

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Преприят № 108

**НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ
РАДИОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ**

**В.И.Пройдаков,
С.П.Чекалев**

г. Горький - 1977 г.

А н н о т а ц и я

В работе методами корреляционного анализа исследована зависимость чувствительности радиометра от времени интегрирования. Методами статистической теории ошибок показано, что существует оптимальное распределение рабочего времени между измерением полезного сигнала и калибровкой коэффициента усиления приемника, позволяющие реализовать минимальную погрешность измерений исследуемого сигнала.

1. Вопрос влияния различных параметров приемника на чувствительность радиометров при измерении слабых шумов сигналов рассматривался в работах [1-7]. В работе 8 обобщено определение и получены выражения для оценки чувствительности различных типов радиометров. Однако, экспериментально, см., например [9], было показано, что отдельные выводы в [8] не подтверждаются на практике. А.Г. Кисляков в [10, 11] ввел выражение для оценки чувствительности, учитывающее вероятностный характер процесса измерений, и получил важные выводы о зависимости величины минимально обнаружимого сигнала от продолжительности времени наблюдений. Полученные выводы подтверждаются экспериментальными данными. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть более подробно вопрос о чувствительности радиометров с позиций теории вероятностей и статистической теории случайных процессов.

В работах [1-7] понятие чувствительности сводится к следующему:

Определение 1. Под чувствительностью радиометра понимается та минимальная разность температур δT , которую данный радиометр способен зарегистрировать.

Минимально обнаружимый сигнал δT определяется из соотношения [7]

$$I_{c \min} / \sqrt{I_x^2} = 1 \quad \text{где} \quad (1.1)$$

$I_{c \min}$ — приращение постоянной составляющей тока за

счет сигнала (ток сигнала); $\sqrt{I_x^2}$ - стандартное отклонение флуктуаций выходного тока (шумы). Из выражения (1.1), для линейного режима усиления радиометра, получается выражение для чувствительности в $^{\circ}\text{К}$

$$[\delta T (^{\circ}\text{К})]^2 = \sigma_x^2 (^{\circ}\text{К}) \quad (1.2)$$

где σ_x^2 - дисперсия флуктуаций случайного процесса $x(t)$ на выходе, пересчитанная ко входу радиометра в $^{\circ}\text{К}$. Для вычисления σ_x^2 аксиоматически вводится формула

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_x(\omega) d\omega, \quad (1.2')$$

где $F_x(\omega)$ - энергетический спектр флуктуаций случайного процесса $x(t)$.

В понятии чувствительности, вводимом через опр. 1, неявно присутствует элемент, определяющий факт регистрации сигнала δT данным прибором. В действительности, процесс измерений шумового сигнала - случайный процесс, и факт регистрации сигнала δT радиометром - случайное событие, имеющее вероятность меньше единицы^{*)}.

В связи с этим необходимо ввести новое определение чувствительности, учитывающее вероятностный характер процесса измерений.

Определение 2. Под чувствительностью радиометра понимается та минимальная разность температур δT , которую данный радиометр способен зарегистрировать с заданной вероятностью. Из теории случайных процессов [12] известно, что

$$\sigma_x^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} B_x(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau), \quad (1.3)$$

*) Например, в случае нормального закона распределения амплитуды шумового сигнала на выходе радиометра, вероятность ρ - регистрации сигнала δT , удовлетворяющего соотношения (1, 2), равна $\rho = 0,34$.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_x(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F_x(\omega) \cdot \cos \omega \tau d\omega \quad (1.3')$$

$B_x(\tau)$, $F_x(\omega)$ — соответственно корреляционная функция и энергетический спектр случайного процесса $x(t)$ ⁺⁺. Для приращения постоянной составляющей Δx , за счет сигнала δT имеем

$$\Delta x = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau, \delta T)} - \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau, \delta T = 0)}, \quad (1.4)$$

где

$$B_x(\tau, \delta T = 0) = B_x(\tau);$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F_x(\omega, \delta T) \cos \omega \tau d\omega} - \sqrt{\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F_x(\omega, \delta T = 0) \cos \omega \tau d\omega}, \quad (1.4')$$

где

$$F_x(\omega, \delta T = 0) = F_x(\omega).$$

Из соотношения $\sigma_x^2 = \lim_{\delta T \rightarrow 0} \Delta x^2$, которое в принятых обозначениях запишется в виде $\Delta x = \sqrt{\sigma_x^2}$, для определения чувствительности δT получим из (1.3) и (1.3'), (1.4) и (1.4') уравнения

+) В (1.3') для первого члена имеем $\frac{1}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\infty} F_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_x(\omega) d\omega$ (1). Выражение (1) справедливо, если $F_x(\omega)$ не имеет особенностей при $\omega \rightarrow \infty$. Однако, т.к. для $F_x(\omega)$ справедливо преобразование Фурье, то выполняется условие Дирихле $\int_{-\infty}^{\infty} |F_x(\omega)| d\omega < +\infty$, из которого следует справедливость (1).

