МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Р С Ф С Р

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НИРФИ)

Препринт № 115

ТЕПЛОВАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ. ЧАСТЬ П. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

С.М.Грач,
А.Н.Караштин,
Н.А. Митяков,
В.О.Рапопорт,
В.Ю.Трахтенгерц

Горький – 1978 г.

В последнее время в связи с экспериментами по воздействию на ионосферу мощным КВ радиоизлучением большое внимание привлекли эффекты теплового мелкомасштабного расслоения замагниченной плазмы в высокочастотном электрическом поле. Механизмом такого расслоения могут служить тепловые эффекты в частности, тепловая параметрическая неустойчивость (ТПН), линейная теория которой была рассмотрена в [1–3], или резонансная неустойчивость [5]. В данной работе предпринята попытка построить нелинейную теорию ТПН. При построении линейной теории тепловой параметрической неустойчивости (ТПН) в [2] амплитуды плазменных волн и низкочастотных возмущений плотности предполагались пренебрежимо малыми. При превышении порога ТПН, определяемого формулой (4.7) в [2], эти возмущения нарастают, и существенный вклад в развитие неустойчивости начинают давать нелинейные члены. Качественно нелинейная стадия ТПН выглядит следующим образом. С ростом амплитуды плазменных волн в первую очередь начинает сказываться нелинейный источник нагрева, обусловленный взаимодействием этих волн между собой. Очевидно, подключение такого источника способствует развитию неустойчивости и росту трасформации энергии из волны накачки в плазменные волны и возмущения плотности. Насыщение неустойчивости связано с эффектами пространственного затухания волны накачки из-за рассеяния на неоднородностях плотности, а также с многократным рассеянием плазменных волн, приводящим к растеканию энергии плазменных колебаний по большому фазовому объему пространственных масштабов+). Эти процессы мы включим в рассмотрение при анализе нелинейной стадии ТПН.

+) Наряду с указанными эффектами на нелинейной стадии имеет место нелинейное взаимодействие низкочастотных возмущений между собой. Этот процесс сравнительно мало эффективен и ниже при построении нелинейной теории учитываться не будет (хотя он может играть существенную роль при формировании спектра неоднородностей в области мелких масштабов).

Ниже взято за основу приближение слабой турбулентности плазмы, когда все возмущения можно представить в виде набора квазисинусоидальных волн, слабо взаимодействующих между собой. При этом исходные уравнения удобно представить в виде пространственно-временного Фурье-разложения по нормальным колебаниям линейной среды и применить метод итерраций (как это обычно делается в приближении слабой турбулентности). Ниже в § 1 сформулированы основные динамические уравнения теории, в § 2 обсуждается приближение случайных фаз и приведены усредненные уравнения для интенсивностей плазменных волн и флуктуаций плотности, в § 3 проанализированы некоторые решения этих уравнений в стационарном случае, в § 4 проведено качественное сопоставление теории с результатами эксперимента. В приложении дан вывод усредненных уравнений § 2, учитывающий специфику рассматриваемой задачи.

§ 1. Динамические уравнения нелинейной стадии ТПН.

За исходное уравнение для описания высокочастотных возмущений, как и в § 3 в [2], возьмем укороченное уравнение для комплексной амплитуды Фурье-компоненты плазменной волны в геометрико-оптическом приближении, дополненное членом, описывающим многократное рассеяние плазменных волн на неоднородностях плотности:

$$
\begin{aligned}
& i\Delta\omega A_{k_\rho\omega} + V_z \frac{\partial A_{k_\rho\omega}}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial V_z}{\partial z} A_{k_\rho\omega} + \tilde{\gamma} A_{k_\rho\omega} = \\
& = i\int \beta_{lt}\, d\Omega\, d\vec{\varkappa}_\rho \Big[n_{\vec{\varkappa}_\rho\Omega}(z) A_t \exp\Big\{-i\int_{z_0}^{z}(k_t - k_z + \varkappa_z)\,dz'\Big\}\delta(\vec{k}_\rho - \vec{\varkappa}_\rho)\cdot \\
& \cdot \delta(\omega - \Omega - \omega_t) + n^*_{\varkappa_\rho\Omega}(z) A_t \exp\Big\{-i\int_{z_0}^{z}(k_t - k_z - \varkappa_z)\,dz'\Big\}\delta(\vec{k}_\rho + \vec{\varkappa}_\rho)\cdot \\
& \cdot \delta(\omega + \Omega - \omega_t)\Big] + i\int \beta_{ll}\, d\Omega\, d\omega'\, d\vec{\varkappa}_\rho\, d\vec{k}'_\rho A_{\vec{k}_\rho\omega'} \Big[n_{\varkappa_\rho\Omega}(z)\cdot \\
& \cdot \exp\Big\{-i\int_{z_0}^{z}(k'_z - k_z + \varkappa_z)\,dz'\Big\}\delta(\omega - \Omega - \omega')\,\delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}'_\rho - \vec{\varkappa}_\rho)\Big],
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

где $\beta_{lt,ll} = \mathrm{Re}\,\dfrac{\omega^2\,\partial\,(a^{t,l}_\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,a^*_\beta)}{\partial N}\left(\dfrac{\partial D}{\partial\omega}\right)^{-1}$, V_z – проекция групповой скорости на направление изменения свойств среды z, остальные обозначения те же, что и в § 2–4 [2].

Как частный случай, полагая $A_{\vec{k}_\rho\omega} = A_t\,\delta(\vec{k}_\rho)\,\delta(\omega - \omega_t)$ и интегрируя (1.1) по ω и $\vec{k}_\rho$, имеем уравнение для амплитуды волны накачки

$$i\Delta\omega A_t + V_z^t \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial V_z^t}{\partial z} A_t + \delta_t A_t =$$

$$= i\int \beta_{\ell t}\, d\Omega\, d\omega'\, d\vec{\varkappa}_\rho\, d\vec{K}'_\rho\, A_{k'_\rho \omega'} \Big[n_{\varkappa_\rho \Omega}(z) \exp\Big\{-i\int_{z_0}^{z} (k'_z - k_t + \varkappa_z)\, dz'\Big\} \cdot \tag{1.2}$$

$$\cdot\, \delta(\omega_t - \Omega - \omega')\, \delta(\vec{K}'_\rho + \vec{\varkappa}_\rho) + n^*_{\varkappa_\rho \Omega} \exp\Big\{-i\int_{z_0}^{z} (k'_z - k_t - \varkappa_z)\, dz'\Big\}\, \delta(\omega_t + \Omega - \omega') \cdot$$

$$\cdot\, \delta(\vec{k}'_\rho - \vec{\varkappa}_\rho) \Big],$$

$$\beta_{\ell t} = \mathrm{Re}\, \frac{\omega^2 \partial (a^\ell_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} a^{*t}_\beta)}{\partial N^0} \left(\frac{\partial D_t}{\partial \omega}\right)^{-1}.$$

В (1.2) мы не учли рассеяние в поперечные волны $\vec{k}'_t$, которое при $V'_t \gg V^{\ell'}_z$ пренебрежимо мало (см. подробнее [4]).

