\xi,\tau)\Big]\Big\}\Big|_{\xi=\varkappa_i^-(\tau,x,t)} d\tau \tag{3.15}$$

$$\nabla q_j(x,t) = \int\limits_0^t \Big\{\sum_{s=1}^{r} K_j^s(\mu,\xi,\tau)\Big[\overset{1}{\chi}_s(\mu,\xi,\tau)\nabla p_s(\xi_s(\xi,\tau),\theta_s(\xi,\tau)) +$$

$$+\overset{2}{\chi}_s(\mu,\xi,\tau)\Big] + \mathcal{X}_j(\mu,\xi,\tau)\nabla q(\xi,\tau)\Big\}\Big|_{\xi=\varkappa_j^+(\tau,x,t)} d\tau . \tag{3.16}$$

Положим $\mathcal{U}(t) = \sum_{i=1}^{r} |\overset{2}{\chi}_i(\mu,.)|_{\bar{G}_t} + |\nabla q|_{\bar{G}_t} \quad \forall t\in(0,T_1]$.

Из (3.16), (3.15), (3.13), (3.5) и равенств $\nabla p|_{t=0} = \nabla q|_{t=0} = 0$ имеем

$$\mathcal{U}(t) \le C\int\limits_0^t |\nabla p(0,\eta)|\,d\eta + C\int\limits_0^t \mathcal{U}(\eta)\,d\eta \quad \forall t\in(0,T_1]$$

Отсюда согласно [I4]

$$\mathfrak{U}(t) \le C\int\limits_0^t |\nabla p(0,\eta)|\,d\eta \quad \forall t\in(0,T_1]. \qquad (3.I7)$$

Обозначим через φ_{η_1} множество таких $T\in[T_0,T_1]$, что при $t\in[T_0,T]$ имеет место неравенство (3.9). Согласно (2.I) $\varphi_{\eta_1}\ne\Phi$ при достаточно малом μ. Положим $\theta=\sup\{T\in\varphi_{\eta_1}\}$. Покажем, что $\theta=T_1$ если δ,μ достаточно малы. Допустим, что $\theta<T_1$ при выбранных δ,μ. Определим на $[0,T_1]$ вектор-функцию $V_\theta(t)$, полагая $V_\theta(t)=q_t(\mu,0,t)\,\forall t\in[0,\theta]$, $V_\theta(t)=\overset{(2)}{q}_t(0,t)\,\forall t\in(\theta,T_1]$.

Так как $\overset{(2)}{q}_t\in C(\bar G_q)$, то в силу (3.8), (3.2) $V_\theta(t)\in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}{}^\mu_\Delta(T_0)$ при достаточно малом δ. Рассмотрим теперь задачу (2.3)-(2.6) при $V(t)=V_\theta(t)$. Легко видеть, что

$$|q[t;V_\theta]-\overset{(2)}{q}(0,t)|\le\mu^{1/2} \quad \forall t\in[T_0,T_1] \qquad (3.I8)$$

Учитывая (3.I8), (I.34), (I.2I) нетрудно показать, что при достаточно малом δ

$$|t_0[V_\theta]-T^*|\le C\mu^{1/2}. \qquad (3.I9)$$

В следствие (2.38) - (2.4I), (3.I9), (I.I2) и лемм I.3, I.4

$$|y[t;V_\theta]-\overset{(2)}{y}(t)|\le C\mu^{1/2}+C\max_{T_0\le\tau\le t}|q[\tau;V_\theta]-\overset{(2)}{q}(0,\tau)| \quad \forall t\in[T_0,T_1]. \qquad (3.20)$$

Следовательно,

$$|\nabla p(0,t)|\le C\mu^{1/2}+C\,\mathfrak{U}(t) \quad \forall t\in[T_0,\theta]. \qquad (3.2I)$$

Из (3.17), (3.21), (2.1) при достаточно малых δ, μ вытекает, что $\mathcal{U}(\theta) < \frac{1}{2}\mu^{1/2}$. Следовательно, $\theta = T_1$ при достаточно малых δ, μ. Легко видеть, что при соответствующих δ, μ

$$\mathcal{U}(T_1) < \frac{1}{2}\mu^{1/2}, \quad |\nabla p(0,t)| \le C\mu^{1/2} \quad \forall t \in [T_0, T_1]. \tag{3.22}$$

Пользуясь (3.22) и проводя рассуждения аналогичные изложенным в [1], нетрудно завершить доказательство теоремы 3.1.