++) Относительно случайного процесса $x(t)$ на выходе радиометра предполагается, что он нормален, стационарен, а функция корреляции его $B_x(\tau)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) d\tau = M$$

$$\sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau, \delta T)} - \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau)} = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow 0} B_x(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau)} \quad (1.5)$$

$$\sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F_x(\omega, \delta T) \cos \omega \tau d\omega} = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega} =$$

$$= \sqrt{\int_0^{\infty} F_x(\omega) d\omega - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega} \quad (1.5')$$

В работах, основанных на понятии чувствительности, вводимом чере опр. 1 расчет строился по схеме: нахождение $F_x(\omega)$ и вычисление σ_x^2 по формуле. Наиболее подробно схема расчета представлена в [6]. В работе [8] рассмотрено прохождение случайного процесса $\xi(t)$ типа белого шума с функцией корреляции $B_{\xi}(\tau) = N_0 \delta(\tau) \{ [N_0] = \sigma K \Gamma \mu^{-1} \}$, где N_0 - спектральная плотность мощности $\xi(t)$ через типовое звено приемника состоящее из:

1. Высокая частота усилителя со случайным коэффициентом усиления

$$K(t) = 1 + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ - стационарная (хотя бы в широком смысле) случайная величина, характеризующая относительные флуктуации коэффициента усиления, функция корреляции которой

$$B_{\alpha}(\tau) = \bar{\alpha}^2 \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_{\alpha}}} = \bar{\alpha}^2 \cdot e^{-\epsilon \tau} = \bar{\alpha}^2 \cdot e^{-\frac{2\Delta\Omega_{\alpha}}{\alpha} \tau}$$

Здесь τ_{α} - время корреляции относительной неустойчивости коэффициента усиления и $\epsilon = 1/\tau_{\alpha}$ - величина, обратная τ_{α} ; $\bar{\alpha}^2$ - среднее значение квадрата относительных флуктуаций коэффициента усиления ($\bar{\alpha} = 0$);

2. Высокая частота фильтра с функцией передачи по амплитуде $-C(j\omega)$ и по мощности $C(j\omega) \cdot C(-j\omega) = C(j\omega) \cdot C^*(j\omega) \approx C^2(\omega)$

$$C(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega/2 \\ 0 & |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2 \end{cases},$$

где $\Delta\omega$ — эффективная полоса частот пропускания высокой частоты и $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ — усилитель узкополосный.

3. Квадратичного детектора $y = x^2$.

4. Низкая частота фильтра в виде интегрирующей RC — цепочки с функцией передачи по мощности $\Phi(\omega)$ и импульсной передаточной функцией $h_{RC}(\tau)$

$$\Phi(\omega) = \frac{\Delta\Phi^2}{\Delta\Omega^2 + \pi^2/4 \omega^2},$$

где $\Delta\Omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{RC} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t_{\text{инт}}}$ — эффективная полоса пропускания низкой частоты фильтра

$\delta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{t}$, а $t_{\text{инт}}$ — время интегрирования. Энергетической характеристикой входного случайного процесса $\xi(t)$ является шумовая температура, равная

$$T_B + T_a = \frac{2N_0 \Delta\omega}{2\pi},$$

где T_B — температура внутренних шумов системы,

T_a — температура шума антенны.

Проведем расчет чувствительности радиометра, основываясь на определении 2. Для функции корреляции $-B_x(\tau)$ — случайного процесса $\xi(t)$ на выходе линейной стационарной (хотя бы в широком смысле) системы со случайными параметрами, состоящей из высокой частоты усилителя и высокой частоты фильтра, и входным сигналом $\xi(t)$ типа белого шума (то есть $B_x(\tau) = N_0 \delta(\tau)$) справедливо выражение [12]:

$$B_z(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_c(\tau, \omega) e^{j\omega\tau} \cdot d\omega, \quad (1.6)$$

где

$$B_c(\tau, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} K(ij, t) \cdot K(-j\omega, t+\tau) dt \quad (1.6^0)$$

— корреляционная функция линейной системы, $K(j\omega, t)$ — передаточная функция линейной системы. Зная $B_z(\tau)$ находим коэффициент корреляции $B_z(\tau)$, и дисперсию σ_z^2 процесса $z(t)$:

$$\sigma_z^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} B_z(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_z(\tau), \quad (1.7)$$

$$R_z(\tau) = \frac{B_z(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_z(\tau)}{\sigma_z^2}. \quad (1.7^0)$$

Определим функцию корреляции $B_{z^2}(\tau)$ — случайного процесса на выходе квадратичного детектора

$$B_{z^2}(\tau) = (\sigma_z^2)^2 [1 + R_z^2(\tau)]. \quad (1.8)$$

Для функции корреляции $B_x(\tau)$ — случайного процесса $x(t)$ на входе линейной системы с постоянными параметрами, если на вход ее поступает случайный процесс с функцией корреляции $B_{z^2}(\tau)$ имеем выражение

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) \cdot B_{z^2}(\tau-v) dv \quad (1.9)$$

$$h(v) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot h(v+u) du, \quad (1.10)$$

где $h_t(u)$ — импульсная передаточная функция выходного низкочастотного фильтра.

Представим передаточную функцию линейной стационарной системы, состоящей из высокочастотного фильтра и высокочастотного усилителя, со случайными параметрами в виде

$$K(j\omega, t) = K(t) \cdot C(j\omega). \quad (1.11)$$

Из (1.6) получим

$$B_c(\tau, \omega) = B_K(\tau) \cdot C^2(\omega) \quad (1.12)$$

где

$$B_K(\tau) = 1 + B_\alpha(\tau).$$

Подставив (1.12) с учетом (1.12') в (1.6), получим

$$B_z(\tau) = [1 + B_\alpha(\tau)] \cdot B_c(\tau), \quad (1.13)$$

где

$$B_c(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C^2(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = (T_B + T_a) \frac{\sin \frac{\tau\Delta\omega}{2}}{\tau\Delta\omega/2} \cos \omega_0\tau. \quad (1.13')$$