Запишем уравнения, описывающие низкочастотные возмущения. В качестве исходных используем уравнения теплопроводности и диффузии для Фурье-компоненты низкочастотных возмущений по поперечной координате $\vec{\rho}$ (рис. 1) и времени (см. уравнения (2.10), (2.11) в § 2 [2]), дополненные источником нагрева, обусловленным плазменными волнами:

$$\frac{d^2 T_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho}}{dz^2} - \Lambda_T^2 T_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho} = -\frac{Q^T_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho}}{D_T}, \tag{1.3}$$
$$\frac{d^2 \Delta N_{\Omega,\vec{\varkappa}_\rho}}{dz^2} - \Lambda_N^2 \Delta N_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho} = -\frac{Q^N_{\Omega,\vec{\varkappa}_\rho}}{D_N},$$

где использованы те же обозначения, что и в § 2 [2] за тем исключением, что источник нагрева $Q^T_{\Omega\vec{\varkappa}}$ состоит уже из двух членов

$$Q^T_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho} = Q^{Tt}_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho} + Q^{T\ell}_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho}, \tag{1.4}$$

$$Q^{Tt}_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho} = \frac{2}{3N}\int_{z_0}^{z} d\vec{K}_\rho\, d\omega \Big[(\vec{A}_t \hat{\sigma} A^*_{\vec{k}_\rho \omega})\, \delta(\vec{k}_\rho + \vec{\varkappa}_\rho)\, \delta(\omega - \omega_t + \Omega) \times \tag{1.5}$$

$$\times \exp\Big\{ i\int_{z_0}^{z} \Big(k_t - k'_z - \varkappa_z + \frac{\Delta\omega^+}{V_z}\Big) dz' \Big\} + (\vec{A}_{\vec{k}_\rho \omega} \hat{\sigma} \vec{A}^*_t)\, \delta(\vec{k}_\rho - \vec{\varkappa}_\rho) \times$$

$$\times\, \delta(\omega - \omega_t - \Omega) \exp\Big\{ i\int_{z_0}^{z} \Big(k_t - k'_z + \varkappa_z + \frac{\Delta\omega^-}{V_z}\Big) dz' \Big\} \Big],$$

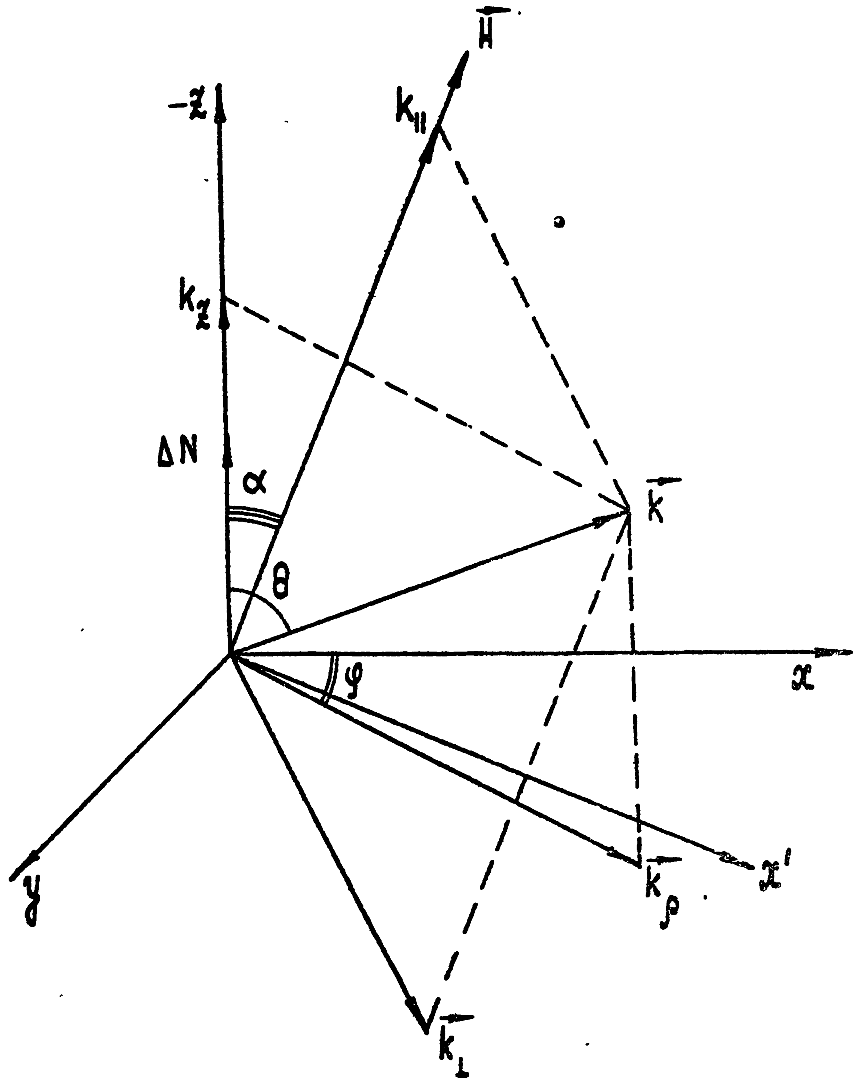

Рис. 1.