2. Имеет место

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть выполнены условия У.1)–У.8), У.10) и $w_1 \ne 0$. Тогда найдутся вектор-функция $\overset{(2)}{S}(t) \in C_2[0,\vartheta]$ и число $\mu_1 > 0$ такие, что при любом $\mu \in (0, \mu_1]$ в $\overline{G}_\vartheta$ существует единственное решение $\{p(\mu,x,t), q(\mu,x,t)\}$ задачи μ-0 при $S(t) = \overset{(2)}{S}(t)$, $|p(\mu,\cdot), q(\mu,\cdot)|_{\overline{G}_\vartheta} < C \; \forall \mu \in (0,\mu_1]$ и какова бы ни была замкнутая область $\Omega \in \overline{G}_\vartheta \setminus \mathcal{O}^1_\vartheta$ $|p(\mu,\cdot) - \overset{(3)}{p}, q(\mu,\cdot) - \overset{(3)}{q}|_\Omega \to 0$ при $\mu \to 0$. Если $w_1 < 0$, то можно положить $\overset{(2)}{S}(t) = 0 \; \forall t \in [0,\vartheta]$.

Опишем схему доказательства теоремы 3.2.

1^0. Пусть σ, ν – числа, фигурирующие в теореме 2.2, а вектор-функция $\overset{(2)}{\gamma}(t) \in C_2[0,\vartheta]$ и $\overset{(2)}{\gamma}{}'(t) = \nu$, $\overset{(2)}{\gamma}(t) = 0$ $\forall t \in [\frac{1}{2}T^*, \vartheta]$. Положим в (0.4) $S(t) = \overset{(2)}{S}(t)$, где $\overset{(2)}{S}(t) = L\overset{(2)}{\gamma}(t)$. Отметим, что если $w_1 < 0$, то можно положить $\overset{(2)}{S}(t) = 0 \; \forall t \in [0,\vartheta]$.

2^0. Пусть $\Delta^*_2, \eta^*, \delta^*_1(\Delta,\eta), \mu^*_1(\Delta,\eta,\delta)$ – величины, фигурирующие в теореме 2.2. Тогда существуют определенная при $\Delta \in (0,\Delta^*_2)$ функция $\eta^*_1(\Delta) \in (0,\eta^*)$, определенная при $\Delta \in (0,\Delta^*_2)$, $\eta \in (0,\eta^*_1(\Delta))$ функция $\delta^*_2(\Delta,\eta) \in (0,\delta^*_1(\Delta,\eta))$ и определенная при $\Delta \in (0,\Delta^*_2)$, $\eta \in (0,\eta^*_1(\Delta))$, $\delta \in (0,\delta^*_2(\Delta,\eta))$ функция $\mu^*_2(\Delta,\eta,\delta) \in (0,\mu^*_1(\Delta,\eta,\delta))$ такие, что какозы бы ни были $\Delta \in (0,\Delta^*_2)$, $\eta \in (0,\eta^*_1(\Delta))$, $\delta \in (0,\delta^*_2(\Delta,\eta))$, $\mu \in$

