

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 107

НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
В РЕЗОНАТОРАХ

Г.М.Шалашов

Горький 1977 г.

А н н о т а ц и я

В работе проведено теоретическое и экспериментальное исследование нерезонансной модуляции высокочастотных акустических волн низкочастотными упругими полями в резонаторах. Показано, что вследствие влияния амплитудно-фазо-частотной характеристики резонатора возможно как увеличение, так и уменьшение эффективности нерезонансной фазовой модуляции стоячих акустических волн по сравнению со случаем бегущих волн; переход фазовой модуляции волны в амплитудную; определен вклад доплеровской модуляции при колебаниях границ резонатора.

Нерезонансная фазовая модуляция высокочастотных акустических волн низкочастотными упругими полями успешно используется для измерения нелинейных свойств жидкостей [1] и твердых тел [2]. Нелинейные коэффициенты среды определяют в этом случае по индексу фазовой модуляции высокочастотной волны. Соответствующие теоретические расчеты проведены только для бегущих волн [3, 4, 5]. Однако, уже в первой экспериментальной работе по модуляции звука звуком в жидкости [6] была обнаружена также амплитудная модуляция высокочастотной волны, обусловленная частотно-избирательными свойствами акустического резонатора: излучатель высокочастотной акустической волны — исследуемая среда — приемник. Еще труднее обеспечить режим бегущих волн в твердом теле. Кроме того, основным типом модулирующего поля в твердом теле являются стоячие упругие колебания, сопровождающиеся движением границ образца. Возникающее при этом периодическое движение излучателя и приемника акустических волн относительно друг друга приводит к дополнительной доплеровской модуляции.

Известно, что образование стоячих волн в ограниченных системах может существенно изменить эффективность нелинейных взаимодействий [7]. Поэтому для правильной обработки экспериментальных данных необходимо определение влияния резонатора на эффекты нерезонансных параметрических взаимодействий акустических волн.

Пусть в плоскости $x = \ell + \eta_e(t)$ расположен

излучатель высокочастотной акустической волны, создающий смещения точек среды с амплитудой U_0 . В плоскости $x = z_0(t)$ расположен приемник. Функции $z_e(t)$ и $z_0(t)$ характеризуют периодическое движение границ образца около точек равновесия $x = l$ и $x = 0$, соответственно, и удовлетворяют следующим условиям

$$z_0 \approx z_e \ll l; \quad \Omega z_0 \approx \Omega z_e \ll c, \quad (1)$$

где Ω — частота модулирующего поля, c — скорость акустической волны. Коэффициент отражения от излучателя — $R_e = z_e e^{i k z_e}$, приемника $R_0 = z_0 e^{i k z_0}$ и коэффициент поглощения в среде γ .

Решение задачи будем искать в виде суммы переотраженных от стенок резонатора волн. Фаза каждой переотраженной волны изменяется как за счет нерезонансного взаимодействия с низкочастотным полем [5] (нелинейная модуляция), так и за счет смещения границ резонатора (доплеровская модуляция). При этом при расчете нелинейной модуляции [5], вследствие соотношений (1), можно считать границы резонатора закрепленными и интегрирование производить от $x = 0$ ($x = l$) до $x = l$ ($x = 0$). Фаза и амплитуда j -ой переотраженной волны, бегущей в плюс (минус) направлении оси x , при значении $x = l$ ($x = 0$) является начальной фазой и начальной амплитудой для $j+1$ -ой волны бегущей в минус (плюс) направлении.

В итоге получим следующее выражение для отклика пьезоприемника (с точностью до постоянной фазы)

$$u = k_0 \cdot e^{-\gamma l} u_0 \left\{ \cos \left\{ \omega t + \varphi^-(t) - k \left[z_e(t) - z_0 \left(t - \frac{l}{c} \right) \right] \right\} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos \left\{ \omega t - \Delta \cdot n + \varphi^-(t) - k \left[z_e(t) - z_0 \left(t - \frac{2nl}{c} - \frac{l}{c} \right) \right] \right\} \right\} + \quad (2)$$

$$+ \sum_{s=1}^n \left[\varphi^-(t - \frac{2s\ell}{c}) + \varphi^+(t - \frac{2s\ell}{c} + \frac{\ell}{c}) \right] -$$

$$- 2k \sum_{s=1}^n \left[\zeta_e(t - \frac{2s\ell}{c}) - \zeta_0(t - \frac{2s\ell}{c} + \frac{\ell}{c}) \right] \},$$

где $k_0 = \text{const}$ — характеризует чувствительность пьезоприемника, ω и k — частота и волновое число высокочастотной акустической волны, $\rho = \zeta_0 \zeta_e e^{-2\gamma\ell}$ и $\Delta = 2k\ell - \zeta_0 - \zeta_e$ — потери и фазовый сдвиг при двойном прохождении волны в резонаторе, $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ — изменение фазы волны за счет нелинейного взаимодействия при распространении от $x = 0$ до $x = \ell$ и от $x = \ell$ до $x = 0$, соответственно [5].

