

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиопизический институт (НИРФИ)

Препринт № 105

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОМЕРНОЙ
ВОЗБУДИМОЙ СРЕДЕ

Ю.К.Гольцова,
Г.М.Жислин,
В.Г. Яхио

г. Горький - 1977 г.

Введение

В работах [1 + 4] рассматривались нестационарные процессы, связанные с распространением волн в возбудимой среде. Изучение подобных решений существенно для понимания механизма таких процессов, как нестационарное образование ведущего центра в химических реакциях [5], возникновение фибрилляции сердечной мышцы [2, 6]. В частности, с помощью приближенного метода было рассмотрено формирование начального возмущения в стационарные импульсы возбуждения [3], и показано, что при некоторых начальных условиях возникает специфическая картина, представляющая собой распад остановившегося фронта возбуждения [4]. При этом, также, были определены условия, когда рассмотрение нестационарных процессов можно провести только численными методами. Изучение таких процессов является целью предлагаемой работы. Заметим, что результаты численного счета, совместно с результатами аналитического рассмотрения должны составить полную картину характерных процессов, которые могут протекать в рассматриваемой здесь модели возбудимой среды.

§ 1. Деление остановившегося фронта возбуждения.

1. В этом параграфе будет рассмотрена динамика остановившегося фронта, а также определены условия, при которых остановившийся фронт возбуждения либо делится, либо после небольшой задержки уходит от точки остановки.

Модель возбудимой среды будем описывать следующей системой уравнений [1 + 4]

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v); \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi(u, v) \quad (1)$$

$$-L \leq x \leq L.$$

На границах системы предположим отсутствие потока переменной u , т.е. $\frac{\partial u}{\partial x}(t, -L) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$, а начальные распределения переменных обозначим через $u_0(x)$ и $V_0(x)$. Рассмотрение возможных решений системы (1) проведем с помощью модельных выражений

$$f(u, v) = -(v - \theta) + (u - a_1) \{1 - (u - a_2)^2\} \left\{1 - \frac{a_3}{1 + N(u - a_1)^2}\right\}$$

$$\varphi(u, v) = (u + \alpha_0 v - \beta_1)(\alpha_1 u + \alpha_2 v + \beta_2)(\alpha_3 u + \alpha_4 v + \beta_3),$$

которые, с одной стороны, позволяют качественно аппроксимировать известные зависимости f и φ из [7,8], а с другой стороны, содержат удобные управляющие параметры. Изменяя параметры (a_i, θ, N) $i = 1, 2, 3$ можно задавать различную степень активности в системе, а также смоделировать дополнительный изгиб на падающем участке, который существует на характеристиках в моделях Нобла [7]. С помощью параметров α_j ($j = 0 \div 4$) и β_k ($k = 1 \div 3$), можно получить различные режимы в системе: автоколебательный, триггерный, ждущий. Параметр ε определяет величину релаксационности в системе. Например, в химических реакциях [7] $\varepsilon = 0,005$, а в модели Нобла [8] $\varepsilon = 0,01$. В таких релаксационных системах движение каждого фронта в импульсе можно рассматривать независимо. При этом интересный нас нестационарный процесс, связанный с делением фронта возбуждения, может возникнуть лишь в случае остано-

ки этого фронта [4]. Остановка фронта происходит при $V = V_{кр}$ [3]. Напомним, что величина $V_{кр}$ находится из выражения $\int_{u_1(V_{кр})}^{u_3(V_{кр})} f(z, V_{кр}) dz = 0$, где $u_1(V)$ и $u_3(V)$ корни уравнения $f(u, V) = 0$, соответствующие устойчивым ветвям N -образной характеристики.

Начальные условия для системы (1) зададим в виде следующих функций $V_0(x) = V_{кр}$; $u_0(x) = u_1(V_{кр}) + \{u_3(V_{кр}) - u_1(V_{кр})\} \tanh 100(x/L)$.

Заметим, что начальное возмущение $u_0(x)$ можно задать и в виде произвольного перепада между значениями $u_1(V_{кр})$ и $u_3(V_{кр})$, так как через время порядка ε это распределение примет форму, близкую к стационарной волне при $V = V_{кр}$ (см., например, [3]).

2. Решения были получены при различных значениях параметров в функциях (2). Численный счет подтвердил существование (при $\varepsilon < 1$) четко разделяющихся этапов быстрых и медленных движений, причем за время быстрых изменений u , величина V практически остается постоянной.

Рассмотрим каждый этап подробнее. В случае медленных движений фронт остается на месте и лишь профиль его несколько деформируется. Отметим, что остановка фронта происходит не только при $V = \text{const} = V_{кр}$, но и в случае неоднородного распределения $V(x)$, необходимо только, чтобы вблизи точки остановки X_c выполнялось равенство $V(X_c) = V_{кр}$. При этом следует различать устойчивые и неустойчивые точки остановки. Если значения $V(x)$ с разных сторон X_c , на расстояниях больших чем $l_{фр}$ — длина фронта возбуждения, соответствуют движению фронта к точке остановки, то такая точка устойчива (последний график на рис. 1 б).

В противоположном случае, когда фронт возбуждения уходит от X_c , точку остановки будем называть неустойчивой (первые графики на рис. 1 а, б). Важно, что неустойчивая точка остановки может удерживать около себя

волновой перепад. Интересующие нас нестационарные режимы наблюдались только в тех случаях, когда на этапе медленных движений устойчивая точка превращалась в неустойчивую точку остановки.

Возникновение быстрых движений на фронте приводит либо к убеганию фронта возбуждения от X_c (рис. 1а), либо к делению неподвижного фронта на две разбегающиеся волны с таким же наклоном, что и начальный фронт, и одну волну с противоположным наклоном. Последняя волна будет двигаться к точке X_c , которая для такой волны является уже устойчивой точкой остановки (рис. 1б).

На новом этапе медленных движений происходит повторное превращение устойчивой точки в неустойчивую точку остановки, что может привести к следующему делению фронта.

3. При каких нелинейных зависимостях (2) процесс деления фронта становится периодическим? В большинстве рассмотренных случаев периодическое деление происходило лишь при антисимметричных (относительно $u = a_1$, $V = \bar{v}$, (см. формулу (2)) нелинейных характеристиках. Система при этом находилась либо в автоколебательном, либо в триггерном режиме. Незначительное искажение характеристик (2) приводило к ограничению числа делений. Дальнейшее нарушение исходных свойств симметрии характеристик приводит к режиму, когда фронт уходит из точки остановки без деления.

Создание количественной теории процесса фронта возбуждения встречается с определенными математическими трудностями, поэтому здесь отметим только основные качественные особенности нестационарных процессов.