$(0,\mu_2^*(\Delta,\eta,\delta))$ можно указать число $T_1(\mu)\in(T_0,T^*+\frac{3}{4}\delta)$ такое, что в $\bar{G}_{T_1(\mu)}$ существует единственное решение $(p(\mu,x,t),q(\mu,x,t))$ задачи $\mu>0$, и

$$|p(\mu,.),\ q(\mu,.)|_{\bar{G}_{T_1(\mu)}}<C,$$

$$|y(\mu,t)|<3\eta \quad \forall t\in[T_0,T_1(\mu)]$$

$$y^1(\mu,T_1(\mu))=\eta,\quad |\hat{y}(\mu,t)-\hat{\xi}(y^1(\mu,t))|_{t=T_1(\mu)}<\omega(\delta,\mu)$$

$$\int_{T_0}^{T_1(\mu)}|\dot{y}(\mu,\tau)|d\tau<\omega(\eta),\quad |q_t(\mu,0,t)-q_t^*|<\Delta\quad \forall t\in[T_0,T_1(\mu)].$$

Доказательство сформулированного утверждения является обобщением доказательства леммы 5 из [I5]. При этом вместо леммы 3 из [I5], фигурирующей в доказательстве леммы 5, используется теорема 2.2. настоящей работы.

3°. Зафиксируем произвольные $\Delta\in(0,\Delta_2^*)$, $\eta\in(0,\eta_1^*(\Delta))$. Пусть число $\tau_\eta\in(-\infty,0)$ таково, что $y^1(\tau_\eta)=\eta$, где $y^1(\tau)$ –соответствующая компонента фигурирующего в п.2 § I решения $y=y(\tau)$ системы (I.8). Легко видеть, что при любых

$$\delta\in(0,\delta_2^*(\Delta,\eta)),\quad \mu\in(0,\mu_2^*(\Delta,\eta,\delta))$$

$$|p(\mu,0,T_1(\mu))-p(\tau_\eta)|\leq|L||y(\mu,T_1(\mu))-y(\tau_\eta)|<\omega(\delta;\mu),$$

где $p=p(\tau)$ – соответствующее решение системы (I.7).

Имеет место следующее утверждение: существуют определенная при $\tau_1\in(0,\infty)$, $\gamma\in(0,1)$ функция $\delta^{(1)}(\Delta,\eta,\tau_1,\gamma)\in(0,\delta_2^*(\Delta,\eta))$ и определенная при $\tau_1\in(0,\infty)$, $\gamma\in(0,1)$, $\delta\in(0,\delta^{(1)}(\Delta,\eta,\tau_1,\gamma))$ функция $\mu^{(1)}(\Delta,\eta,\tau_1,\gamma,\delta)\in(0,\mu_2^*(\Delta,\eta,\delta))$ такие, что каковы бы ни были $\tau_1\in(0,\infty)$, $\gamma\in(0,1)$, $\delta\in(0,\delta^{(1)}(\Delta,\eta,\tau_1,\gamma))$, $\mu\in(0,\mu^{(1)}(\Delta,\eta,\tau_1,\gamma,\delta))$ решение

$(p(\mu,x,t),\ q(\mu,x,t))$ задачи $\mu>0$ существует и единственно в $\bar G_{T_2(\mu)}$, где $T_2(\mu)=T_1(\mu)+\mu(\tau_1-\tau_\eta)$, и

$$T_2(\mu)<T^*+\frac{3}{4}\delta,\quad |p(\mu,.),q(\mu,.)|_{\bar G_{T_2(\mu)}}<C, \tag{3.23}$$

$$|q_t(\mu,.)|_{\bar G_{T_2(\mu)}}<\underline{C}(\tau_\eta,\tau_1)$$

$$|p(\mu,0,t)-p(\tau_\eta+\frac{t-T_1(\mu)}{\mu})|<\gamma\quad \forall t\in[T_1(\mu),T_2(\mu)]. \tag{3.24}$$

Доказательство сформулированного утверждения опирается на лемму 2 и неравенство (32) из [I].