Выражение (2) является общим решением поставленной задачи.

Рассмотрим подробно два наиболее интересных случая когда модулирующее поле является полем стоячих колебаний акустического резонатора либо плоской бегущей волной.

Для случая взаимодействия акустических волн с полем стоячих колебаний выражение для $\varphi^\pm(t)$, $\zeta_0(t)$ и $\zeta_e(t)$ имеют вид: [5]

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) = \alpha \cos(\Omega t - \frac{\Omega \ell}{2c}) \quad (3)$$

$$\zeta_e(t) = -\zeta_0(t) = \beta \cos \Omega t,$$

где α имеет смысл индекса фазовой модуляции бегущей волны, прошедшей путь l ($\alpha \ll 1$), β - амплитуда колебаний стенки резонатора.

Подставляя (3) в (2) и проводя суммирование (см. [8] формулы 1.352 и 1.447), получим

$$u' = \frac{u e^{\delta e}}{k_0 u_0 a_0} = [1 + m_a \cos(\Omega t - \psi_a)] \cos[\omega t + m_g \cos(\Omega t - \psi_g) - \psi_0]$$

$$= \left\{ 1 + \frac{\tilde{\alpha}}{4} \operatorname{cosec}\left(\frac{\xi}{4}\right) \cdot \left[\frac{a^-}{a_0} \cos\left(\Omega t + \psi^- - \psi_0 - \frac{\xi}{4} - \tilde{\psi}\right) - \right. \right. \quad (4)$$

$$\left. - \frac{a^+}{a_0} \cos\left(\Omega t + \psi_0 - \psi^+ - \frac{\xi}{4} - \tilde{\psi}\right) \right] - \frac{k\beta}{2} \left[\frac{a^-}{a_0} \sin\left(\Omega t + \psi^- - \psi_0 - \frac{\xi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a^+}{a_0} \sin\left(\Omega t + \psi_0 - \psi^+ - \frac{\xi}{2}\right) \right] \} \cos\left\{ \omega t + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \operatorname{cosec}\left(\frac{\xi}{4}\right) \left[\sin\left(\Omega t + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\xi}{4} - \tilde{\psi}\right) - \frac{a^-}{2a_0} \sin\left(\Omega t + \psi^- - \psi_0 - \frac{\xi}{4} - \tilde{\psi}\right) - \frac{a^+}{2a_0} \sin\left(\Omega t + \psi_0 - \right.$$

$$\left. - \psi^+ - \frac{\xi}{4} - \tilde{\psi}\right) \right] - \frac{k\beta}{2} \left[\frac{a^-}{a_0} \cos\left(\Omega t + \psi^- - \psi_0 - \frac{\xi}{2}\right) + \frac{a^+}{a_0} \cos\left(\Omega t + \right.$$

$$\left. + \psi_0 - \psi^+ - \frac{\xi}{2}\right) \right] - \psi_0 \},$$

где $a_0(\Delta) = (1 + p^2 - 2p \cos \Delta)^{-1/2}$ - амплитудно-частотная характеристика резонатора, $a^\pm = a_0(\Delta \pm \xi)$;
 $\xi = 2\Omega l / c$; $\psi_0(\Delta) = \arctg \left[\frac{p(\sin \Delta)}{(1 - p \cos \Delta)^{-1/2}} \right]$;
 $\psi^\pm = \psi_0(\Delta \pm \xi)$; $\tilde{\alpha} = \alpha \sqrt{1 + q^2 - 2q \cos(\xi/4)}$;
 $q = \frac{k\beta}{\alpha}$; $\operatorname{tg} \tilde{\psi} = \frac{\sin(\xi/4) \cdot \left[\cos(\xi/4) - q \right]^{-1}}{1}$.