Медленные изменения переменных могут происходить лишь до тех пор, пока переменная V не достигнет определенного распределения $V_c(x)$, зависящего от вида функции f и φ . Когда такое распределение достигается, на фронте появляется небольшое плато, в одной из точек которого производная du/dx равна нулю (см. рис. 1б). Во всех случаях, когда плато появилось, возникающие на нем быстрые движения приводили

к делению перепада. Если же быстрые движения возникают раньше, чем образовалось плато, то они проявляются в уходе фронта от точки остановки. В месте остановки фронта распределение переменной $V = V(x)$ представляет собой, в большинстве случаев, монотонную функцию, причем основное ее изменение происходит на длине, равной ширине фронта возбуждения. Поэтому приближенно распределение $V(x)$ можно определять с помощью максимального V_1 и минимального V_2 значения этой переменной. Для предельного распределения $V_c(x)$ эти значения соответственно обозначим через V_{1c} и V_{2c} (см. рис. 1 б). Тогда, по аналогии с выводами работы [9], за характеристики процесса примем времена медленных движений между некоторыми значениями $V_{нач}$ и $V_{кон}$ на различных устойчивых ветвях нелинейной характеристики

$f(u, V)$. Обозначим эти времена через $\theta_1(V_{нач}, V_{кон})$ и $\theta_2(V_{нач}, V_{кон})$ и для определенности положим, что θ_1 соответствует движению на ветви АВ а θ_2 — на ветви СД (см. рис. 1).

С помощью этих обозначений условия, необходимые для периодического деления фронта, записываются в виде равенств

$$\theta_2(V_{кр}, V_{1c}) = \theta_1(V_{кр}, V_{2c}); \quad (3)$$

$$\theta_1(V_{1c}, V_{кр}) = \theta_2(V_{2c}, V_{кр}).$$

Если условие (3) нарушается, то через некоторое время

$$(t \approx [\theta_2(V_{кр}, V_{1c}) + \theta_1(V_{1c}, V_{кр})])$$

либо

$$t \approx [\theta_1(V_{кр}, V_{2c}) + \theta_2(V_{2c}, V_{кр})]$$

распределение $V(x)$ на всем отрезке будет либо меньше, либо больше значения $V_{кр}$, и, следовательно, фронт возбуждения уйдет от точки X_c . Заметим, что

для геометрически антисимметричных нелинейных функций (2) условие (3) заведомо выполняется и деление фронта происходит всегда периодически. Другим примером правильности критерия (3) являются результаты численного счета, приведенные на рис. 2. Видно, что характер эволюции фронта меняется при отклонении величины параметра Q_2 от значения Q_1 , что приводит к нарушению исходных свойств симметрии N -образной функции. Но если при малых значениях $\Delta = Q_2 - Q_1 = 0,01$ условие (3) нарушается и после одного деления фронт уходит из X_c (см. рис. 2^a), то при дальнейшем увеличении Δ , как показал расчет на сосредоточенной модели, условие (3) снова начинает выполняться, и режим периодического деления восстанавливается (к этому выводу приводит нас сравнение первого и последнего графика на рис. 2^b).

Когда равенство (3) не выполняется и фронт уходит из точки остановки без деления, то максимальное и минимальное значения V_1 и V_2 в распределении переменной V меньше отличаются от $V_{кр}$, чем в распределении $V_c(x)$ (см. рис. 1). Волновой перепад, при этом, уходит в ту область пространства, где изменение переменных происходит быстрее.

4. Проведенные расчеты показали, что остановка фронта возбуждения создает благоприятные условия для расфазировки колебаний в возбудимой среде. Но, как следует из отмеченных выше особенностей, характер такого процесса расфазировки зависит от соотношения между τ -длительностью импульса возбуждения и R -временем рефрактерного состояния. Если, для определенности, принять состояние на одной из ветвей N -образной функции (например, на СД, см. рис. 1) за возбужденное состояние, то длительности импульса будет соответствовать величина $\theta_2(V_{2c}, V_{1c})$, а рефрактерности -

$$[\theta_1(V_{1c}, V_{2c}) + \theta_2(V_{2c}, V_{1c})]$$

В этих обозначениях условия, при которых происходит режим деления, имеют вид $\tau = \frac{1}{2} R$. Напомним, что

ранее, например, в работах [6, 9], особое внимание обращалось на режим расфазировки, связанный с перезапуском точек системы ($\tau > \frac{1}{2} R$).

Сравнение результатов предыдущих работ [2, 6, 9] и проведенного здесь рассмотрения приводит к выводу о существовании ТРЕХ ХАРАКТЕРНЫХ РЕЖИМОВ РАСФАЗИРОВКИ, определяемых поведением остановившегося фронта возбуждения.

а) В случае $\tau < \frac{1}{2} R$ фронт возбуждения после некоторой остановки уходит обратно в возмущенную область. Происходит своеобразное отражение фронта от точки остановки. В результате та часть пространства, где система находится в возбужденном состоянии, уменьшается. Время задержки фронта зависит от начального распределения переменной V в месте остановки, и поэтому такая пассивная расфазировка полностью определяется процессами, обеспечивающими остановку фронта.

б) Если выполняется (3), что приводит к равенству $\tau = \frac{1}{2} R$ то в месте остановки наблюдается деление фронта.

в) В случае $\tau > \frac{1}{2} R$ фронт возбуждения проходит дальше за точку остановки и возбуждает новые области в системе. Динамика такого процесса перезапуска на распределенной модели была рассмотрена ранее в работе [2]. В двух последних случаях происходит активный процесс расфазировки, который, однако, будет неограничен только при специальном подборе параметров системы, обеспечивающих выполнение условия (3).

§ 2. Влияние параметров возбудимой среды на процесс деления фронта возбуждения.

1. Для понимания нестационарных процессов в реальных средах важным оказывается вопрос о минимальных геометрических размерах источника активности. Пусть в системе выполняется условие (3) и источник представляет собой периодически делящийся фронт возбуждения. Естественно тогда предположить, что размер такого источника должен быть не меньше длины остановившегося

фронта возбуждения. Для проверки этого предположения рассматривались изменения в процессе периодического деления фронта (см. рис. 3 и рис. 4) при уменьшении размера системы L . Оказалось, что при $L \geq 7$ ход процесса и период деления фронта практически не зависят от L . При дальнейшем уменьшении L происходит уменьшение периода деления (рис. 3), а число делений становится ограниченным. В частности, на рис. 4 показано, что при $L = 2$ не успевает произойти даже одного деления, в то время как точки системы уже переходят в состояние на одной ветви N -образной функции. После этого из-за неоднородности в автоколебательной системе образуется новый фронт, но он тоже через некоторое время разрушается и система приходит к однородному распределению. Длину остановившегося фронта возбуждения можно точно определить из нелинейного уравнения

$$\frac{d^2 U_{cm}}{dx^2} + f(U_{cm}, V_{кр}) = 0 \quad (4)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial U_{cm}}{\partial x}(x=L) = \frac{\partial U_{cm}}{\partial x}(x=-L) = 0.$$

Из (4) нетрудно определить минимальный размер отрезка, при котором может еще существовать неподвижный фронт. Эта величина равна $l_{min} = \pi / \sqrt{f'_u(U_2(V_{кр}), V_{кр})}$ — длина, на которой уместается решение линеаризованного уравнения (4), представляющее собой половину периода косинусоиды. Через $f'_u(U_2(V_{кр}), V_{кр})$ обозначим наклон на падающем участке N -образной характеристики в месте, где $f(U_2(V_{кр}), V_{кр}) = 0$. Для рассмотренного выше численного примера $l_{min} = \pi$. Поэтому оценка длины, при которой происходит быстрое разрушение режима деления фронта с помощью l_{min} , является вполне удовлетворительной. Было замечено также, что время разрушения периодического решения зависит от точности счета исходной системы (1), а также от амплитуды возмущения, наложенного на начальное условие $U_0(x)$.