Из (3.23), (3.24) вытекает, что $p(\mu,0,T_2(\mu))\to\bar p$, $q(\mu,0,T_2(\mu))\to q^*$ при $\mu\to 0$. Последующее доказательство теоремы 3.2 обобщает доказательство теоремы I.6 из [I6].

3. Вследствие теорем 3.I, 3.2 имеет место

<u>Теорема 3.3</u>. Пусть выполнены условия У.I)–У.IO) и $\mathcal{T}_1=0$. Тогда найдутся вектор-функции $\overset{(i+1)}{S}(t)\in C_2[0,\mathring{T}]$, $i=2,3$ и число $\mu_2>0$ такие, что при любом $\mu\in(0,\mu_2]$ в $\bar G_{\mathring{T}}$ существует единственное решение $(\overset{(i)}{p}(\mu,x,t),\overset{(i)}{q}(\mu,x,t))$ задачи $\mu>0$ при $S(t)=\overset{(i+1)}{S}(t)$, $i=2,3$, и

$$|\overset{(2)}{p}(\mu,.)-\overset{(2)}{p},\ \overset{(2)}{q}(\mu,.)-\overset{(2)}{q}|_{\bar G_{\mathring{T}}}<C\mu^{1/2}$$

$$|\overset{(3)}{p}(\mu,.),\ \overset{(3)}{q}(\mu,.)|_{\bar G_{\mathring{T}}}<C\quad \forall\mu\in(0,\mu_2]$$

$|\overset{(3)}{p}(\mu,.)-\overset{(3)}{p},\ \overset{(3)}{q}(\mu,.)-\overset{(3)}{q}|_{\Omega}\to 0$ при $\mu\to 0$ какова бы ни была замкнутая область $\Omega\in\bar G_{\mathring{T}}\setminus O'_{\mathring{T}}$.

Действительно, преобразуем уравнения (0.I)–(0.4), полагая $\tilde p=p-L\xi(t)$, где n -мерная вектор-функция $\xi(t)=\{t-T^*,0,\dots,0\}$ $\forall t\in[0,\mathring{T}]$. Замечая, что в получающейся после такого преобразования вырожденной задаче выполняются соответствующие условия У.1)–У.10) и применяя затем к преобразованной задаче $\mu \neq 0$ теоремы 3.1 и 3.2, нетрудно убедиться в справедливости теоремы 3.3 для исходной задачи $\mu \neq 0$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Гольдберг. Дифф. уравн., IX, № 10, 1973, 1831-1844
2. В.Н.Гольдберг. ДАН, 214, № 2, 1974, 253-256.
3. А.Н.Тихонов. Матем. сборн., 31, (73), № 3, 1952, 575-586.
4. Л.С.Понтрягин. ИАН СССР, сер. матем., 21, № 5, 1957, 605-627.
5. Е.Ф.Мищенко, Л.С.Понтрягин. ИАН СССР, сер. матем., 23, № 5, 1959, 643-660.
6. Е.Ф.Мищенко. ИАН СССР, сер. матем., 21, № 5, 1957, 627-654.
7. В.Н.Гольдберг. Дифф. уравн., XII, № 4, 1976, 687-699.
8. В.Н.Гольдберг. ДАН, 214, № 2, 1974, 253-256.
9. М.А.Беляева. ДАН, 189, № 6, 1969, 1167-1170.
10. Ю.П.Бойлаев. ЖВМ и МФ, 11, № 5, 1971, 1193-1204.
11. В.Н.Гольдберг. ДАН, 202, № 3, 1972, 518-521.
12. Б.П.Демидович. Лекции по математической теории устойчивости, "Наука", 1967.
13. Р.М.Минц. ДАН, 147, № 1, 1962, 31-33.
14. А.Н.Филатов. Л.В.Шарова. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний., "Наука", 1976.
15. В.Н.Гольдберг. Дифф. уравн., XI, № 7, 1975, 1278-1292.
16. В.Н.Гольдберг. Препринт. № 14 НИРФИ, 1971, г.Горький.