$B_c(\tau)$ — функция корреляции сигнала на выходе линейной системы с функцией передачи по мощности $C^2(\omega)$, если на вход поступает белый шум $\xi(t)$

$$[B_\xi(\tau) = N_0 \delta(\tau)].$$

Учитывая выражение для $B_\alpha(\tau)$, получим

$$B_z(\tau) = (T_B + T_a) \left(\sin \frac{\tau\Delta\omega}{2} / \frac{\tau\Delta\omega}{2} \right) \cos \omega_0\tau (1 + \alpha^2 e^{-\sigma\tau}). \quad (1.13'')$$

Для $B_z(\tau)$ и σ_z^2 из (1.7) и (1.7') получим:

$$\sigma_z^2 = (T_B + T_a) (1 + \alpha^2) \quad (1.14)$$

$$R_z(\tau) = \frac{1 + \alpha^2 e^{-\delta\tau}}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\sin \tau \Delta\omega / 2}{\tau \Delta\omega / 2} \cos \omega_0 \tau. \quad (1.14')$$

Для $B_{z^2}(\tau)$ из (1.8) учитывая (1.14) и (1.14') имеем:

$$B_{z^2}(\tau) = \left[(T_B + T_a)(1 + \alpha^2) \right]^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1 + \alpha^2 e^{-\delta\tau}}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\sin \frac{\tau \Delta\omega}{2}}{\tau \Delta\omega / 2} \right)^2 (1 + \cos 2\omega_0 \tau) \right] \quad (1.15)$$

Подставляя $h_{RC}(\tau)$ в (1.9) получим:

$$h_{RC}(v) = \begin{cases} \delta e^{-\delta v} & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Подставим (1.16) в (1.9) и получим

$$B_x(\tau) = \left[(T_B + T_a)(1 + \alpha^2) \right]^2 \cdot \delta \int_0^{\infty} e^{-\delta v} \left\{ 1 + \left[\frac{1 + \alpha^2 e^{-\delta(\tau-v)}}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\sin \frac{(\tau-v)\Delta\omega}{2}}{(\tau-v)\Delta\omega / 2} \right]^2 \cdot [1 + \cos 2\omega_0(\tau-v)] \right\} dv \quad (1.17)$$

Вводя замену $u = \tau - v$ ($v = \tau - u$, $dv = -du$) и полагая $u \Delta\omega / 2 = y$, получим выражение

$$B_x(\tau) = \left[(T_B + T_a)(1 + \alpha^2) \right]^2 \cdot \left[1 - \frac{2\delta}{\Delta\omega} e^{-\delta\tau} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\delta}{\Delta\omega} y} \times \right. \quad (1.18)$$

$$\left. \frac{(1 + \alpha^2 e^{\frac{2\delta}{\Delta\omega} y})^2}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{\sin^2 y}{y^2} (1 + \cos \frac{4\omega_0}{\Delta\omega} y) dy \right]$$

Приращение постоянной составляющей Δx за счет δT из (1.18) и (1.4) будет

$$\Delta x = \delta T (1 + \bar{\alpha}^2) \quad (1.18)$$

Подставляя $\vartheta_x(\tau)$ из формулы (1.18) в (1.5) для $\sqrt{\epsilon_x^2}$ получим выражение

$$\sqrt{\epsilon_x^2} = (T_b + T_a) \cdot \left(\frac{2\delta}{\Delta\omega}\right)^{1/2} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{2\delta}{\Delta\omega} y} \cdot (1 + \bar{\alpha}^2 e^{\frac{2\delta}{\Delta\omega} y})^2 \times \frac{\sin^2 y}{y^2} (1 + \cos \frac{4\omega_0}{\Delta\omega} y) dy \right]^{1/2}. \quad (1.19)$$

Представим выражение (1.19) в виде:

$$\sqrt{\epsilon_x^2} = (T_b + T_a) \left(\frac{2\delta}{\Delta\omega}\right)^{1/2} (Y_1 + Y_2), \quad (1.20)$$

где

$$Y_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{2\delta}{\Delta\omega} y} \left[1 + 2\bar{\alpha}^2 \cdot e^{\frac{2\delta}{\Delta\omega} y} + (\bar{\alpha}^2)^2 \cdot e^{\frac{4\delta}{\Delta\omega} y} \right] \frac{\sin^2 y}{y^2} dy \quad (1.20')$$

$$Y_2 = \int_0^\infty e^{-\frac{2\delta}{\Delta\omega} y} \left[1 + 2\bar{\alpha}^2 e^{\frac{2\delta}{\Delta\omega} y} + (\bar{\alpha}^2)^2 e^{\frac{4\delta}{\Delta\omega} y} \right] \cdot \frac{\sin^2 y}{y^2} \cos \frac{4\omega_0}{\Delta\omega} y dy. \quad (1.20'')$$

Используя формулу 3.948.4 из [19] для Y_1 , получим

$$Y_1 = \left| \begin{aligned} & \arctg \frac{\Delta\omega}{\delta} - \frac{\delta}{2\Delta\omega} \ln \left[1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\delta}\right)^2 \right] + 2\bar{\alpha}^2 \left\{ \arctg \frac{\Delta\omega}{\delta - \epsilon} - \right. \\ & \left. - \frac{\delta - \epsilon}{2\Delta\omega} \ln \left[1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\delta - \epsilon}\right)^2 \right] \right\} + (\bar{\alpha}^2)^2 \left\{ \arctg \frac{\Delta\omega}{\delta - 2\epsilon} - \right. \\ & \left. - \frac{\delta - 2\epsilon}{2\Delta\omega} \ln \left[1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\delta - 2\epsilon}\right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (1.21)$$

если $(\delta - 2\epsilon) \geq 0$,

если $(\delta - 2\epsilon) < 0$.