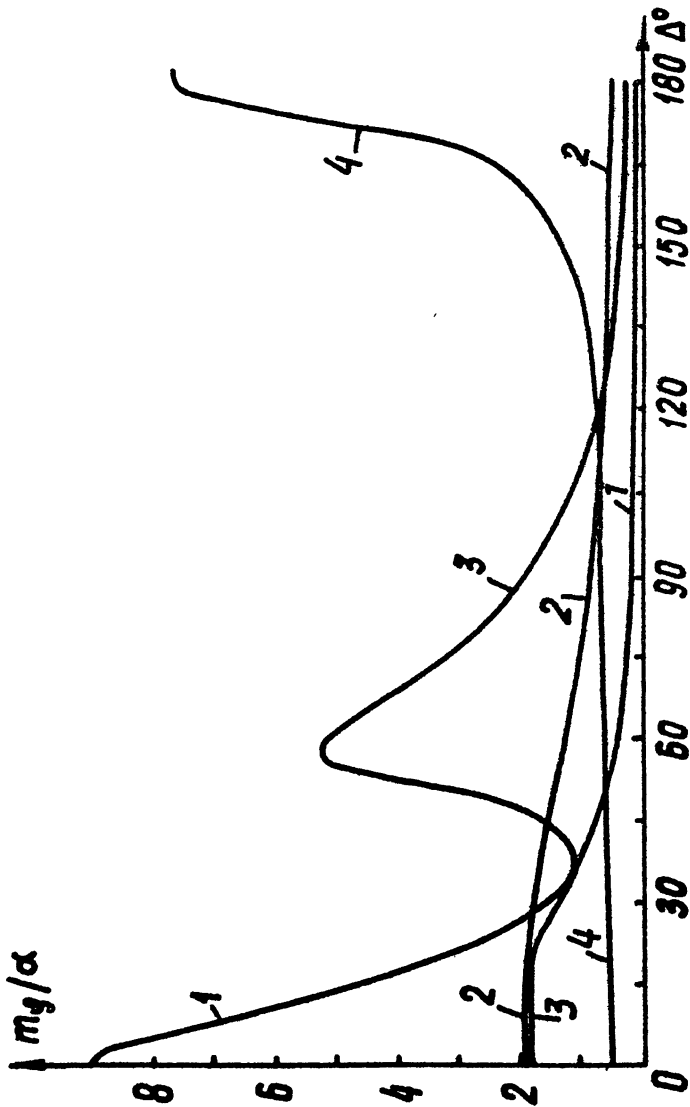
Рассмотрим вначале влияние на модуляцию звука звуком амплитудной характеристики резонатора α_0 . Для этого положим в (4) $\beta = 0$.

Решение (4) совпадает с решением для бегущего режима только в случае $\xi = 2\pi(2n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В остальных случаях наличие резонатора значительно изменяет эффективность нелинейного нерезонансного взаимодействия акустических волн. На фиг. 1 и 2 представлены ряд зависимостей $m_\varphi(\Delta)$ и $m_a(\Delta)$ при различных значениях ρ и ξ (кривая 1 соответствует $\rho = 0,83, \xi = 5^\circ$; 2 - $\rho = 0,4, \xi = 32^\circ$; 3 - $\rho = 0,83, \xi = 60^\circ$; 4 - $\rho = 0,83, \xi = 100^\circ$).

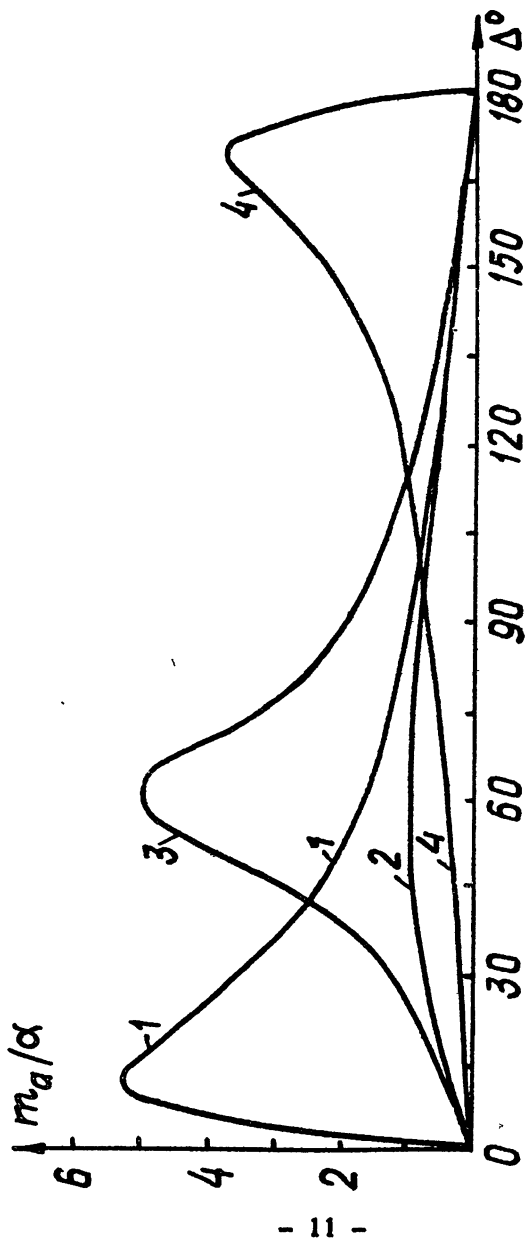
Появление амплитудной модуляции физически обусловлено преобразованием фазового - модулированного сигнала на амплитудно-фазо-частотной характеристике резонатора. Амплитудно-частотная характеристика резонатора $\alpha_0(\Delta)$ симметрична относительно точек $\Delta = \pi \cdot n$, а фазочастотная характеристика $\psi_0(\Delta)$ - антисимметрична. Вследствие этого при $\Delta = \pi \cdot n$ амплитудная модуляция отсутствует ($m_a = 0$). В окрестности $\Delta \approx \pm \xi$ резонатор настроен на одну из комбинационных составляющих $\omega + \Omega$ или $\omega - \Omega$. Это приводит к увеличению одной из боковых составляющих в спектре фазово-модулированного сигнала по сравнению с другой пропорционально величине $(1-\rho)^{-1}$, при неизменной величине несущей. Изменяются также и фазовые соотношения между спектральными компонентами. В результате появляется сильная амплитудная модуляция и увеличивается фазовая.

