Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 110

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

И.П.Рязанцева

Горький – 1977 г.

А н н о т а ц и я

В работе доказана сильная сходимость операторного метода регуляризации нулевого порядка для уравнений с разрывными монотонными операторами. Полученные утверждения обобщают результаты предыдущей работы автора, где предполагалась хеминепрерывность оператора на множестве решений исходного уравнения. Далее, для указанных выше уравнений в равномерно выпуклых банаховых пространствах установлена сильная сходимость метода невязки к минимальному по норме решению.

Библ. 10 назв.

n° 1. В вещественном банаховом пространстве X будем рассматривать уравнение

$$Ax = f, \tag{1}$$

где $A: X \to X^{*}$ нелинейный, вообще говоря неоднозначный монотонный оператор, определенный на всем X.

Будем обозначать $R(x)$ множество значений оператора A в точке x.

<u>Определение</u> (см. [3]). Решением уравнения (1) называется точка $x_0 \in X$, для которой при любом $x \in X$ выполняется неравенство

$$\langle Ax - f, x - x_0 \rangle \geq 0. \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем мы будем понимать решение именно в этом смысле. Пусть (1) имеет непустое множество решений N. Оно выпукло и замкнуто. Задача (1) является некорректно поставленной, поэтому следует рассматривать вместо (1) уравнение

$$Ax = f_\delta, \quad \| f - f_\delta \| \leq \delta. \tag{3}$$

Требуется построить последовательность $x_\delta \to x \in N$, $\delta \to 0$.

n° 2. В данном пункте для нахождения решения (1) будет применен метод регуляризации (см. [1, 4]) нулевого порядка. Пусть $X = H$ гильбертово пространство, тогда существует единственный элемент x^*, удовлетворяющий условию

$$\|x^*\| = \min_{x \in H} \|x\| .$$

и регуляризованное уравнение имеет следующий вид (см. также [4])

$$Ax + \alpha x = f_\delta \quad (\alpha > 0). \tag{4}$$

Оно разрешимо единственным образом [3, 5, 6]. Обозначим его решение x_α^δ. В [7] была доказана сильная сходимость $x_\alpha^\delta \xrightarrow{\alpha} x^*$, $\alpha \to 0$, $\delta = 0(\alpha)$, при условии хеминепрерывности оператора A на множестве H. Однако в приложениях возникают задачи, в которых указанное предположение не выполняется (см., например, [3]). В данном n° никаких условий гладкости на оператор A налагать не будем.

Теорема 1. При указанных выше условиях последовательность

$$x_\alpha^\delta \xrightarrow[\alpha \to 0]{} x^*, \quad \text{при} \quad \delta = 0(\alpha) .$$

Доказательство. Для всякого $x \in H$ имеем место неравенство([3]):

$$(Ax - f_\delta, x - x_\alpha^\delta) \geq \alpha (x_\alpha^\delta, x_\alpha^\delta - x) \tag{5}$$

или

$$(Ax - f, x - x_\alpha^\delta) + (f - f_\delta, x - x_\alpha^\delta) \geq \alpha (x_\alpha^\delta, x_\alpha^\delta - x). \quad (6)$$

Отметим, что для выполнения (5) достаточно, чтобы A был монотонным и x_α^δ являлось решением (4).

Сделаем следующее построение. Зафиксируем элемент $x \in N$ и рассмотрим $\bar{R}(x) = R(x) \cup f$. Тем самым мы получим новый оператор $\bar{A}$, который является монотонным. Действительно, так как $x \in N$, то

$$(Ay - f, y - x) \geq 0, \quad \forall y \in H.$$

Покажем, что x_α^δ будет решением уравнения

$$\bar{A}x + \alpha x = f_\delta. \quad (7)$$

Пусть (7) имеет решение $\bar{x}_\alpha^\delta \neq x_\alpha^\delta$. Тогда по определению

$$(\bar{A}y + \alpha y - f_\delta, y - \bar{x}_\alpha^\delta) \geq 0, \quad \forall y \in H,$$

и, следовательно,

$$(Ay + \alpha y - f_\delta, y - \bar{x}_\alpha^\delta) \geq 0, \quad \forall y \in H,$$

что противоречит единственности решения (4). Значит в (6) вместо A можно написать $\bar{A}$, а так как $f \in \bar{R}(x)$, то

$$\alpha (x_\alpha^\delta, x_\alpha^\delta - x) \leq (f - f_\delta, x - x_\alpha^\delta)$$

или

$$\|x - x_\alpha^\delta\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + \|x\|.$$

Итак, последовательность $\{x_\alpha^\delta\}$ ограничена.

Дальнейшее доказательство теоремы в основном совпадает с [8], где оно проведено для деминепрерывного оператора A.

Замечание I. Если оператор A максимальный монотонный, то доказательство теоремы упрощается. Действительно, в этом случае из (2) немедленно следует: $f \in R(X_0)$. Этот случай рассмотрен в [9].

Замечание 2. Функция $\sigma(\alpha) = \|x_\alpha^\delta\|$ монотонно не возрастает и непрерывна.