Используя формулу 3.948.3 из [10] для Y_2 получим

$$Y_2 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\delta}{\Delta\omega} \ln \frac{1 + (2\omega_0/\delta)^2}{\left[1 + \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega + 1}{\delta/\Delta\omega}\right)^2\right]^{1/2} \left[1 + \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega - 1}{\delta/\Delta\omega}\right)^2\right]^{1/2}} + \right. \\ & + 4 \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\omega_0}{\delta} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\omega_0}{\delta - \sigma} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\omega_0}{\delta - 2\sigma} \right) - \\ & - \left(2 \frac{\omega_0}{\Delta\omega} + 1 \right) \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega + 1}{\delta/\Delta\omega} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega + 1}{\delta - \sigma/\Delta\omega} \right) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega + 1}{\delta - 2\sigma/\Delta\omega} \right) \right] - \left(2 \frac{\omega_0}{\Delta\omega} - 1 \right) \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega - 1}{\delta/\Delta\omega} \right) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega - 1}{\delta - \sigma/\Delta\omega} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega_0/\Delta\omega - 1}{\delta - 2\sigma/\Delta\omega} \right) \right] \left. \right\} \quad (1.22) \\ & \infty \quad \text{если } (\delta - 2\sigma) \geq 0, \\ & \quad \quad \text{если } (\delta - 2\sigma) < 0. \end{aligned} \right.$$

Из (1.18') и (1.5) для чувствительности δT получим

$$\delta T = \frac{(T_B + T_a)}{1 + \alpha^2} \cdot \left(\frac{2\delta}{\Delta\omega} \right)^{1/2} \cdot (Y_1 + Y_2)^{1/2} \quad (1.22)$$

Так как рассматриваемый высокочастотный усилитель узкополосный, то есть $\omega_0/\Delta\omega \gg 1$, то из (1.22) следует, что $Y_2 = 0$. В этом случае для чувствительности δT получим выражение

$$\delta T = \frac{T_B + T_a}{1 + \alpha^2} \cdot \left(\frac{2\delta}{\Delta\omega} \right)^{1/2} \cdot Y_1^{1/2} \quad (1.23)$$

Из (1.21) следует, что для того, чтобы чувствительность радиометра была конечной величиной, необходимо выполнение условия $(\delta - 2\sigma) \geq 0$. Учитывая, что $\delta = 1/t_{\text{инт}}$, $\sigma = 1/\tau_\alpha$ и $(\delta - 2\sigma) \geq 0$ получим $t_{\text{инт}} = 1/2 \tau_\alpha$.

Последнее неравенство означает, что у радиометров существует предельно допустимое время интегрирования $t_{\text{инт}}^{\text{max}}$

$$t_{\text{инт}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} \tau_{\alpha}. \quad (1.24)$$

Из (1.24) следует, что у радиометров существует предельная чувствительность δT^{min}

$$\begin{aligned} \delta T^{\text{min}} = & \frac{2(T_B + T_a)}{1 + \alpha^2} \left(\frac{1}{\tau_{\alpha} \Delta \omega} \right)^{1/2} \left\{ \arctg 2 \Delta \omega \tau_{\alpha} - \right. \\ & - \frac{1}{\tau_{\alpha} \Delta \omega} \ln [1 + (2 \tau_{\alpha} \Delta \omega)^2] + 2 \alpha^2 \left[\arctg \Delta \omega \tau_{\alpha} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2 \tau_{\alpha} \Delta \omega} \ln (1 + (\tau_{\alpha} \Delta \omega)^2) + (\alpha^2)^2 \frac{\pi}{2} \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Если справедливо $\Delta \omega \tau_{\alpha} \gg 1$, то из (1.25) получим

$$\delta T^{\text{min}} = (T_B + T_a) \left(\frac{1}{\Delta f \tau_{\alpha}} \right). \quad (1.26)$$

Если $\tau_{\alpha} \rightarrow \infty$, то есть $\Theta \rightarrow 0$, то из (1.23) и (1.21) можно получить

$$\begin{aligned} \delta T = & (T_B + T_a) \left(\frac{2}{\Delta \omega t_{\text{инт}}} \right)^{1/2} \left\{ \arctg \Delta \omega t_{\text{инт}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2 \Delta \omega t_{\text{инт}}} \ln [1 + (\Delta \omega t_{\text{инт}})^2] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Предположив, что $\Delta \omega t_{\text{инт}} \gg 1$ из (1.27) получим

$$\delta T = (T_B + T_a) \cdot \left(\frac{1}{2 \Delta f t_{\text{инт}}} \right)^{1/2}. \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) совпадает с (1.11) и соответствует формуле для чувствительности компенсационного радиометра со стабильным коэффициентом усиления. Если $\tau_{\alpha} \rightarrow \infty$, то $\delta T^{\text{min}} \rightarrow 0$, в этом случае допустимые пределы $t_{\text{инт}}$ неограниченно возрастают и пределы справедливости выраже-

ния (1.28) также неограниченно возрастают. Из рассмотренного предельного перехода видно, что выражения (1.28) и (1.26) логически не исключают друг друга.

Подчеркнем, что алгоритм определения стандартного отклонения в [10 11] следует из понятия чувствительности, вводимого через опр. 2 (см. приложение).