В то же время, нетрудно убедиться, что инкремент неустойчивости возмущений стремится к нулю только при $L \rightarrow \infty$. Следовательно, процесс деления фронта, описываемый системой (1) на ограниченном отрезке всегда неустойчив. Правда, при $L \approx 2 \ell_{\text{фр}}$ инкремент неустойчивости очень мал и наблюдается достаточное число делений, причем профиль фронта практически не отличается от профиля фронта при периодическом делении.

В качестве примера приведем длину фронта возбуждения, полученную на модели Нобла (см. расчет в [10]), где $\ell_{\text{фр}} \approx 3$ мм. Таким образом "критический" размер ткани сердца при фибрилляции (если она вызвана источниками типа делящегося фронта возбуждения) будет равна нескольким миллиметрам, причем данные о длительности фронта могут быть сняты экспериментально, когда осуществляется нормальное проведение импульсов в волокнах.

2. В модели Нобла нелинейная N -образная функция имеет характерный изгиб на падающем участке. Интересно проверить какое влияние оказывает эта особенность на процесс деления фронта. Численный счет показал, что величина несимметричности характеристики, при которой происходит переход от режима деления к режиму ухода фронта, должна быть больше, если имеется дополнительный изгиб на падающем участке характеристики $f(u, v) = 0$. Меньшие значения параметра N соответствуют большему изгибу (см. формулу (2)). Влияние величины изгиба на процесс распада фронта показан на рис. 5 а, б при одинаковой асимметрии функции $\psi(u, v) \neq 0$. Видно, что число делений фронта при одной и той же асимметрии больше в системе с большим изгибом на падающем участке. Следовательно, процесс деления фронта в такой системе более устойчив. Но асимметричность характеристики в конце концов приводит к уходу фронта из точки остановки, даже при малых N .

В широком диапазоне изменений параметра ($5 \leq N \leq 100$) отношение T_g - периода делений фронта к T_0 - собственному периоду колебаний каждой точки в системе оставалось примерно постоянным $T_g \approx 0,9 \cdot T_0$.

3. Положение точек равновесия U_p, V_p на нелинейной характеристике f является одним из существенных параметров системы. В сосредоточенном случае, как известно, качественный характер решения полностью определяется этими значениями. Зато в распределенной модели такой специфический процесс, как деление фронта, протекает одинаково, если выполнено условие (3), и в автоколебательной, и в триггерной, и в ждущей системах.

Однако процесс ухода фронта от X_c уже зависит от режима при однородном распределении. За время, пока фронт, неподвижен, возникает характерная неоднородность переменной V . После ухода фронта из точки X_c соответствующая неоднородность создается и по переменной U . С течением времени эта неоднородность расплывается, амплитуда ее уменьшается, и, например, в триггерной системе она исчезает, приводя систему к однородному равновесному состоянию.

Иначе протекает этот процесс в автоколебательной системе. На такой неоднородности возникают быстрые движения в виде двух разбегающихся волн (рис. 6), и поэтому частота колебаний продолжает оставаться некоторое время более высокой, чем в сосредоточенной системе.

В триггерном режиме существует еще одна особенность, связанная с положением точек равновесия. Если состояния равновесия V_{1p} и V_{2p} на разных ветвях N -образной функции будут отличаться от величины V_{kp} на меньшие значения, чем V_{1c} и V_{2c} то, естественно, этих последних значений переменная V достигнуть не сможет и деления фронта происходить не будет. При этом образуется устойчивая стационарная структура в виде одного неподвижного перепада. Распределение в пространстве будет иметь такой же вид как на первом графике рис. 6.

В реальных возбудимых мембранах релаксационность может варьироваться в широких пределах. В связи с этим интересно сравнить ход нестационарных процессов, полученных здесь и в работах [3, 4], для сильно релаксационных систем, с соответствующими режимами в слабо релаксационных процессах.

Релаксационность уменьшается до таких значений ϵ , пока длина фронта не сравнялась с длиной импульса. При этом по-прежнему происходило деление фронта, а в образовавшихся импульсах на месте фронта и спада величина переменной V оказывалась соответственно больше и меньше значения $V_{кр}$, что согласуется с выводами работы [3]. Такие расчеты показывают, что эффекты, наблюдаемые в сильно релаксационных системах могут происходить и в системах со слабой релаксационностью.

Здесь была рассмотрена эволюция остановившегося фронта возбуждения с помощью уравнений, в которых используются модельные характеристики возбудимой среды (см. формулы (2)). Однако, эти характеристики качественно отражают все основные свойства известных сейчас возбудимых сред, поэтому можно надеяться, что полученные выводы останутся справедливыми и для других моделей, таких, например, как модель Нобла [8] или модель автоколебательной химической реакции [7].

§ 3. Сложные режимы в автоколебательной возбудимой среде.

1. В этом параграфе будет показано, что при определенных условиях однородные в пространстве колебания оказываются неустойчивыми. Такая неустойчивость приводит к образованию в пространстве неоднородной "ячеистой" структуры. При этом расположение и перемещение границ "ячеек" сильно зависит от начальных условий и поэтому приводит к сложному режиму колебаний в системе. Заметим, что ранее Заиклиным [11] были получены сложные режимы на некоторых моделях автоколебательных химических реакций, однако условия возникновения сложных процессов не были выяснены. Здесь сделаны попытки более подробного рассмотрения таких процессов. Полученный результат, по мнению авторов, может оказаться полезным для понимания некоторых патологических режимов работы волокон сердечной мышцы.

Нелинейную функцию $f(u, V)$ в (1) зададим с помощью кубической параболы $f(u, V) = -V + u - u^3$.

Функцию $\varphi(u, V)$ будем задавать в таком виде, чтобы система всегда оставалась автоколебательной рис. 7.