С точки зрения эксперимента наиболее интересен случай $\Delta = 0$, когда амплитуда несущей α_0 максимальна, глубина амплитудной модуляции $m_a = 0$, а выражение для m_φ имеет вид

$$m_\varphi = \frac{\alpha}{2} \operatorname{Cosec}\left(\frac{\xi}{4}\right) \sqrt{1 + B^2 - 2B \cos\left(\frac{\xi}{4}\right)}, \quad (5)$$



Фиг. 1. Зависимость индекса фазовой модуляции m_g акустической волны от расстройки резонатора Δ .



Фиг. 2. Зависимость глубины амплитудной модуляции m_a акустической волны от расстройки резонатора Δ .

где

$$B = \frac{1 - \rho}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \xi}} ; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\rho \sin \xi}{1 - \rho \cos \xi} .$$

При условии $\xi - 4\pi \cdot n \ll 1 - \rho$ амплитуды боковых составляющих и несущей от каждой из переотраженных волн складываются синфазно и индекс фазовой модуляции принимает максимальное значение

$$m_{\psi} = \alpha \frac{1 + \rho}{1 - \rho} . \quad (8)$$

При увеличении фазового сдвига ξ или добротности резонатора ($\rho \rightarrow 1$) сложение боковых составляющих происходит несинфазно и эффективность нелинейного взаимодействия падает. Но в этом случае (см. фиг. 3) наличие резонатора приводит к существенному изменению эффективности взаимодействия. Даже для режима близкому к бегущему ($\rho \approx 0,1$) отклонение m_{ψ} от α может достигать десятков процентов.

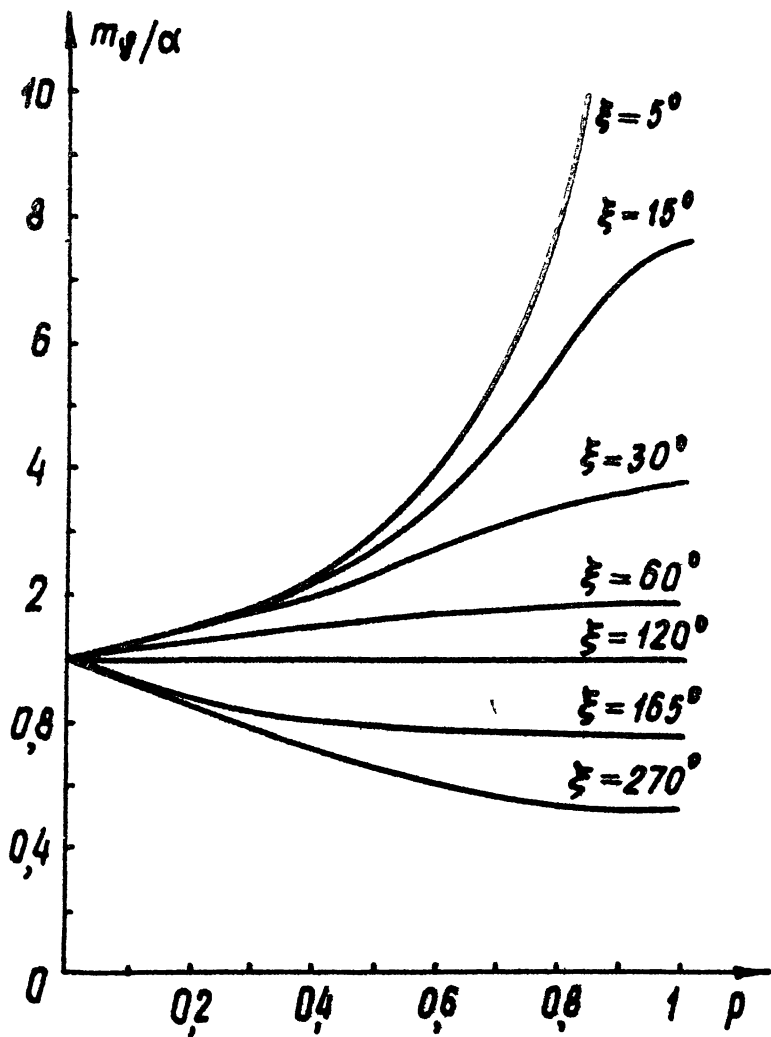
Для оценки вклада доплеровской модуляции рассмотрим вначале бегущий режим ($\rho = 0$). В этом случае из (4) получим