В заключении отметим основные выводы, полученные в данном разделе:

1) У радиометров существует предельно допустимое время интегрирования, удовлетворяющее равенству (1.24), и предельная чувствительность, определяемая выражением (1.25).

2) Предельная относительная точность измерений шумоподобного сигнала T_a

$$\frac{T_a}{\delta T_{\min}}$$

$$\frac{T_a}{\delta T_{\min}} = \frac{\eta \sqrt{\Delta f \tau_{\alpha}}}{1 + \eta}, \quad (1.29)$$

где $\eta = T_a / T_B$, определяется полосой анализа Δf статистическим параметром приемника τ_{α} и отношением сигнал/шум $-\eta$, на выходе радиометра. Для повышения относительной точности радиометрических измерений необходимо в приемнике максимизировать произведение $\Delta f \cdot \tau_{\alpha}$.

П р и л о ж е н и е

Для нормального, стационарного случайного процесса с абсолютно интегрируемой функцией корреляции $B_x(\tau)$, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |B_x(\tau)| d\tau \leq M$, из [12, 20] следует справедливость эргодической гипотезы, то есть

$$\sigma_x^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} B_x(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau) = m_1\{x^2\} - m_1\{x\}^2, \quad (\text{П.1})$$

$m_1\{x\}$ — оператор усреднения по ансамблю значений

В силу эргодичности $x(t)$ получим

$$m_1\{x^2\} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} [x^{(k)}(t)]^2 dt; \quad (\text{П.2})$$

$$m_1\{x\} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} x^{(k)}(t) dt$$

$x(t), x^{(k)}(t) \Delta t$ - интервал измерения $x^{(k)}(t)$ реализации случайного процесса
Подставим (П.2) в (П.1)

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \left\{ [x^{(k)}(t)]^2 - x^{(k)}(t) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} x^{(k)}(t) dt \right\} dt = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} [x^{(k)}(t) - \\ &- \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} x^{(k)}(t) dt]^2 dt. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Из (П.3) и формулы для оценки стандартного отклонения получим алгоритм

$$\sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \left[x^{(k)}(t) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} x^{(k)}(t) dt \right]^2 dt} \quad (\text{П.4})$$

II. Для расчета оптимального распределения рабочего времени между измерением полезного сигнала и калибровкой коэффициента усиления приемника, воспользуемся диаграм-

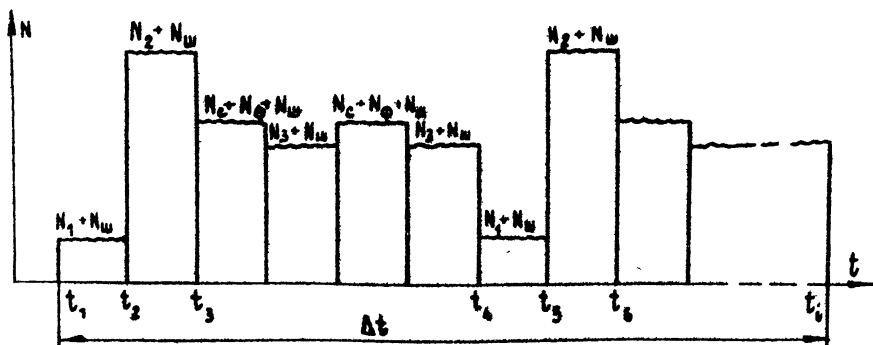


Рис. 1

раммой (см. рис. 1), условно отражающей процесс измерений. На диаграмме представлено распределение во времени спектральной плотности мощности сигнала на входе радиометра. На интервале времени $t'_k = t_2 - t_1$ измеряется сигнал опорного шумового источника со спектральной плотностью мощностью N_1 , а на интервале $t''_k = t_3 - t_2$ со спектральной плотностью мощности N_2 . На интервале $t_k = t_4 - t_3$ измеряется исследуемый сигнал N_c , поступающий вместе с фоновым шумовым сигналом N_ϕ , который компенсируется равным ему шумовым сигналом опорного источника $N_3 = N_\phi$. Кроме того, в любой момент времени на входе приемника присутствует собственный шумовой сигнал радиометра N_ψ . Эта последовательность сигналов периодически повторяется на интервале времени измерения сигнала Δt .

Расчет полной погрешности измерений сигнала в интервале проведем при следующих предположениях:

1. Все сигналы, поступающие на вход приемника представляют собой случайные процессы типа "белого шума";

2. Флуктуации нормированного K_{yc} представляют стационарный, хотя бы в широком смысле, случайный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции $B_f(\tau)$ и коэффициентом корреляции $R_f(\tau)$, равным

$$B_f(\tau) = \sigma^2 e^{-|\tau|/\tau_\alpha}, \quad R_f(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_\alpha}, \quad (2.1)$$

где σ^2 , τ_α — соответственно дисперсия и время корреляции флуктуаций нормированного K_{yc} ;

3. На интервале $t_k = (t'_k + t''_k) K_{yc}$ считаем постоянным;

$$4. M = \frac{\Delta t}{t_k + t_n} \gg 1.$$

Погрешность измерений N_1 и N_2 соответственно на интервалах t'_k и t''_k из [7] и в силу предположения (3), равна

$$\Delta N_1 = \alpha \frac{N_\psi + N_1}{\sqrt{\Delta f \alpha t_k}}; \quad \Delta N_2 = \alpha \frac{N_\psi + N_2}{\sqrt{\Delta f (1-\alpha) t_k}}, \quad (2.2)$$