2. Рассмотрим некоторые факторы, определяющие устойчивость однородных колебаний в распределительной системе. Будем полагать, что система сильно релаксационная, т.е. $\varepsilon \ll 1$, а длина отрезка $2L$ удовлетворяет условиям $l_{фр} < 2L \ll a_{max} T_0$, где $l_{фр}$ — характерная длина фронта возбуждения, T_0 — период собственных автоколебаний, $a_{max} \sim 1/\varepsilon$ — наибольшая скорость фронта возбуждения в системе. Последнее неравенство означает, что время пробега фронта возбуждения вдоль системы пренебрежимо мало по сравнению со временем последующих медленных движений. В этом случае основную роль в поведении системы будут играть медленные движения. Как указывалось в [3], они могут быть исследованы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть в начальный момент времени на однородное распределение переменных u и V наложено возмущение. Будем следить за изменением переменной V в двух выделенных точках c и d (см., например, рис. 9), причем в начальный момент $V_c = V_{max}$, а $V_d = V_{max} - \Delta V_H$ (рис. 7). В зависимости от того, будут ли значения переменной V в точках c и d сходиться к одному значению с течением времени или, наоборот, будут все больше различаться, однородное распределение в системе будет либо устойчивым, либо неустойчивым. Сначала движение точек будет происходить на ветви I нелинейной функции $f(u, V) = 0$ (см. рис. 7). Через время

$$t_1 = \int_{V_{min}}^{V_{max} - \Delta V_H} \frac{dV}{\varphi_1(V)} = \int_{V_{прям}}^{V_{max}} \frac{dV}{\varphi_1(V)}, \quad (5)$$

где $\varphi_1(V) = \varphi[V, u_1(V)]$ — скорость медленной переменной на ветви I, точка d достигает значения V_{min} , а точка c — значения $V_{прям}$. При этом произойдет переброс значений переменной u в системе из состояния на ветви I в состояние на ветви III.

Точка d_1 перейдет в состояние d_2 , а точка c_1 в состояние c_2 . Теперь переменная V будет увеличиваться во времени и поэтому точка c первой достигнет значения V_{\max} . После этого произойдет обратный переброс значений переменных u из состояний на ветви III в состояние на ветви I. Время нахождения точек на ветви III равно

$$t_2 = \int_{V_{\text{пром}}}^{V_{\max}} \frac{dV}{\varphi_3(V)} = \int_{V_{\min}}^{V_{\max} - \Delta V_k} \frac{dV}{\varphi_3(V)}, \quad (8)$$

где $\varphi_3(V) = \varphi[V, u_{\text{н}}(V)]$ —

скорость медленной переменной на ветви III, $\Delta V_k = V_{c_2} - V_{d_2}$ равно расстоянию между значениями переменной V в точках c и d после одного полного периода колебаний, происшедшего в точке c . В качестве критерия устойчивости естественно взять величину следующего параметра:

$$\delta = \frac{\Delta V_k}{\Delta V_n}.$$

Тогда при $\delta < 1$ однородное распределение переменных будет устойчивым, а в случае $\delta > 1$ будет наблюдаться рост возмущений и разрушение однородного распределения^{+) .}

^{+) Обратим внимание на то, что из формул (5+6) находится зависимость $\Delta V_k = \Delta V_k(\Delta V_n)$. Поэтому $\delta = \delta(\Delta V_n)$ является определенной функцией от ΔV_n и в общем случае кривая $\delta = \delta(\Delta V_n)$ может при некотором ΔV_n пересекать кривую $\delta = 1$, что будет означать изменение устойчивости в зависимости от амплитуды начального возмущения. Такие режимы требуют дополнительного исследования и здесь нами рассматриваться не будут.}

В случае малых начальных возмущений

$$\Delta V_n \sim \Delta V_k \ll V_{\max} - V_{\min},$$

выражение для δ не будет зависеть от ΔV_n , и может быть представлено в аналитическом виде

$$\delta = \frac{\Delta V_k}{\Delta V_n} = \frac{\varphi_1(V_{\min}) \cdot \varphi_2(V_{\max})}{\varphi_1(V_{\max}) \cdot \varphi_2(V_{\min})}. \quad (7)$$

Наиболее простые случаи изменения переменной V во времени для устойчивого и неустойчивого однородного распределения показаны соответственно на рис. 7^а и рис. 7^б. Изменение $V(t)$, показанное на рис 7^в, соответствует промежуточному случаю. Некоторые особенности такого поведения будут отмечены ниже.

Полученные здесь формулы (5 + 7) позволяют определять только сам факт устойчивости (при $\delta < 1$) или неустойчивости (при $\delta > 1$) однородного распределения. Изучение дальнейшей эволюции системы необходимо проводить численными методами. Такой расчет был выполнен для системы уравнений (1 + 2) со следующими нелинейными функциями:

$$f(u, V) = -V + u - u^3 \quad (8)$$

$$\varphi(u, V) = u + \gamma V - \beta V^3$$

при $\varepsilon = 0,01$ и $L = 20$.

Оказалось, что при $\delta < 1$ начальное возмущение действительно уменьшается в процессе колебаний и переменные u и V стремятся к однородному распределению в пространстве. Более сложным было поведение системы в неустойчивом случае, где плавное возмущение превращается в сильно неоднородное распределение, которое можно назвать "ячеистой" структурой (см. рис. 8).

Важно отметить при этом, что весь процесс разбиения на "ячейки", а также перемещение самих "ячеек" в пространстве очень похоже на стохастическое движение. Для проверки этого предположения была просчитана эво-

люция системы при незначительно измененном начальном условии. Результаты таких расчетов приведены на рис. 8а, б. Видно, что за время всего нескольких периодов колебаний профиль пространственного распределения значительно изменяется, Это означает, что малые флуктуации вида нелинейных функций или других параметров в системе существенно образом скажутся на ее поведении, и, как следствие, приведут к стохастическим движениям.

3. Рассмотрим теперь влияние релаксационности системы (т.е. величины параметра ξ) на устойчивость однородного распределения переменной V . Более наглядно такое влияние удастся продемонстрировать на системе, которая при $\xi = 0$ находится в безразличном состоянии равновесия по отношению к пространственным возмущениям. Пусть, например, $\varphi_1(V) = K_1 > 0$, а $\varphi_2(V) = K_2 < 0$ (временная зависимость $V(t)$ показана на рис. 7б). Тогда все точки системы, находящиеся на одной ветви (I и III) N -образной характеристики будут двигаться с одной скоростью, а после переброса на другую ветвь характеристики все точки быстро сменят свое движение на обратное и снова это движение будет с одинаковой скоростью. При этом начальное распределение переменной V в пространстве не изменится в процессе автоколебаний. Период автоколебаний будет определяться максимальным и минимальным значением начального распределения переменной V . Собственный период колебаний каждой точки

$$T_0 = \frac{K_1 + K_2}{K_1 \cdot K_2} (V_{\max} - V_{\min}),$$

а минимальная величина периода автоколебаний в распределенной системе, при условии, что фронт возбуждения не останавливается внутри системы, будет равна $T_0 / 2$.