$$u' = \cos \left[\omega t - \alpha \cos \left(\Omega t - \frac{\xi}{4} \right) - 2k\beta \cos \frac{\xi}{4} \cos \left(\Omega t - \frac{\xi}{4} \right) \right] .$$

Учитывая, что выражения для α можно записать в виде [5]

$$\alpha = \frac{1}{2} k e \alpha u^m \beta \Gamma$$

(α и u^m — волновое число и амплитуда модулирующего поля, Γ — параметр квадратичной нелинейнос-



Фиг. 3. Зависимость индекса фазовой модуляции m_g акустической волны от потерь в резонаторе ρ

ти среды, $\rho \approx 1$ - диаграммный множитель), получим выражение для индекса фазовой модуляции на частоте Ω в виде:

$$m_{\varphi} = \frac{1}{2} k l \alpha u^m \rho \Gamma - 2k\beta \cos\left(\frac{\xi}{4}\right).$$

Таким образом доплеровская модуляция эквивалентна изменению параметра нелинейности на величину

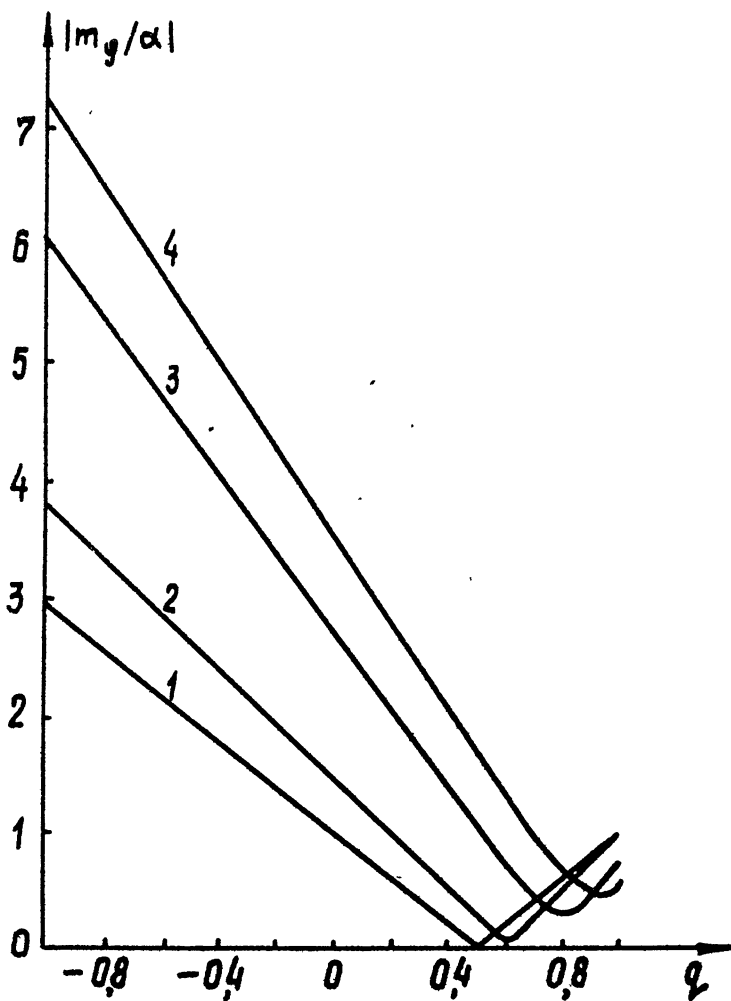
$\Gamma_g = - \frac{4\beta \cos(\xi/4)}{\alpha u^m \rho \Gamma}$. Максимальная амплитуда колебаний стенки резонатора имеет место при продольных однородных деформациях $[\theta]$: $\theta_{\max} = \frac{l}{2} \cdot \alpha u^m$, поэтому Γ может принимать значения в интервале $-2 \leq \Gamma_g \leq 2$. В случае малых значений параметров упругой нелинейности вклад доплеровской модуляции может быть существенным.