где

$$t'_k = at_k, \quad t''_k = (1-a)t_k \text{ и } t'_k + t''_k = t_k.$$

Относительная точность измерений $K_{yc} - \delta K = \Delta K / K_{yc}$, где K_{yc} определяется как разность двух средних уровней отсчета, соответствующих N_1 и N_2 , измеренных с погрешностью соответственно ΔN_1 и ΔN_2 , из (2.2) будет

$$\delta K = \frac{\Delta N_1 + \Delta N_2}{N_2 - N_1} = \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta t} t_k} \cdot \frac{1}{N_2 - N_1} \left(\frac{N_w + N_1}{\sqrt{a}} - \frac{N_w + N_2}{\sqrt{1-a}} \right). \quad (2.3)$$

На интервале t_n K_{yc} считаем равным измеренному значению на предыдущем интервале калибровки. В начальный момент на интервале времени t_n погрешность измерения N_c связана с неточностью калибровки K_{yc} , квадрат ошибки которой $(\Delta N_{кал})^2$ из (2.3) равен

$$(\Delta N_{кал})^2 = (\delta K)^2 \cdot (N_c)^2. \quad (2.4)$$

В дальнейшем, кроме $\Delta N_{кал}$, появится ошибка измерений, связанная с нестабильностью K_{yc} , квадрат которой $(\Delta N_{мульт})^2$ равен

$$(\Delta N_{мульт})^2 = \delta^2 [1 - R_\delta (t - t_n^0)] \cdot N_c^2. \quad (2.5)$$

где t_n^0 момент начала измерений, (после предыдущей калибровки), $t = t_n^0 + \tau$ - текущее значение времени измерений, причем

$$t \in [t_n^0, t_n^0 + t_n] \text{ , а } \tau \in [0, t_n].$$

Следовательно, мгновенная ошибка измерений N_c в момент времени t будет обусловлена неточностью калибровки, нестабильностью K_{yc} и аддитивными шумами, присутст-

вующими на входе радиометра, из-за которых появляется ошибка, квадрат которой $(\Delta N_{\text{аудит}})^2$ из [7] равен

$$(\Delta N_{\text{аудит}})^2 = \alpha^2 \frac{(N_{\text{ш}} + N_{\text{э}} + N_{\text{с}})^2}{\Delta f t_{\text{и}}} \quad (2.6)$$

В общем случае, случайные ошибки $\Delta N_{\text{кал}}$, $\Delta N_{\text{мульти}}$, $\Delta N_{\text{аудит}}$ статистически независимыми, то есть суммарную мгновенную ошибку ΔN_{Σ} можно представить в виде [8]

$$(\Delta N_{\Sigma})^2 = (\Delta N_{\text{аудит}})^2 + (\Delta N_{\text{мульти}})^2 + (\Delta N_{\text{кал}})^2 \quad (2.7)$$

Средний квадрат суммарной ошибки измерений на интервале времени $t_{\text{и}}$ определим из выражения:

$$\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{t_{\text{и}}} = \frac{1}{t_{\text{и}}} \int_0^{t_{\text{и}}} (\Delta N_{\Sigma})^2 d\tau \quad (2.8)$$

Подставим выражения (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) с учетом допущения (2.1) и получим

$$\begin{aligned} \langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{t_{\text{и}}} = & \frac{\alpha^2 (N_{\text{ш}} + N_{\text{э}} + N_{\text{с}})^2}{\Delta f \cdot t_{\text{и}}} + \frac{\alpha^2 N_{\text{с}}^2}{\Delta f \cdot t_{\text{к}}} \left[\frac{1}{N_2 - N_1} \left(\frac{N_{\text{ш}} + N_1}{\sqrt{a}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{N_{\text{ш}} + N_2}{\sqrt{1-a}} \right)^2 \right] + \frac{\delta^2 N_0^2}{t_{\text{и}}} \int_0^{t_{\text{и}}} [1 - R_{\theta}(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интервал измерений $t_{\text{и}}$ выбираем из условия

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 N_0^2}{t_{\text{и}}} \int_0^{t_{\text{и}}} [1 - R_{\theta}(\tau)] d\tau = \mu \left\{ \frac{\alpha^2 (N_{\text{ш}} + N_{\text{э}} + N_{\text{с}})^2}{\Delta f t_{\text{и}}} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2 N_{\text{с}}^2}{\Delta f t_{\text{к}}} \left[\frac{1}{N_2 - N_1} \left(\frac{N_{\text{ш}} + 1}{\sqrt{a}} + \frac{N_{\text{ш}} + N_2}{\sqrt{1-a}} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

μ - параметр, характеризующий допустимый вклад, мультипликативной ошибки в суммарную ошибку измерений. Например, если требуемая точность измерений составляет 1%,

то μ должно удовлетворять неравенству $\mu \approx 10^{-2}$.
 В практически важных случаях $\mu \sim 10^{-3} - 10^{-2}$, следовательно,
 но, в (2.9) можно пренебречь 3-им членом и тогда

$$\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{t_n} = \frac{\alpha^2 (N_{\omega} + N_2 + N_c)^2}{\Delta t t_n} + \alpha^2 N_c^2 \left[\frac{1}{N_2 - N_1} \left(\frac{N_{\omega} + N_1}{\sqrt{a}} + \frac{N_{\omega} + N_2}{\sqrt{1-a}} \right) \right]^2 \quad (2.11)$$