Система координат, используемая в тексте; $z = 0$ – соответствует уровню отражения волны накачки.

$$Q^{T\ell}_{\Omega,\vec{\varkappa}_\rho} = \frac{2}{3N}\int d\vec{k}_\rho\, d\omega\, d\vec{k}'_\rho\, d\omega' \left(\vec{A}_{\vec{k}_\rho\omega}\, \hat{\delta}\, \vec{A}^*_{\vec{k}'_\rho\omega'}\right)\times$$

$$\delta\left(\vec{k}_\rho - \vec{k}'_\rho - \vec{\varkappa}_\rho\right)\delta\left(\omega-\omega'-\Omega\right)\exp\left\{-i\int_{z_0}^{z}\Delta K^\ell_z\, dz'\right\}, \qquad (1.6)$$

$$\Delta K^\ell_z = k_z - k'_z - \varkappa_z + \frac{\Delta\omega}{V_z}.$$

В дальнейшем мы будем интересоваться стационарными решениями уравнений (1.1)-(1.3) на стадии насыщения неустойчивости. Учтем также, что, согласно § 4 [2] частотный спектр возбуждаемых неоднородностей очень узкий. Это позволяет $n^\circ_{\Omega\vec{\varkappa}}$ приближенно представить в виде[+]:

$$n_{\Omega\vec{\varkappa}_\rho} = \Delta N_{\vec{\varkappa}_\rho}\,\delta(\Omega).$$

Указанные обстоятельства позволяют упростить соотношения (1.1)-(1.6). В частности, уравнения (1.1)-(1.2) перепишутся следующим образом:

$$(i\Delta\omega_0+\tilde{\gamma})A_{k_\rho} + V^\ell_z\frac{\partial A_{k\rho}}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^\ell_z}{\partial z}A_{k_\rho} = \qquad (1.1\ \text{a})$$

$$= i\sum_{\mp}\int\beta_{\ell t}A_t\, d\vec{\varkappa}_\rho\,\delta(\vec{k}_\rho\mp\vec{\varkappa}_\rho)\Delta N^{\mp}_{\vec{\varkappa}_\rho}\exp\left\{i\int_{z_0}^{z}(k_z-k_t\mp\varkappa_z)\,dz'\right\}+$$

$$+ i\int\beta_{\ell\ell}A_{\vec{k}_{\rho'}}\, d\vec{k}'_\rho\, d\vec{\varkappa}_\rho\,\delta(\vec{k}_\rho-\vec{k}'_\rho-\vec{\varkappa}_\rho)\Delta N_{\vec{\varkappa}_\rho}\exp\left\{i\int_{z_0}^{z}\Delta K^\ell_z\, dz'\right\}$$

$$V^t_z\frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^t}{\partial z}A_t + \gamma_t A_t = i\sum_{\mp}\int\beta_{t\ell}\, d\vec{\varkappa}_\rho\, d\vec{k}'_\rho A_{\vec{k}'_\rho}\Delta N^{\mp}_{\vec{\varkappa}_\rho}\times \qquad (1.2\ \text{a})$$

$$\times\,\delta(\vec{k}'_\rho\pm\vec{\varkappa}_\rho)\exp\left\{i\int_{z_0}^{z}(k_t-k'_z\mp\varkappa_z)\,dz'\right\},$$

где $\Delta\omega = \omega_t - \omega^{(0)}_\ell$, $\omega^{(0)}_\ell$ – решение дисперсионного уравнения для плазменных волн в линейном приближении, $A_{k\rho}=\int A_{k_\rho\omega}\,d\omega$, $\Delta N^-_{\vec{\varkappa}_\rho}=\Delta N_{\vec{\varkappa}_\rho}$, $\Delta N^+_{\vec{\varkappa}_\rho}=\Delta N^*_{\vec{\varkappa}_\rho}$. Для низкочастотных возмущений вместо (1.3) будем иметь одно интегральное уравнение:

$$\Delta N_{\varkappa_\rho}(z) = -\frac{N}{2T D_T\Lambda_T}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\Lambda_T|z-z'|\right\}Q^T_{\vec{\varkappa}_\rho}\, dz' \qquad (1.7)$$

[+] При этом разумеется, теряется информация о структуре частотного спектра неоднородностей, содержащаяся в уравнениях (1.1)-(1.3).

$$Q^{T}_{\vec{\varkappa}_\rho}=\frac{2}{3N}\sum_{\mp}\int d\vec{K}_\rho(\vec{A}_{\vec{k}_\rho}\hat{\sigma}\vec{A}^*_t)\delta(\vec{k}_\rho\mp\vec{\varkappa}_\rho)\exp\left\{\pm i\int_{z_0}^{z}\left(K_t-k_z\pm\varkappa_z-\frac{\Delta\omega_0}{V_z}\right)dz'\right\}+ \tag{1.8}$$

$$+\frac{2}{3N}\int d\vec{K}_\rho\, d\vec{K}'_\rho(\vec{A}_{K_\rho}\hat{\sigma}\vec{A}^*_{K'_\rho})\delta(\vec{K}_\rho-\vec{K}'_\rho-\vec{\varkappa}_\rho)\exp\left\{-i\int_{z_0}^{z}\Delta K^{\ell}_z\,dz'\right\},$$

где $\Lambda^2_T=\Lambda^2_{T0}\left(1+\delta^{-1}\varkappa^2_\rho\rho^2_{He}\right)$, $\Lambda^2_{T0}=\dfrac{\delta\nu}{D_T}$, $\rho_{He}=\dfrac{V_{Te}}{\omega_{He}}$.

§ 2. Приближение случайных фаз.

Уравнения (1.1а)-(1.2а) и (1.7)-(1.8) мало обозримы и практически не решаемы. Дальнейших упрощений можно добиться, предположив случайность фаз взаимодействующих плазменных волн и неоднородностей плотности. Физически это предположение вполне оправдано, особенно в условиях, когда в момент включения волны накачки в плазме уже имелись начальные неоднородности со случайным распределением. Такая ситуация типична для ионосферы. Случайному распределению фаз способствует и то обстоятельство, что плазменные волны обычно нарастают от уровня тепловых флуктуаций. И, наконец, перемешиванию фаз способствует пространственная неоднородность среды.