Ясно, что эти выводы сохраняются и для режима стоячей волны ($\rho > 0$). Качественный вид зависимостей $m_{\varphi}(\Delta, \rho)$ и $m_a(\Delta, \rho)$ сохраняется. Наличие доплеровской модуляции приводит к изменению эффективности взаимодействия. На фиг. 4 представлены ряд зависимостей $|m_{\varphi}(\Omega)|$ при $\Delta = 0$ и $\xi = 32^\circ$ (кривая 1. соответствует $\rho = 0$; 2 - $\rho = 0,2$; 3 - $\rho = 0,8$; 4 - $\rho = 0,875$). Таким образом, наличие доплеровской модуляции может существенно изменить эффективность нерезонансных взаимодействий акустических волн.

В случае, когда модулирующее поле является плоской бегущей волной, выражение для индексов фазовой модуляции можно записать в виде [3, 5]

$$\varphi^{\pm}(t) = \alpha^{\pm} \cos \Omega t \quad (7)$$

где $\alpha^{\pm} = \alpha_0 \frac{\sin \delta^{\pm}}{\delta^{\pm}}$; $\delta^{\pm} = \frac{l}{2} \left(\frac{\Omega}{c} \mp \alpha \cos \theta \right)$; $\alpha = \frac{\Omega}{c_m}$;
 c_m - скорость распространения модулирующей волны,
 $\theta = (\vec{k} \vec{x}) / kx$, $\alpha_0 < 1$.



Фиг. 4. Зависимость индекса фазовой модуляции m_g акустической волны от величины q .

Подставляя (7) в (2) и проводя суммирование, получим

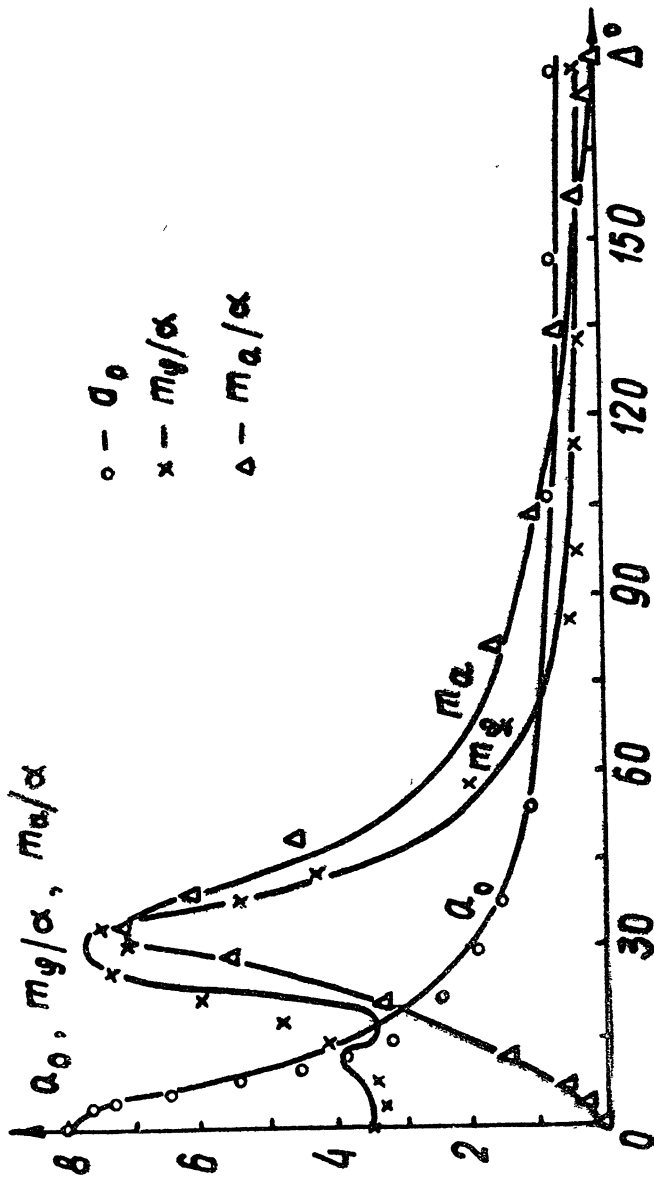
$$\begin{aligned}
 u' = & \left\{ 1 + \frac{1}{4} \operatorname{cosec} \left(\frac{\xi}{2} \right) \left[\frac{\alpha^- a^-}{a_0} \cos \left(\Omega t + \psi^- - \psi_0 - \frac{\xi}{2} \right) + \right. \right. \\
 & + \frac{\alpha^+ a^-}{a_0} \cos \left(\Omega t + \psi^- - \psi_0 \right) - \frac{\alpha^- a^+}{a_0} \cos \left(\Omega t + \psi_0 - \psi^+ - \frac{\xi}{2} \right) - \\
 & \left. \left. - \frac{\alpha^+ a^+}{a_0} \cos \left(\Omega t + \psi_0 - \psi^+ \right) \right] \right\} \cos \left\{ \omega t + \right. \quad (8) \\
 & + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \left(\frac{\xi}{2} \right) \left[\alpha^- \sin \left(\Omega t + \frac{\xi}{2} \right) + \alpha^+ \sin \Omega t - \right. \\
 & - \frac{\alpha^- a^-}{2 a_0} \sin \left(\Omega t - \frac{\xi}{2} + \psi^- - \psi_0 \right) - \frac{\alpha^+ a^-}{2 a_0} \sin \left(\Omega t + \psi^- - \right. \\
 & \left. - \psi_0 \right) - \frac{\alpha^- a^+}{2 a_0} \sin \left(\Omega t + \psi_0 - \psi^+ - \frac{\xi}{2} \right) - \frac{\alpha^+ a^+}{2 a_0} \sin \left(\Omega t + \right. \\
 & \left. \left. + \psi_0 - \psi^+ \right) \right] - \psi_0 \}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, взаимодействие с бегущими волнами качественно аналогично взаимодействию с полем стоячих колебаний. Вследствие влияния диаграммного множителя $(\sin \delta^\pm) / \delta^\pm$ эффективность взаимодействия в $i + 2$ раза меньше, чем в случае взаимодействия с полем стоячих колебаний той же амплитуды. Например, при $\Delta = 0$, $\alpha^- \gg \alpha^+$ и $\xi = 4\pi \cdot n << 1 - \rho$ получим $m_\psi = \alpha^- (1 - \rho)^{-1}$ (см. (8)). Исключение составляет только случай $\alpha^+ \gg \alpha^-$. В этом случае индекс фазо-