На интервале измерений Δt сигнала N_c укладывается $M = \Delta t / (t_n + t_k)$ участков $(t_n + t_k)$. Следовательно, средний квадрат погрешности измерений N_c на интервале времени $\Delta t - \langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{\Delta t}$ будет равен [20]

$$\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{\Delta t} = \frac{M}{M-1} \frac{\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{t_n}}{M} \quad (2.12)$$

Из (2.12), учитывая предположение (4), получим следующее

$$\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{\Delta t} = \frac{\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{t_n}}{M} = \frac{t_n + t_k}{\Delta t} \langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{t_n}$$

и из (2.11)

$$\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{\Delta t} = \frac{t_n + t_k}{\Delta t} \left\{ \frac{\alpha^2 (N_{\omega} + N_2 + N_c)^2}{\Delta t t_n} + \alpha^2 N_c^2 \left[\frac{1}{N_2 - N_1} \left(\frac{N_{\omega} + N_1}{\sqrt{a}} + \frac{N_{\omega} + N_2}{\sqrt{1-a}} \right) \right]^2 \right\} \quad (2.18)$$

Введем параметры $\eta_1 = \frac{N_2}{N_1}$, $\eta_2 = \frac{N_2}{N_{\omega} + N_2}$, $\eta_3 = \frac{N_c}{N_{\omega} + N_2}$, $\xi = \frac{t_k}{t_n}$
 и из (2.18) получим в новых параметрах следующее выражение:

$$\langle (\Delta N_{\Sigma})^2 \rangle_{\Delta t} = \frac{\alpha^2 (N_{\omega} + N_2)^2}{\Delta t \Delta t} (1 + \xi) \left\{ (1 + \eta_3)^2 + \frac{\eta_3^2}{\xi} \left[\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1 + \eta_1 - \eta_3}{\sqrt{a}} + \frac{1 + \eta_2 - \eta_3}{\sqrt{1-a}} \right) \right]^2 \right\} \quad (2.14)$$

Погрешность измерений, как видно из (2.14) при фиксированных η_3, η_1, η_2 зависит от $\eta_c \neq$ сигнал/шум и от параметров α и ξ . Расчет показывает, что $\langle (\Delta N_\Sigma)^2 \rangle_{\Delta t}$ - минимальна при следующих α и ξ

$$\alpha_{\min} = 1 / \left[1 + \left(\frac{1 + \eta_2 - \eta_3}{1 + \eta_1 - \eta_3} \right)^{2/3} \right], \quad (2.15)$$

$$\xi_{\min} = \frac{\eta_c}{1 + \eta_c} \left[\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1 + \eta_1 - \eta_3}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1 + \eta_2 - \eta_3}{\sqrt{1 - \alpha}} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Для $\langle (\Delta N_\Sigma)^2 \rangle_{\Delta t}$ (2.14) получим, после подстановки (2.15), (2.16) в

$$\left\{ \langle (\Delta N_\Sigma)^2 \rangle_{\Delta t} \right\}_{\min} = \frac{\alpha^2 (N_{\text{ш}} + N_3)^2 (1 + \eta_c)^2}{\Delta f \Delta t} \left[1 - \frac{\eta_c}{1 + \eta_c} \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \cdot \left[(1 + \eta_1 - \eta_3)^{4/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{4/3} \right] / \left[(1 + \eta_1 - \eta_3)^{2/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{2/3} \right] \right]^2. \quad (2.17)$$

Из (2.17), с учетом введенных параметров, для функции χ , характеризующей относительную точность измерений сигнала модуляционным радиометром по отношению к радиометру, методика измерений которого соответствует схеме изображенной на рис. 1 (при α_{\min} и ξ_{\min}) и равной

$$\chi = \left\{ \langle (\Delta N_{\text{mod}})^2 \rangle_{\Delta t} \right\}^{1/2} / \left\{ \langle (\Delta N_\Sigma)^2 \rangle_{\Delta t} \right\}_{\min}^{1/2}. \quad (2.18)$$

получим следующее выражение

$$\chi = \frac{\left[1 + \frac{\eta_c^2}{(1 + \eta_c)^2} \cdot \frac{\Delta f \cdot \Delta t \cdot \delta^2}{\alpha^2} \right]^{1/2}}{1 + \frac{\eta_c}{1 + \eta_c} \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \cdot \frac{(1 + \eta_1 - \eta_3)^{4/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{4/3}}{\sqrt{(1 + \eta_1 - \eta_3)^{2/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{2/3}}}} \quad (2.19)$$

Из уравнения (2.10) и допущения (2.1), с учетом введенных параметров для нахождения допустимого интервала измерений t_n получим уравнение

$$\int_0^{t_n} (1 - e^{-\tau/\tau_\alpha}) d\tau = \frac{\mu \alpha^2}{\delta^2 \Delta f} \cdot \frac{(1 + \eta_c)^2}{\eta_c^2} \left[1 + \frac{\eta_c}{1 + \eta_c} \cdot \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \right. \quad (2.20)$$

$$\left. \cdot \left[(1 + \eta_1 - \eta_3)^{4/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{4/3} \right] / \sqrt{(1 + \eta_1 - \eta_3)^{2/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{2/3}} \right]^2$$

Для случая $\eta_c \ll 1$ ($\eta_c \sim 10^{-2}$) и при

$$\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \cdot \frac{(1 + \eta_1 - \eta_3)^{4/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{4/3}}{\sqrt{(1 + \eta_1 - \eta_3)^{2/3} + (1 + \eta_2 - \eta_3)^{2/3}}} \sim 1 \div 10$$