В самом деле, по определению решения x_β^δ

$$(Ax_\alpha^\delta + \beta x_\alpha^\delta - f_\delta, x_\alpha^\delta - x_\beta^\delta) \geq 0$$

или

$$(Ax_\alpha^\delta + \alpha x_\alpha^\delta - f_\delta, x_\alpha^\delta - x_\beta^\delta) +$$

$$+(\beta - \alpha)(x_\alpha^\delta, x_\alpha^\delta - x_\alpha^\delta) \geq 0.$$

Нетрудно проверить (см. (5)), что последнее неравенство имеет место и для оператора $\bar{A}$, полученного из A доопределением его в точке x_α^δ элементом $f_\delta - \alpha x_\alpha^\delta$, т.е.

$$(\beta - \alpha)(x_\alpha^\delta, x_\alpha^\delta - x_\beta^\delta) \geq 0. \tag{8}$$

Пусть $\alpha \geq \beta$, тогда из (8) следует

$$\sigma(\alpha) \leq \sigma(\beta).$$

Далее, доопределив оператор A в точках x_α^δ и x_β^δ элементами $f_\delta - \alpha x_\alpha^\delta$ и $f_\delta - \beta x_\beta^\delta$

соответственно, запишем для нового оператора $\bar{A}$

$$\bar{A} x_\alpha^\delta + \alpha x_\alpha^\delta = f_\delta$$

$$\bar{A} x_\beta^\delta + \beta x_\beta^\delta = f_\delta .$$

Используя (5), легко установить монотонность $\bar{A}$. Теперь доказательство непрерывности $\sigma(\alpha)$ совпадает с приведенным в [8].

Замечание 3. Если $X - E$ – пространство с дифференцируемой нормой, причем $U(x) = grad\|x\|^2/2$ хеминепрерывный оператор и выполняются условия n^0 1, то вместо (4) следует рассмотреть

$$Ax + \alpha U(x) = f_\delta$$

и все вышеприведенные утверждения будут справедливы.

n^0 3. В этом пункте отмечается сильная сходимость метода невязки для уравнений с монотонными операторами.

Обозначим M – выпуклое замкнутое ограниченное множество из X. Пусть X –равномерно – выпуклое банахово пространство, оператор A удовлетворяет условиям n^0 1 и является секвенциально слабо замкнутым (в смысле замкнутости графика) хотя бы на множестве M. При условиях $\langle Ax - f, x \rangle \geq 0$ для $x \in \partial M$ и $0 \in int\, M$ множество $Z = N \cap M$ непусто [6], и элемент z^* минимальный на Z существует и единственный. Предположим, что A непрерывен на z^* и $z^* \neq 0$.

Лемма. Из всякой последовательности $\{x_n\} \in M$ такой, что $Ax_n \to f$ можно выделить последовательность $x_{n_k} \to x \in Z$.

Вначале докажем выполнение условия:

$$\forall x \in M, \ f \in Ax \Longrightarrow x \in Z .$$

Действительно, так как $f \in Ax$, то из свойства монотонности получим

$$\langle Ay - f, y - x\rangle \geq 0 \quad , \forall y \in X .$$

Отсюда, по определению множества решений Z, следует, что $x \in Z$.

Пусть теперь $Ax_n \to f, \{x_n\} \in M$. Из ограниченности M имеем $x_{n_k} \to x_1 \in M$, но тогда

$$(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \to (f, x_1) .$$

Секвенциальная слабая замкнутость графика A дает: $f \in Ax_1$, т.е. $x_1 \in Z$.

Для нахождения решения $x \in Z$ уравнения (1) применим метод, предложенный в [2]. Будем минимизировать функционал $\varphi(x) = \|x\|^2$ при условии $x \in \Omega_\delta$, где

$$\Omega_\delta = \{x \in M ; \exists g \in Ax , \ \|g - f_\delta\| \leq \delta \} .$$

Множество Ω_δ непусто, так как $x^* \in \Omega_\delta$ при любом $\delta > 0$. Обозначим решение указанной задачи x_δ (доказательство разрешимости см. [10]).

Теорема 2. Последовательность $x_\delta \to x^*$ при $\delta \to 0$.

Доказательство проводится с использованием леммы по схеме, приведенной в [10].

Отметим, что в [10] теорема 2 доказана при условии единственности решения уравнения (1).

Замечание 4. Рассмотренная в данном n° задача может быть решена и методом пункта n° 2 (см. [7]).

Замечание 5. Результаты n° 2, 3 применимы при минимизации негладких выпуклых функционалов.

Автор благодарит Я.И.Альбера за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. ДАН СССР. 153, № 1, 49-52, 1963.

2. Иванов В.К. Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 6, № 6, 1089-1094, 1966.

3. Абрамов А.А., Гаипова А.Н. Журнал вычисл. математ. и матем. физ., 12, № 2, 204-207, 1972.

4. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

5. Minty G.J. Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 50, n.6, 1038-1041, 1963.

6. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. "Наука", М., 1972.

7. Рязанцева И.П., Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 16, № 3, 778-781, 1976.

8. Альбер Я.И., Рязанцева И.П. Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 15, № 2, 283-289, 1975.

9. Бакушинский А.Б., Поляк Б.Т. ДАН АН СССР, 219, № 5, 1038-1041, 1974.

10. Шолохович В.Ф. Изв. вузов, математика, № 2, 113-118, 1971.