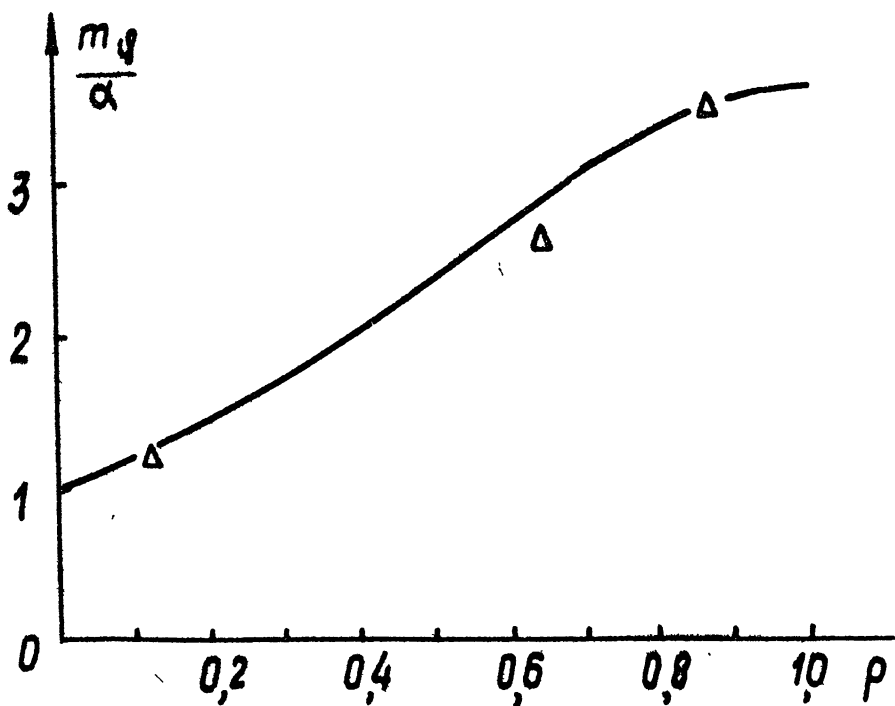
вой модуляции пропорционален величине ρ . Поэтому при больших потерях в резонаторе эффективность взаимодействия резко падает. Физически это обусловлено тем, что первая прошедшая резонатор волна не испытывает фазовой модуляции ($\alpha^- < \alpha^+$), а последующие переотраженные волны сильно ослабляются.