и из (2.20) можно получить следующее уравнение относительно t_n

$$t_n - \tau_\alpha \left(1 - e^{-t_n/\tau_\alpha} \right) = \frac{\mu \alpha^2}{\delta^2 \Delta f} \cdot \frac{1}{\eta_c^2} \quad (2.21)$$

Используя разложение

$$e^{-t_n/\tau_\alpha} = 1 - \frac{t_n}{\tau_\alpha} + \frac{t_n^2}{2\tau_\alpha^2} - \dots \quad \text{из (2.21) получим} \quad (2.22)$$

$$t_n = \sqrt{\frac{2 \alpha^2 \mu}{\delta^2 \eta_c^2 \Delta f \tau_\alpha}} \cdot \tau_\alpha.$$

Оценим величину $\frac{2 \alpha^2 \mu}{\delta^2 \eta_c^2 \Delta f \tau_\alpha}$ для случая, часто встречающегося на практике. Пусть радиометр характеризуется следующими параметрами: $\Delta f = 10^6 - 10^8$ Гц ; $\delta^2 \sim 10^{-2}$ (10% флуктуации нормированного K_{yc}) ; $\tau_\alpha = 10^3$ сек ; $T_{ш}^* = 500^\circ K$; $\alpha^2 \approx 3$. Измеряется сигнал с $\eta_c \approx 10^{-2}$ на фо-

+) Связь шумовой температуры T_c с соответствующей спектральной плотностью мощности N осуществляется выражением $K T = 2 N \Delta f$, где K - постоянная Больцмана.

не внешних шумов с $T_{\Phi} = T_{\text{э}} = 30^{\circ}\text{K}$. Опорные источники имеют температуру $T_1 = 60^{\circ}\text{K}$ и $T_2 = 300^{\circ}\text{K}$. Если измерения производятся в соответствии с временной диаграммой, изображенной на рис. 1, то при $t \leq 2,45 \text{ сек}$ [из выражения (2.22)], $k_{\text{min}} = t_k/t_n = 0,089$ [из (2.16)] и $t'_k/t''_k = a_{\text{min}}/1 - a_{\text{min}} = 0,815$ [из (2.15)], то при выполнении условия $\Delta t/t_n + t_k \gg 1$ из (2.19) получим $\% = \frac{(1+3,33\Delta t)^{1/2}}{1,089}$ то есть выигрыш в точности измерений N_c при $\Delta t = 1$ сек. в 1,9 раза, а при $\Delta t = 16$ сек в 6,7 раза.

Анализ выражения (2.19) показывает, что при $\eta \neq 1\%$ для рассмотренного случая стремиться к пределу

$$\%_{\text{max}} = \frac{1 + \frac{\Delta f \Delta t \delta^2}{\alpha^2}}{1 + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \cdot \frac{(1 + \eta_1 - \eta_2)^{4/3} + (1 + \eta_2 - \eta_1)^{4/3}}{\sqrt{(1 + \eta_1 - \eta_2)^{2/3} + (1 + \eta_2 - \eta_1)^{2/3}}}}, \quad (2.29)$$

который определяет максимально возможный выигрыш в точности измерений при фокусированном интервале времени Δt .

В заключение подчеркнем, что

1) с возрастанием Δt , погрешность измерений N_c непрерывно убывает пропорционально пределу $(\Delta t)^{-1/2}$, в то время как в модуляционном методе — стремится к постоянному пределу $N_c \delta$.

2) получены выражения для t'_k, t''_k, t_n , при которых реализуется минимальная погрешность измерений исследуемого сигнала.

Авторы выражают благодарность В.С.Троицкому, В.Н.Никонову и В.М.Агееву за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dike R.H., Rev.Sci.Instr., I7, 268, 1946.
2. Бунимович В.И., НТФ, 20, 944, 1950.
3. Бунимович В.И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. Сов. радио. 1951 г.
4. Троицкий В.С. ЖТФ, 21, 994, 1951 г.
5. Кисляков А.Г. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1, № 4, 81, 1958 г.
6. Magun A., Künzi K., Z. angew. Math. und Phys., 22, 3, 392, 404, 1971.
7. Есепкина Н.А., Королько Д.В., Парийский Ю.Н. Радиотелескопы и радиометры. М., 1973.
8. Бункин Ф.В., Карлов Н.В. ЖТФ, 25, 430, 733, 1955.
9. Плечков В.М., Разян В.А. Труды 5-го совещания по вопросам космогонии. Изд. АН СССР, 430, 1956 г.
10. Кисляков А.Г. Изв. ВУЗов. Радиофизика, 2, № 2, 187, 1959 г.
11. Кисляков А.Г. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 5, № 5, 6, 945, 1247, 1962 г.
12. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1969.
13. Moshier G., Steinberg G., C.R.Acad.Sci., 230, 438, 1950.
14. Firlе T.E., Winston H., J.Appl.Phys., 26, 716, 1955.

15. Саломонович А.Е., Шмаонов Т.А. Труды 5-го совещания по вопросам космогонии. Изд. АН СССР, 1956.
16. Малахов А.Н. Радиотехника и электроника. 2, 438, 1957.
17. Ярошенко В.В. Изв. ВУЗов. Радиотехника. 7, № 6, 749, 1964.
18. Гудков В.М., Зотов В.В., Нагорных Л.М., Сороченко Р.Л., Штейншлегер В.Б., Радиотехника и электроника, 15, № 3.
19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963 г.
20. Бендат Д.Ж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., 1974 г.