Влияние релаксационности будет проявляться в конечном времени движения фронта возбуждения по системе. Чем больше время пробега фронта вдоль отрезка $[-L, L]$ по сравнению с T_0 , тем сильнее сказывается влияние релаксационности. На рис. 9 приведен пример такого влияния. Показано распределение переменной V (пунктир) в два момента времени. В первый момент времени

на краю отрезка (в точке - L) значение V достигло величины V_{min} и произошел переброс точек системы с ветви I на ветвь III (см. рис. 7). Следующий момент времени показан, когда фронт возбуждения (сплошная линия) распространяется внутри системы, но его скорость не очень большая, поэтому впереди фронта переменная V успевает уменьшиться, а сзади - увеличиваться. Видно, что такой процесс приводит к сглаживанию исходного неоднородного распределения, и со временем значения переменной V будут стремиться к однородному распределению. Следовательно, в менее релаксационных системах однородные распределения более устойчивы.

4. Кратко остановимся на применении полученного критерия для моделей реальных объектов. Так, в автоколебательных химических реакциях иногда возникает режим "ячеек" [1], который связывают со стационарными периодическими структурами Тьюринга. Однако расчеты позволяют предположить, что структуры типа "ячеек" скорее появляются в результате неустойчивости однородного режима автоколебаний. Заметим, что в отличие от тьюринговского критерия неустойчивости, полученный здесь критерий (при $\xi \ll 1$) никак не зависит от коэффициентов диффузии исследуемых веществ. Можно провести экспериментальную проверку высказанного утверждения.

Аналогичные расчеты можно провести также и для модели Нобла. При этом рассмотренный здесь режим "ячеек" будет, по-видимому, описывать одну из разновидностей фибрилляции на автоколебательных волокнах сердца.

В заключение приведем некоторые сведения о методе счета исходной системы уравнений. Для решений была взята шеститочечная симметричная схема ($\sigma = 1/2$) [12]. При росписи этой схемы аргументы в нелинейных функциях f и ψ заменялись полусуммами значений на рассматриваемых слоях. Полученная нелинейная система уравнений относительно значений u , V в узлах сетки, решалась на каждом слое итерациями, а нахождение значений u , V для каждой следующей

итерации проводилось методом прогонки. Сходимость итераций при достаточно малом шаге Δt по t вытекает из сжимаемости рассматриваемых операторов, сходимость прогонки доказана в [12]. Решение системы (1) было проведено на ЭВМ БЭСМ-4. Отрезок $[-L, L]$ был разделен 200 точками ($h = L / 100$). Шаг по t не превышал $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$. Контрольный счет при $h = L / 200$ и $\Delta t = 10^{-4}$ показал, что при измельчении шага изменение решения в узлах сетки не превышает 0,05 на крутых участках фронта волны, и 0,0005 - на пологих. Поэтому можно ожидать, что отличие найденных численным счетом решений от истинного не превышает 0,05.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.М.Зhabotinsky, А.Н.Заикин, J.theor. biol., 40, 45-60 (1973).
2. А.И.Шербунов, В.И.Кринский, А.М.Перцов. Модели структурнофункциональной организации биологических систем, 1972 г., Москва - Дубна, стр. 95.
3. Л.А.Островский, В.Г.Яхно, Биофизика. 20, 3, 489, 1975 г.
4. В.Г.Яхно, Биофизика. 20, вып. 4, 669 (1975 г.);
5. А.М.Жаботинский, А.Н.Заикин. В сб. "Колебательные процессы в биологических и химических системах", т. 2 (1971), стр. 279, Пушкино на Оке.
6. В.И.Кринский. Проблемы кибернетики, 20, 59 (1968).
7. А.М.Жаботинский, А.Н.Заикин, М.Д.Корзухин, Г.П.Крейцер. Кинетика и катализ, т. 12, № 3, 584 (1971).
8. В.И.Кринский, Ю.М.Кокос, Биофизика, 18, вып. 6, 1067 (1973).
9. В.И.Кринский, А.М.Перцов, А.Н.Решетиллов. Биофизика, 17, вып. 2, 271 (1972 г.).
10. М.Б.Беркенблит, Н.Д.Введенская, И.Дудзявичус, С.А. Ковалев, С.В.Фомин, А.В.Холопов, Л.М.Чейлахан. Биофизика, 15, вып. 3, 521 (1970).
11. В.А.Васильев, А.Н.Заикин. Кинетика и катализ (в печати).
12. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. Наука, М., 1971.

Рис. 5. Процессы деления фронта в средах с одинаковой несимметричностью характеристики $\alpha_1 = 0,6$;
 $\alpha_2 = 0,601$; $l = 20$;
 $\varepsilon = 0,01$; $\beta_1 = 0,8$; $\alpha_0 = 0,5$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 =$
 $= \alpha_4 = 0$; $\beta_2 = \beta_3 = 1$)
 но разными величинами дополнительного изгиба на падающем участке.

а) $N = 20$; $N = 10$; Соответствующие этим значениям фазовые плоскости приведены с рисунками для профиля фронта.

Рис. 6. Эволюция решения в автоколебательной системе после ухода фронта от точки остановки.

$$\varepsilon = 0,01; \quad \alpha_1 = 0,6; \quad \alpha_2 = 0,62; \quad N = 100;$$

$$\beta_1 = 0,8; \quad \alpha_0 = 0,5; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0;$$

$$\beta_2 = \beta_3 = 1; \quad l = 20;$$

Рис. 7. Фазовая плоскость исследуемой системы

$$f(u, V) = 0; \quad (сплошная линия), \quad g(u, V) = 0;$$

$$(пунктирная линия), \quad \text{и изменение переменной } V$$

во времени при различных случаях устойчивости однородного распределения переменных:

- а) устойчивая к пространственным возмущениям системы;
- б) неустойчивая система;
- в) в такой системе возмущение не будет меняться во времени.

Рис. 8. Эволюция начального возмущения (u — сплошная линия, V — пунктирная линия) в системе с неустойчивым однородным распределением переменных. Для расчетов были взяты следующие начальные условия: $u_0(x) = -0,4$

$$а) \quad V_0(x) = 0,9 - \frac{0,3}{1 + 0,025x^2},$$

$$б) \quad V_0(x) = 0,9 - \frac{0,3}{1 + 0,025(x-0,2)^2}$$

Начальная стадия процесса ($0 \leq t \leq 2,5$) в обоих случаях протекает практически одинаково, поэтому результаты в случае б) приведены только с $t = 3$; $\gamma = 3,5$; $\beta = 2,7$; $T_0 \approx 2,8$.