Приближению случайных фаз (ПСФ) соответствует дельта-коррелированность спектральных компонент $A_{\vec{k}_\rho}$ и $\Delta N_{\vec{\varkappa}_\rho}$ в нулевом приближении:

$$<A^{(0)}_{\vec{k}_\rho}A^{*(0)}_{\vec{k}'_\rho}>=\frac{8\pi W_{\vec{k}_\rho}}{(\partial D/\omega\partial\omega)}\delta(\vec{k}_\rho-\vec{k}_{\rho'}), \tag{2.1}$$

$$<\Delta N_{\vec{\varkappa}_\rho}(z)\Delta N^*_{\vec{\varkappa}'_\rho}(z)>\simeq\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}\delta(\vec{\varkappa}_\rho-\vec{\varkappa}'_\rho),$$

где $W_{\vec{k}_\rho}$ – спектральная плотность энергии плазменных колебаний, $\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}$ – спектр интенсивности флуктуаций электронной плотности, угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Взаимодействие при этом обусловлено слабой корреляцией, возникающей при учете правых частей в уравнениях (1.1а)-(1.2а). Своеобразие рассматриваемого случая связано с регулярной неоднородностью среды и вырождением пространственного спектра низкочастотных возмущений по одному направлению (неоднородности сильно вытянуты вдоль магнитного поля). Указанное вырождение приводит к сохранению корреляции на масштабах $\Delta z<\Lambda^{-1}_T\cos\alpha$ ($\alpha=(\widehat{\vec{z}_0\vec{H}})$), т.е.

$$\langle \Delta N_{\vec{æ}_\rho}(z)\,\Delta N^*_{\vec{æ}_\rho}(z')\rangle_0 = \Delta N_{\vec{æ}_\rho}(\tilde{z})\,\delta(\vec{æ}_\rho - \vec{æ}'_\rho), \qquad (2.2)$$

при $\Delta z = |z - z'| < \Lambda_T^{-1}\cos\alpha$,

где Λ_T^{-1} – характерный масштаб неоднородностей вдоль $\vec{H}$, $\tilde{z}$ – средняя точка из интервала $[z, z']$. Как мы уже видели на примере линейной стадии (§ 2-4 [2]), сильная вытянутость флуктуаций плотности вдоль магнитного поля в неоднородной плазме дает сдвиг фаз на $\pi/2$ при взаимодействии волн с низкочастотными возмущениями и сохраняет корреляцию стоксовой и антистоксовой компонент плазменных колебаний. Это приводит к важным следствиям; в частности, требованию существования точки поворота для плазменных волн. Аналогичные условия имеют место и в ПСФ. Более подробно данный вопрос рассмотрен в приложении.

Вырождение спектра неоднородностей, а также особенности дисперсионного уравнения для плазменных волн (см. ниже) приводят еще к одному существенному отличию от обычного случая слаботурбулентной плазмы в приближении случайных фаз: при рассмотрении перекачки энергии плазменных волн по спектру из-за многократного рассеяния приходится учитывать конечную ширину пространственных резонансов, обусловленную затуханием плазменных волн из-за столкновений. Вывод уравнений для спектральной плотности энергии $W_{\vec{k}_\rho}, W_t$ и интенсивности флуктуаций $\Delta N^2_{\vec{æ}_\rho}$ с учетом указанных особенностей дан в приложении. Приведем эти уравнения в виде, удобном для дальнейших исследований.

Уравнение (1.2) для интенсивности волны накачки удобно записать в виде:

$$S_t(z) = V^t_z W_t = S_0 \exp\{-\Gamma(z)\}, \qquad (2.3)$$

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{4}\int\limits_{\vec{æ}^*_\rho(z)}^{\infty} \frac{d\vec{æ}_\rho}{V_t}\,\frac{\beta^2_{t\ell}}{[\partial\Delta K^t_z/\partial z]^{\mp}_{z^*_t}}\,\frac{\partial K^{\mp}_z}{\partial\omega}\bigg|_{z^*_t}\Delta N^2_{\vec{æ}_\rho}, \qquad (2.4)$$

где $S_t(z)$ – поток энергии в волне накачки на уровне z, S_0 – поток на входе в плазменный слой, $\Delta K^t_z = k_t - k_z \mp æ_z$, $|\partial\Delta K_z/\partial z| \simeq |\partial K_z/\partial z|$, z^*_t – координата точки, в которой $\Delta K^t_z = 0$, нижний предел интегрирования в (2.4) определяется из соотношения; $k_t = k_z(\vec{k}_\rho - \vec{æ}^*_\rho, z)$, где $K_z = K_z(\vec{k}_\rho, z)$ – есть решение дисперсионного уравнения для плазменных волн:

$$D(\vec{K}_\perp, K_\parallel) = 3V_T^2 K^4 - (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_H^2 K_\perp^2/K^2)K^2 - \omega_H^2 \frac{K_\perp^2 K_0^2}{K^2} = 0 , \quad (2.5)$$

где $K_0 = \omega/c$, $K^2 = K_p^2 + K_z^2 = K_\perp^2 + K_\parallel^2$, $K_z = K\cos\theta$,

$\vec{K}_p - \vec{K}_p(K\sin\theta\cos\varphi, K\sin\theta\sin\varphi)$, (K, θ, φ) –

система сферических координат (рис. 1), $tg\,\varphi - K_y/K_z$, $\cos\theta = K_z/K_t$

ось $z \parallel \nabla N$, K_t; $K_\parallel$ – проекция $\vec{K}$ на $\vec{H}$, $K_\perp$ – модуль перпендикулярной к $\vec{H}$ составляющей $\vec{k}$, $k_p = const(z)$ – следствие закона Снеллиуса. Учтем далее следующее соотношение:

$$\frac{\partial K_z}{\partial\omega}\left|\frac{\partial\Delta K_z^t}{\partial z}\right|^{-1} \simeq \frac{\partial K_z}{\partial\omega}\left(\frac{\partial K_z}{\partial z}\right)^{-1} \simeq \frac{\partial D/\partial\omega}{|\partial D/\partial z|} \simeq \frac{2L}{\omega} , \quad (2.6)$$

где $L = (d\ln N/dz)^{-1}$, $\omega \simeq \omega_p$.