Для экспериментальной проверки результатов было исследовано взаимодействие продольных акустических волн с полем продольных по длине стоячих колебаний стержня со свободными концами из алюминиевого сплава Д16Т. Измерение амплитудной и фазовой модуляции проводилось амплитудным и фазовым детекторами. Точность измерения величин a_0 , m_a и m_g составляла 10%. В стержне размерами 3 см x 5 см x 27 см возбуждались колебания на первой гармонике: $\Omega / 2\pi = 9,1$ кГц, $L = \frac{2\pi}{\Omega} = 54$ см. Продольные акустические волны частоты $\omega / 2\pi = 5 + 5,1$ МГц возбуждались в пучности давления перпендикулярно оси стержня кварцевыми или пьезокерамическими преобразователями, $l = 3$ см. При возбуждении и приеме акустических волн кварцевыми преобразователями (пластина X-среза диаметром 20 мм и толщиной 0,57 мм) потери в резонаторе R составляли величину $R = 1 - \rho = 0,13$. На фиг. 5 приведены экспериментально измеренные для этого случая величины несущей a_0 , глубины амплитудной m_a и индекса фазовой m_g модуляций. Сплошные кривые на фиг. 5 — теоретические построенные по формуле (4) (параметр $\rho = 0,87$ вычислен по зависимости $a_0(\Delta)$; в качестве точек совмещения теоретических кривых и экспериментальных данных взяты значения при $\Delta = 0$ для $a_0(\Delta)$ и $m_g(\Delta)$ и $\Delta = 32^\circ$ для $m_a(\Delta)$. В условиях эксперимента вклад доплеровской модуляции был меньше ошибок измерения ($q = 0,075$)⁺, поэтому при расчетах полагали $q = 0$.

⁺) Значения констант упругости третьего порядка использованного образца приведены в [2].



фиг. 5. Зависимость амплитуды несущей α_0 , глубины амплитудной m_a и индекса фазовой m_{μ} модуляций от расстройки резонатора Δ .



Фиг. 6. Зависимость индекса фазовой модуляции m_g акустической волны от величины потерь в резонаторе ρ .

Некоторые количественные отличия экспериментальных данных и теоретических кривых обусловлено, по-видимому, дифракционными потерями в резонаторе. При теоретических расчетах потери считали неизменными при каждом переотражении акустической волны от стенок резонатора. Известно [10], что дифракционные потери постоянны в зоне геометрической акустики $2n\ell \frac{\ell_D}{kD^2} \approx \ell_D$ (где n — номер переотраженной волны, $\ell_D = \frac{D^2}{4\lambda}$, D — размер излучателя) и уменьшаются при $2n\ell \approx \ell_D$. Для нашего случая дифракционные потери составляли $\approx 50\%$ от общего числа потерь, уменьшение потерь начинало сказываться для волн с номерами $N = \ell_D/2\ell = 9$, амплитуды которых $\rho^n \approx 0,3$. Таким образом в выражении (2) вклад членов с $n > N$ в условиях эксперимента был несколько выше, что и привело к некоторым отличиям между теоретической кривой и экспериментальными данными.

На фиг. 6 приведены результаты экспериментальных исследований зависимости $m_{\varphi}(\rho)$ при $\Delta = 0$ и $\xi = 32^\circ$. Сплошная кривая построена теоретически по формуле (5) (точка совмещения $\rho = 0,87$). Изменение добротности резонатора осуществлялось применением различных типов преобразователей.

На основе полученных теоретических и экспериментальных результатов можно сделать вывод, что резонатор оказывает существенное влияние на процесс модуляции звука звуком. Обработка экспериментальных результатов по формулам (2), (4) позволит при определении нелинейных коэффициентов избежать систематических ошибок, связанных с ограниченной применимостью в эксперименте формул [3-5], полученных для бегущего режима. Выражение (8) позволяет оценить влияние образования стоячих волн на чувствительность параметрических микрофонов [1, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Зверев, А.И.Калачев.
Измерение взаимодействия акустических волн в жидкостях. Акуст. ж., 1958, 4, 4, 321-324.
2. Б.А.Конюхов, И.Д.Конюхова.
Экспериментальные исследования нерезонансных взаимодействий упругих волн в твердых телах.
Журнал Прикл. мех. и техн. физ., 1974, № 5, 154-156.
3. В.А.Зверев, А.И.Калачев.
Модуляция звука звуком при пересечении акустических волн. Акуст. ж., 1970, 18, 2, 245-251.
4. И.Д.Гиц, Б.А.Конюхов
Об оценке констант упругости третьего порядка изотропных твердых тел по модуляции звука звуком.
Акуст. ж., 1973, 19, 2, 150-155.
5. Б.А.Конюхов, Г.М.Шалашов
О нерезонансных параметрических взаимодействиях упругих волн в изотропной твердой среде.
Изв. АН СССР, сер. МТТ, 1976, № 5, 178-183.
6. А.Г.Горелик, В.А.Зверев
К вопросу о взаимодействии звуковых волн.
Акуст. ж., 1955, 1, 4, 339-342.
7. Л.С.Воронина, Л.К. Зарембо
О вынужденных конечных колебаниях слоя с комплексным граничным импедансом.
Акуст. ж., 1976. 21, 3, 378-381.
8. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик.
Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.
М., "Наука", 1971.
9. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория упругости. М., "Наука", 1965.
10. В.И.Файн, Я.И.Ханин. Квантовая радиофизика. М., "Сов. радио", 1965.