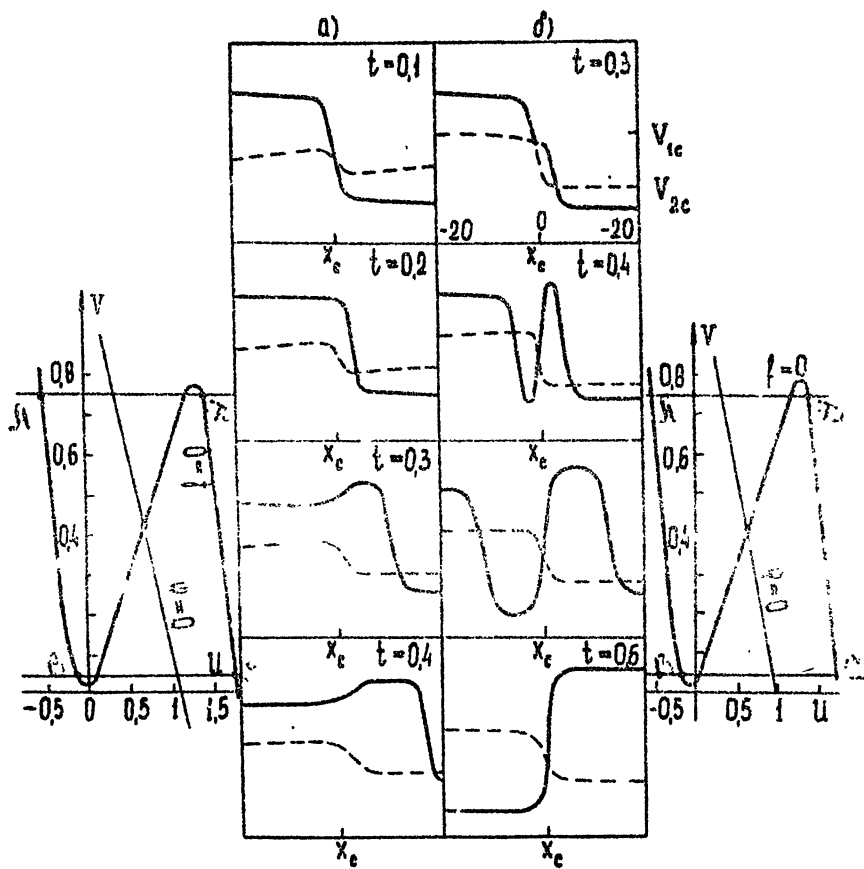


Рис. 1

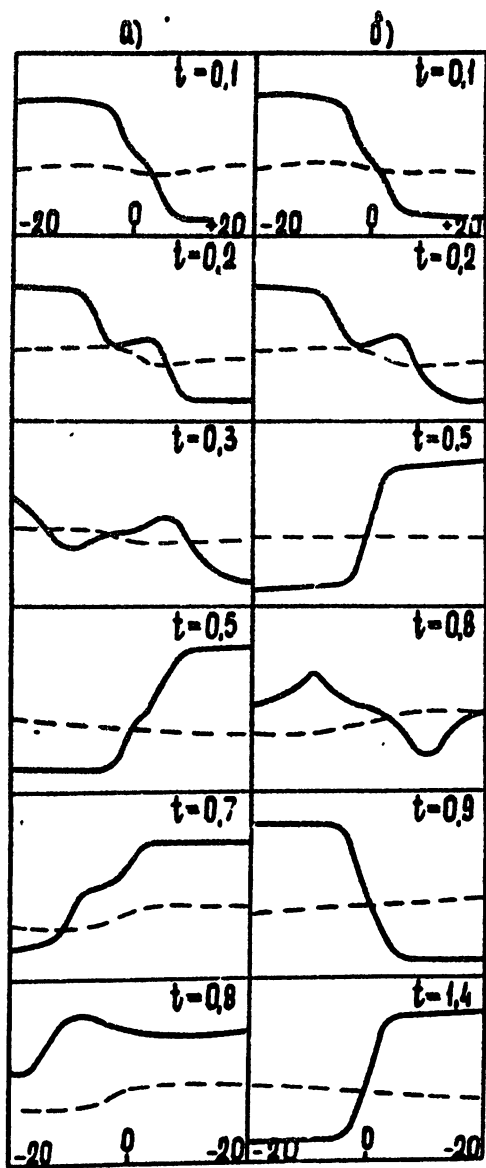


Рис. 2