Принимая во внимание (2.6), выражение (2.3) можно переписать в виде : $(V_t \simeq const\,(z))$

$$\Gamma(z) = a\int_{\varkappa_p^*}^{\infty} d\vec{\varkappa}_p\, \Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p} , \quad a = \frac{\pi L\omega}{N^2 V_t} . \quad (2.7)$$

Запишем теперь уравнение переноса энергии для плазменных волн. Согласно(5П) его можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}(V_z^e W_{\vec{K}_p}) + \nu_e W_{\vec{K}_p} = \sum_{\mp}\int \frac{W_t(z)\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}\nu_e\,\beta_{et}^2\,\delta(\vec{K}_p \mp \vec{\varkappa}_p)d\vec{\varkappa}_p}{(K_z - K_t \mp \varkappa_z)^2 V_z^2 + \nu_e^2} - \int\beta_{ee}^2\nu_e\, d\vec{\varkappa}_p\, d\vec{K}'_p \times \quad (2.8)$$

$$\times\left[\frac{W_{\vec{K}_p}}{\nu_e^2 + (k_z - k'_z - \varkappa_z)^2 V'^2_z} - \frac{W_{\vec{K}'_p}}{\nu_e^2 + (k_z - k'_z - \varkappa_z)^2 V_z^2}\right]\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}\,\delta(\vec{k}_p - \vec{k}'_p - \vec{\varkappa}_p).$$

Рассмотрим второй член в правой части (2.8), соответствующей многократному рассеянию плазменных волн. Перепишем его следующим образом:

$$J \equiv -\int\beta_{ee}^2\nu_e\, d\vec{\varkappa}_p\, d\vec{K}'_p\left\{\frac{W_{\vec{K}_p}}{\nu_e^2 + \Delta K_z^{e2} V'^2_z} - \frac{W_{\vec{K}'_p}}{\nu_e^2 + \Delta K_z^{e2} V_z^2}\right\}\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}\,\delta(\vec{k}_p - \vec{k}'_p - \vec{\varkappa}_p) = \quad (2.9)$$

$$= -\int\beta_{ee}^2\nu_e\, dk'_\parallel\, d\varphi\left\{\frac{W_{k_\parallel}}{\nu_e^2 + (k_\parallel - k'_\parallel)^2 V'^2_z} - \frac{W'_{k_\parallel}}{\nu_e^2 + (k_\parallel - k'_\parallel)^2 V_z^2}\right\}\Delta N^2_{\varkappa - \vec{K}_\perp - \vec{K}'_\perp} .$$

В пределах $\nu_e \to 0$ получим обычное выражение

$$J_{\nu_e \to 0} \approx \int \beta_{ee} V_z^{-1} d\vec{k}'_{\parallel} d\psi \left(W_{k\parallel} - W_{k'\parallel}\right) \delta\left(k_{\parallel} - k'_{\parallel}\right) \Delta N^2_{\vec{\varkappa} = \vec{k}_{\perp} - \vec{k}'_{\perp}} . \tag{2.9a}$$

Если теперь учесть, что при $k_{\parallel} = k'_{\parallel}$ из (2.8) следует равенство $|\vec{k}_{\perp}| = |\vec{k}'_{\perp}|$, приходим к выводу, что для сильно вытянутых вдоль $\vec{H}$ неоднородностей многократное рассеяние изотропизует плазменные волны по углу ψ (в плоскости $\perp H_0$) без изменения модуля $|\vec{k}|$. Изменение модуля $|\vec{k}|$ при рассеянии возникает, если учесть размытие дельта-функции по $k'_{\parallel}$ (см. (2.9)). В пределах малых ν изменение модуля $|\vec{k}|$ при одном акте рассеяния мало: $\Delta k / k << 1$. Это позволяет перейти в (2.8) от интегральной формы к диффузионному приближению. Полагая плотность энергии плазменных волн слабо зависящей от ψ (что имеет место, например, при малых углах между $\vec{z}_0$ и $\vec{H}$) и используя узость ядра по $|\vec{k}_{\rho}|$ под интегралом (2.9), преобразуем уравнение (2.8) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(V_z W_{\vec{k}_{\rho}}\right) + \nu_e W_{\vec{k}_{\rho}} = \sum_{\mp} \int \frac{W_t(z) \Delta N^2_{\vec{\varkappa}_{\rho}} \nu_e \beta^2_{et} \delta(\vec{k}_{\rho} \mp \vec{\varkappa}_{\rho})}{(k_z - k_t \mp \varkappa_z)^2 V_z^2 + \nu_e^2} d\vec{\varkappa}_{\rho} + \tag{2.10}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial k_{\rho}^2} \left\{ \frac{\pi \nu_e \beta^2_{ee} \Delta N^2}{(V_{\rho}^2 / 4 k_{\rho}^2)^2} \frac{\partial}{\partial k_{\rho}^2} \left(W_{\vec{k}_{\rho}} V_{\rho}^2 / 4 k_{\rho}^2 \right) \right\},$$

где $\Delta N^2 = \int \Delta N^2_{\varkappa_{\rho}} d\vec{\varkappa}_{\rho}$, V_{ρ} – модуль проекции групповой скорости на плоскость $\perp \vec{z}_0$.

Перейдем теперь к описанию низкочастотных возмущений в приближении случайных фаз. Начнем со случая, когда диффузионным членом в уравнении переноса энергии для плазменных волн (2.10) можно пренебречь+). Согласно выражениям (13П)–(14П) уравнение для спектральной интенсивности флуктуаций $\Delta N^2_{\varkappa_{\rho}}$ в этом приближении можно записать в виде:

$$(1-\varepsilon)^2 \Delta N^2_{\vec{\varkappa}_{\rho}} = \frac{2\pi \nu_e^2 \Lambda_T^{-2}}{9 T^2 D_T^2} \cdot \int \frac{\beta^2_{et} \cdot \beta^2_{ee} d\vec{k}_{\rho} d\vec{\varkappa}_{\rho} d\vec{\varkappa}_{\rho 2} W_t(z^*_{t1}) W_t(z^*_{t2})}{V_{z1} V_{z2} \left|\partial \Delta k^t_z / \partial z\right|_{z^*_{t1}} \left|\partial \Delta k^t_z / \partial z\right|_{z^*_{t2}}} \times \tag{2.11}$$

+) Точнее, можно пренебречь вторым членом в правой части динамического уравнения (1.1а) для плазменных волн.

$$\times \frac{\delta(\vec{K}_p-\vec{\varkappa}_{p1})\delta(\vec{K}_p-\vec{\varkappa}_p+\vec{\varkappa}_{p2})}{V_{z1}V_{z2}\left|\partial\Delta K_z^{\ell}/\partial z\right|_{z_\ell^*}}\cdot\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_{p1}}\cdot\Delta N_{\vec{\varkappa}_{p2}}\cdot\Phi\left(\frac{W_t^{\uparrow}}{W_t^{\downarrow}}\right),$$

где $\varepsilon=\frac{4\pi\nu_e\beta_{\ell t}\Lambda_T^{-1}}{3T\mathcal{D}_T}\frac{A_t^{\downarrow}A_t^{\uparrow}\sin\zeta}{V_z\left|\partial\Delta K_z t/\partial z\right|_{z_\ell^*}}$; ζ характеризует относительный набег фаз плазменной и электромагнитной волн между точкой поворота и областью взаимодействия

(подробнее см. § 3 [2]),

$A_t^{\downarrow}$ и $A_t^{\uparrow}$ – амплитуды падающей и отраженной волны поля накачки, $\Lambda_T^2 = \Lambda_{T0}^2\left(1+\rho_{H\ell}^2\varkappa^2\delta^{-1}\right)$, Φ – интерференционный множитель ($\Phi\sim 1$). При выводе (2.11) предполагалось, что затухание плазменной волны на пути между точкой поворота и областью взаимодействия незначительно, а коэффициенты $\left|\partial\Delta K_z^{t,\ell}/\partial z\right|_{z_{t,\ell}^*}$ не малы.