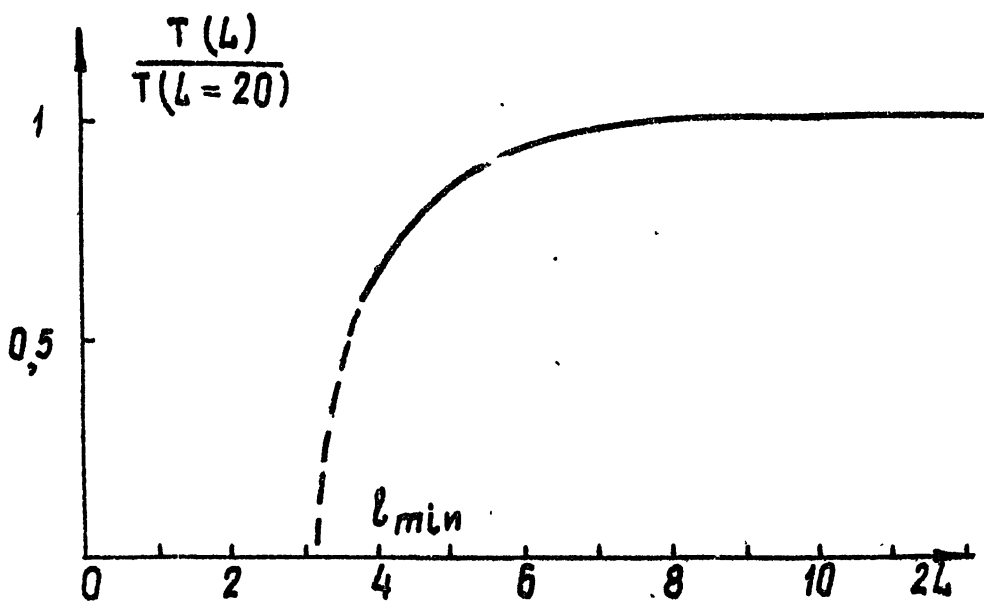


Рис. 3

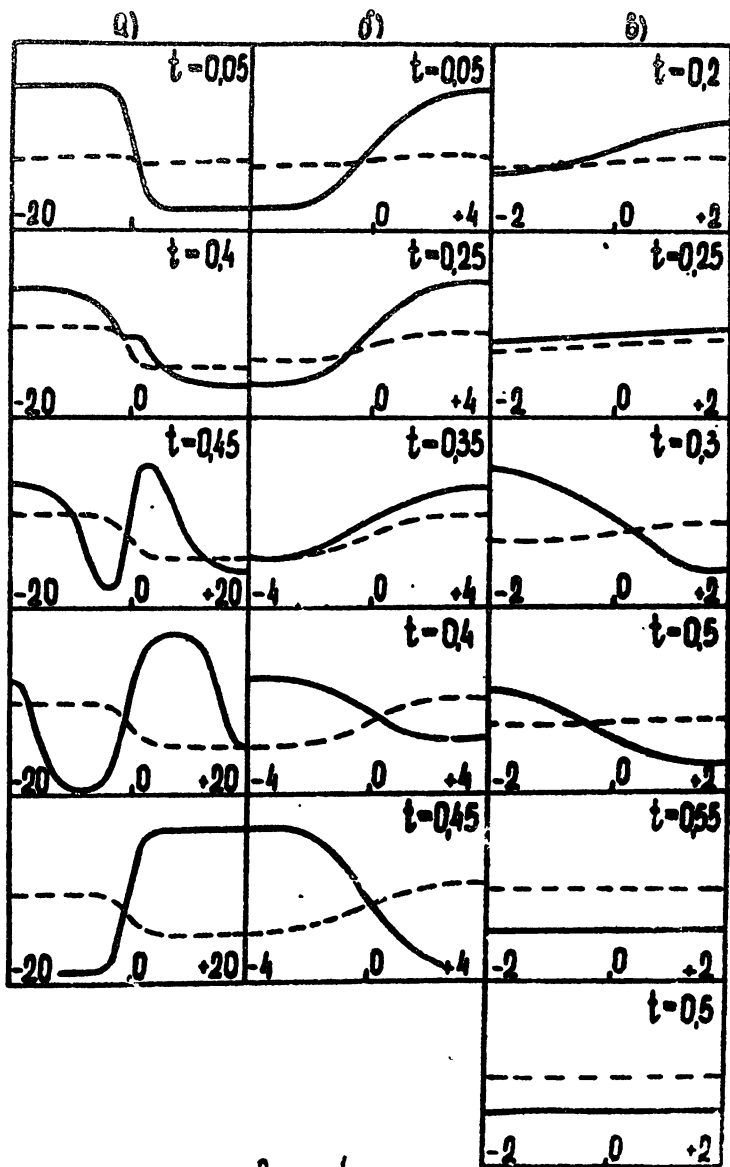
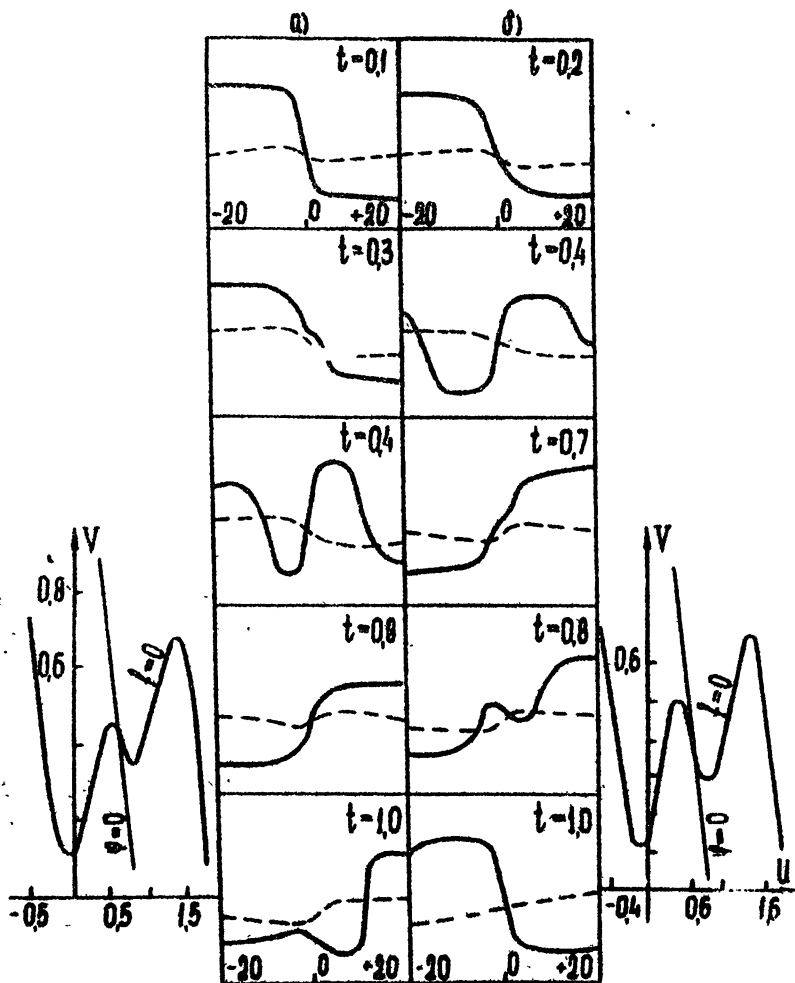


Рис. 4



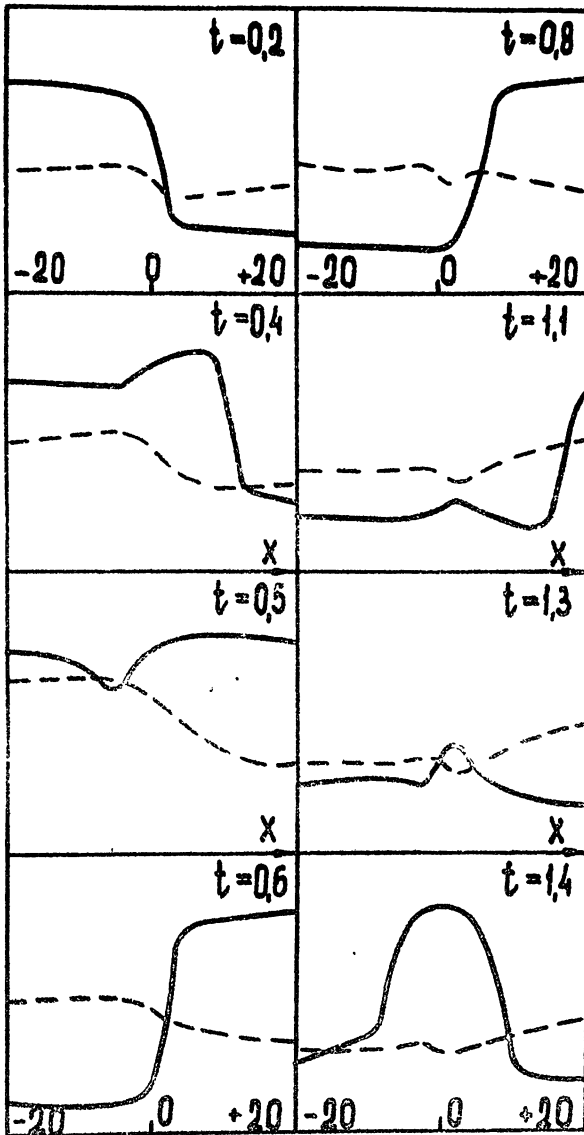


Рис. 6

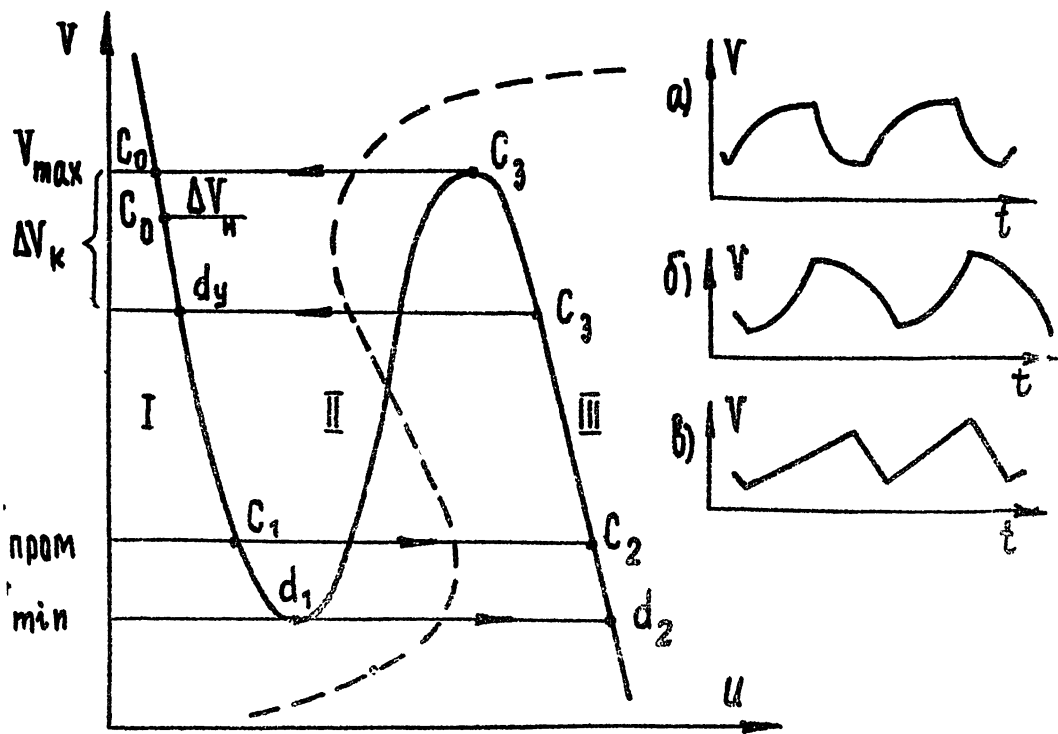


Рис. 7

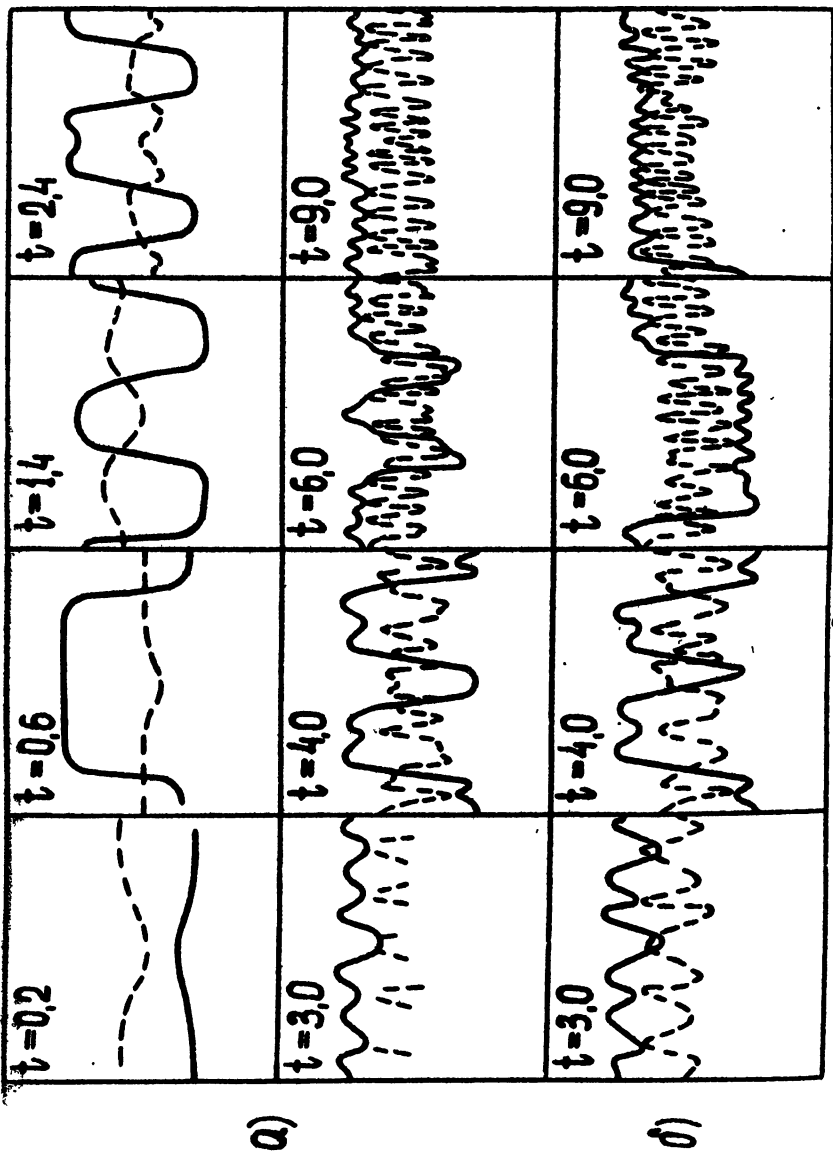


Рис. 8

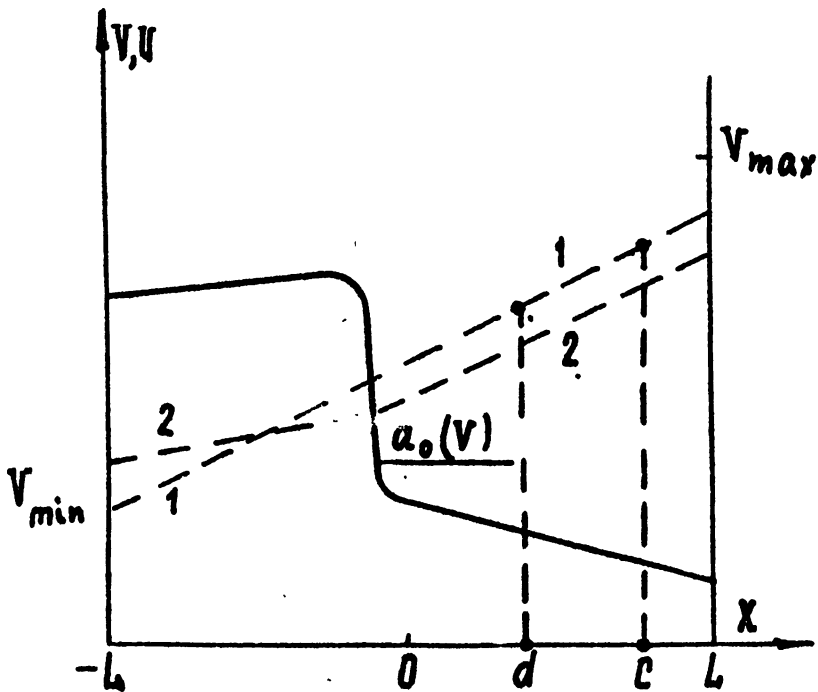


Рис. 9