В случаях, когда справедливо уравнение (2.11), плотность энергии плазменных волн равна:

$$V_z W_{\vec{K}_p}(z)=\sum_{\pm}\int_{K^2_{min}}^{\infty}\left(\frac{W_t\,\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}\beta^2_{\ell t}}{V_z\left|\partial\Delta K_z^t/\partial z\right|}\right)_{z=z_t^*}\delta(\vec{K}_p\pm\vec{\varkappa}_p)\,d\vec{\varkappa}_p\exp\left\{-\int_{z_t^*}^{z}\frac{\nu}{V_z}dx\right\}. \qquad (2.12)$$

При малых углах между $\vec{z}$ и $\vec{H}$ спектр $\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}$ можно считать почти изотропным, а величину $V_z\left|\partial\Delta K_z^t/\partial z\right|$ равной $\omega/2L$ (см. (2.8)). При этом

$$W_{\vec{K}_p}=\frac{2\beta^2_{\ell t}L}{\omega V_z}\sum_{\mp}\int d\vec{\varkappa}_p\,\delta(\vec{K}_p\mp\vec{\varkappa}_p)W_t(z_t^*)\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}\exp\left\{-\int_{z_t^*}^{z}\frac{\nu}{V_z}dx\right\}. \qquad (2.12a)$$

Учитывая значение коэффициента $\left|\frac{\partial\Delta K_z^t}{\partial z}\right|V_z$ и проводя интегрирование с помощью δ-функций, запишем уравнение (2.11) в следующем виде:

$$(1-\varepsilon)^2\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}=\int\frac{16\pi L^3\beta^4\nu^2}{9T^2\mathcal{D}_T^2\omega^3V_t}G(K_p,\varkappa_p)d\vec{K}_pW_t(z^*_{t1})W_t(z^*_{t2})\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_p}\Delta N^2_{\vec{K}_p-\vec{\varkappa}_p}, \qquad (2.13)$$

где $G=\frac{V_t}{V_z}\left|\frac{\partial\Delta K_t^t/\partial z}{\partial\Delta K_z^t/\partial z}\right|$ и предположено, что $\int_{z^*_{t_1}}^{z^*_\ell}\frac{\nu}{V_z}dx+\int_{z^*_{t_2}}^{z^*_\ell}\frac{\nu}{V_z}dx<1$. Как уже отмечалось, координаты точек взаимодействия $z^*_{t,\ell}$ определяются следующим соотношениями:

$$k_t = k_z(k_\rho, z_t^*) \mp \varkappa_z\,, \qquad k_z(z_\ell^*, k_\rho) = k_z'(k_\rho', z_\ell^*) \pm \varkappa_z \tag{2.14}$$
$$\vec{k}_\rho = \pm \vec{\varkappa}_\rho \qquad\qquad \vec{k}_\rho = \vec{k}_\rho' \pm \vec{\varkappa}_\rho\,.$$

Уравнения (2.3), (2.10) и (2.13) представляет собой замкнутую систему для отыскания стационарных значений $W_t(z)$ и $\Delta N^2_{\varkappa_\rho}$.

§ 3. Анализ нелинейной стадии ТПН.

Исследуем решения системы уравнений (2.3), (2.10) и (2.13) при заданной на входе в слой плазмы амплитуде волны накачки A_{t0}. Подставляя (2.3) и (2.10) в (2.13), будем иметь:

$$\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}(1-\varepsilon)^2 = a\varepsilon_0^2 \int d\vec{k}_\rho\, \Lambda^2(\varkappa_\rho) G(\varkappa_\rho) \times \tag{3.1}$$
$$\times \Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho} \Delta N^2_{\vec{k}_\rho - \vec{\varkappa}_\rho} \exp\{-\Gamma(\vec{k}_\rho) - \Gamma(\vec{k}_\rho - \varkappa_\rho)\}\,,$$

где

$$\Lambda(\varkappa_\rho) = (1 + \rho_{He}^2 \varkappa^2 \delta^{-1})^{-1/2}\,, \quad \varepsilon_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{W_{t0}(\vec{\alpha}_t \vec{\alpha}_\ell^*)^2}{NT_e} \Lambda_{T0} L\delta^{-1}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Lambda \sin\zeta \cdot \exp\{-\Gamma_m\}\,, \quad a = \frac{\pi L\omega}{V_t N^2}\,, \quad W_{t0} = \frac{(E_0^t)^2}{8\pi}\,.$$

Найти строгое решение (3.1) довольно сложно. Мы ограничимся качественным анализом этого уравнения. Предположим сначала, что спектр $\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}$ существенно уже функций G и Λ причем максимум приходится на относительно малые значения $\vec{\varkappa}_\rho$ *). В этом случае (3.1) можно преобразовать к виду:

$$\Gamma_m(1-\varepsilon)^2 = \bar{G}\varepsilon_0^2 (1 - \exp\{-\Gamma_m\})^2\,, \tag{3.2}$$

где $\bar{G}$ – некоторое среднее значение G. В (3.2) учтено, что $\Lambda(\varkappa_\rho \to 0) = 1$, $\Gamma_m = a\int d\vec{\varkappa}_\rho \Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}$ полное ослабление волны накачки на пути от начала слоя плазмы до точки отражения. Аналогичная структура уравнения (3.1), но с несколько другими коэффициентами, получается и в том случае, если форма спектра $\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}$ слабо зависит от интенсивности волны накачки W_{t0}.

*) Такой вид спектра следует из анализа линейной теории ТПН (см. рис. 4б [2]).

С другой стороны, из (3.1) можно видеть, что ширина спектра $\Delta N^2_{\ae_p}$ не превышает заметно ширины подынтегральной функции $G\Lambda^2$, т.е. удовлетворяет требованию, при котором справедливо уравнение (3.2). В силу указанных соображений есть основания считать, что уравнение (3.2) качественно правильно описывает зависимость аномального ослабления волны накачки Γ_m от ее интенсивности W_{t_0}. График этой зависимости дан на рис. 2. Пунктиром проведен участок кривой, соответствующий неустойчивым состояниям равновесия.

В соответствии с рис. 2 развитие ТПН происходит следующим образом. При малых начальных возмущениях плотности ($\Delta N_0^2 \to 0$) неустойчивость возбуждается при превышении порога $\mathcal{E}_n > 1$ по амплитуде волны накачки. Стационарный уровень флуктуаций плотности на линейной стадии высок и соответствует участку кривой bc. При наличии начальной неоднородной структуры ионосферы конечной амплитуды ΔN_0^2 возможен режим ТПН с жестким возбуждением, отвечающий участку ab. По-видимому, этот режим соответствует резонансной неустойчивости, исследованной в линейном приближении в [5]. Наличие такого режима приводит к появлению гистерезиса в зависимости интенсивности флуктуаций плотности от падающей мощности электромагнитного излучения. Срыв неустойчивости происходит при значительно меньших $W_{t_0} = W_{cp}$, чем ее включение. В рассматриваемых условиях, когда $\bar{G} >> 1$,

$$W_{cp} \simeq \sqrt{2}\; G^{-1/2}\, W_n << W_n . \qquad (3.3)$$

Интенсивность флуктуаций ΔN_1^2, соответствующая точке срыва неустойчивости ($W_{t_0} = W_{cp}$), при этом равна:

$$\Gamma_{m1} \sim 1 , \quad \Delta N_1^2 = a^{-1} . \qquad (3.4)$$

Выше мы не учитывали нелинейную перекачку плазменных волн по спектру. Такая перекачка может существенно сказаться на поведении кривой стационарный состояний (рис. 2) в области больших значений Γ_m. Соответствующее значение Γ_{m2}, при котором нужно учитывать перекачку плазменных волн по спектру из-за многократного рассеяния, можно найти из сравнения диффузионной ширины спектра $W_{\vec{k}_p}$, соответствующей уравнению (6.9) с шириной функции Λ^2, характеризующей спектр неоднородностей $\Delta N^2_{\ae_p}$. Получим следующее соотношение для оценки Γ_{m2}:

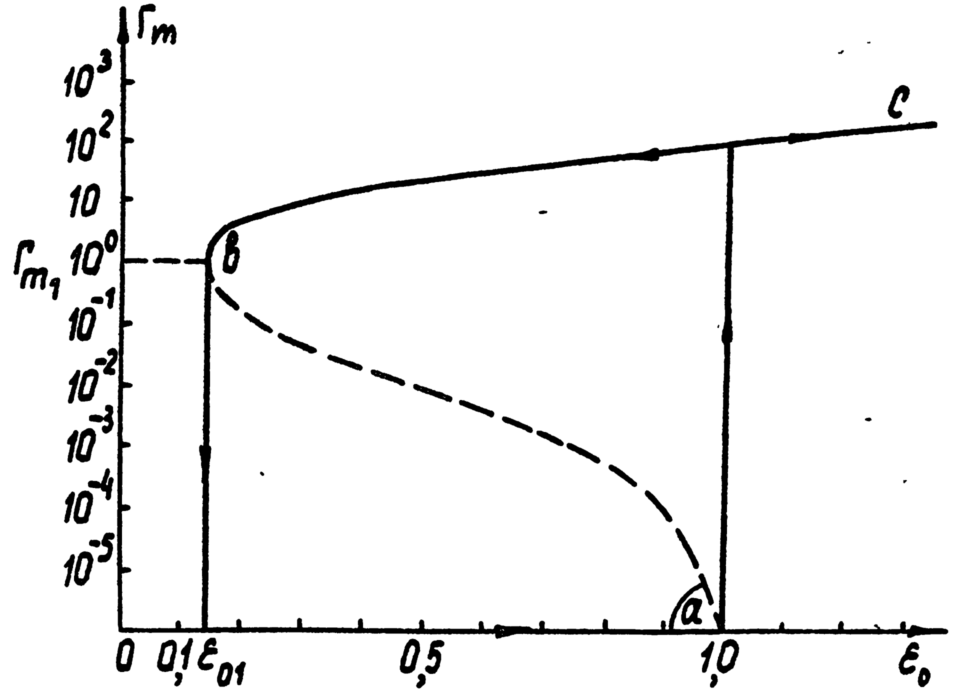

Рис. 2.

Зависимость интенсивности флуктуаций $\int \Delta N^2_{\varkappa_p} d\varkappa_p$ и аномального ослабления Γ_m от мощности волны накачки $\mathcal{E}_0$.

$$\Gamma_{m2} \sim \frac{2L\omega_H^2}{V_t\omega}\left(\frac{V_s^2}{V_{Te}^2}\right)_{k_\rho=\delta^{1/2}\rho_{He}^{-1}} \simeq \frac{2L\omega_H^2}{V_t\omega}\left(k_z/K\right)^4. \tag{3.5}$$

Полагая, например, $L \sim 10^7$ см, $\omega \sim 3\cdot 10^7$ сек$^{-7}$, $(\omega_H^2/\omega^2) \sim 1/16$ и $(K_z/K) \sim 0{,}3$, имеем $\Gamma_{m2} \sim 2$. Таким образом, многократное рассеяние плазменных волн необходимо учитывать практически во все* области существования стационарных состояний, отвечающей участку θc на рис. 2. В случае $\Gamma_m >> \Gamma_{m2}$ спектр плазменных волн становится существенно шире спектра $\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}$. На рис. 3 изображены сечения поверхностей волновых нормалей, по которым растекается энергия плазменных волн в процессе многократного рассеяния. Кривые (а–в) соответствуют трем разным уровням по оси z, причем $z_a > z_\delta > z_б$ (отсчет ведется вниз от точки отражения волны накачки, принятой за начало координат).

Запишем уравнение, характеризующее стационарный спектр флуктуаций плотности на стадии насыщения, когда основной вклад в нагрев дает нелинейный источник, связанный с взаимодействием плазменных волн. Согласно (13П) оно имеет вид:

$$\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho} = \Lambda^2 \int d\vec{k}_\rho\, d\vec{k}_{\rho'}\, W_{\vec{k}_\rho}(z_e^*)\, W_{\vec{k}_{\rho'}}(z_e^*)\left(\left|\frac{\partial \Delta K_z^e}{\partial z}\right|_{z_e^*} + \frac{\nu^2}{V_z^2}\right)^{-1} \delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}_{\rho_1} - \vec{\varkappa}_\rho), \tag{3.6}$$

где $W_{\vec{k}_\rho}$ определяется уравнением (2.10) с учетом нелинейной перекачки плазменных волн по спектру, а для Λ обозначение то же, что и в (3.1).

В случае, когда основная доля энергии плазменных волн сосредоточена в малых масштабах ($k_\rho >> \varkappa_{\perp 0} \sim \delta^{1/2}\cdot \rho_{He}^{-1}$), член в правой части (3.6) можно представить в виде:

$$\int d\vec{k}_\rho\, d\vec{k}_{\rho'}\, W_{\vec{k}_\rho} W_{k'_\rho}\left(\left|\frac{\partial \Delta K_z^e}{\partial z}\right|_{z_e^*} + \frac{\nu^2}{V_z^2}\right)^{-1} \delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}_{\rho'} - \vec{\varkappa}_\rho) \approx$$
$$\approx (\nu^2 + b\varkappa_\rho)^{-1} \int d\vec{k}_\rho\, V_z^2\, W^2_{\vec{k}_\rho}(z_e^*), \tag{3.7}$$

где

$$b = (3V_{Te}^2/2L)\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad \alpha = (\hat{\vec{z}\,\vec{H}}).$$

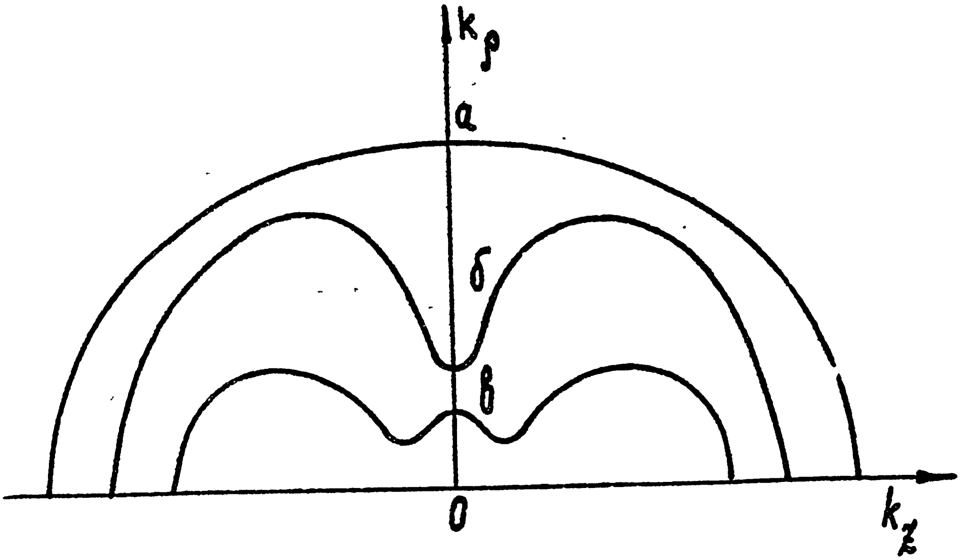

Рис. 3.

Форма поверхностей волновых нормалей плазменной волны в зависимости от расстояния до точки отражения волны накачки.

При получении (3.7) мы учли следующее соотношение $V_z V_{z1} \left|\frac{\partial \Delta K_z^e}{\partial z}\right| \approx \frac{3V_{Te}^2 |\varkappa_z|}{2L}$, которое справедливо для достаточно больших $K_\rho \gg \varkappa_\rho$.

Из уравнения (3.6) с учетом структуры источника (3.7) следует важный качественный вывод: вид пространственного спектра неоднородностей $\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho}$ на стадии насыщения слабо зависит от амплитуды волны накачки и определяется следующей функцией:

$$\Delta N^2_{\vec{\varkappa}_\rho} = B\left(1+\nu^{-2}\delta\varkappa_\rho\right)^{-1}\cdot\left(1+\delta^{-1}\rho_e^2\varkappa^2\right)^{-1}, \qquad (3.8)$$

где B – нормировочная константа (зависящая от мощности накачки W_{t0}). Из (3.6) и (2.10) вытекает еще важное следствие: диффузия плазменных волн в фазовом пространстве приводит к более медленному росту интенсивности флуктуаций при увеличении W_{t0}. Действительно, в отсутствие диффузии Γ_m растет с увеличением мощности накачки как W_{t0}^2 (см. 3.2)). Диффузия в нашем случае не меняет полной энергии плазменных волн $\int W_{K\rho}\, d\vec{K}_\rho \approx const$, а интервал ΔK_ρ, занятый плазменными волнами, растет с ростом W_{t0}. В итоге имеем

$$\Gamma_m \sim W_{t0}^2 / \Delta K_\rho (W_{t0}) \sim W_{t0}^p, \quad p<2.$$

Отыскание значения p требует совместного решения уравнений (2.10) и (3.6) и выходит за рамки данной работы.

§ 4. Заключение

Проведенное выше теоретическое рассмотрение относилось к некоторой идеализированной модели, которая по ряду параметров может существенно отличаться от реальной ионосферы. В частности, не были учтены крупномасштабные неоднородности, которые также возбуждаются при воздействии электромагнитного излучения [6] и всегда присутствуют при мелкомасштабном тепловом расслоении ионосферы. Поскольку регулярные изменения среды играют для ТПН важную роль, крупномасштабные неоднородности могут существенно повлиять на количественные результаты. Кроме того, как показано в [7], они могут служить посредством механизма дрейфовой неустойчивости источником начальных мелкомасштабных возмущений.

Основой развитой в §§ 1–3 данной работы нелинейной теории является приближение случайных фаз, которое, вообще говоря, требует своего обоснования и проверки. Здесь, особенно при высоком уровне турбулентности, вполне возможны связанные с тепловой нелинейностью динамические режимы типа ленгмюровского коллапса (см., например, [8]). Все эти вопросы требуют специального анализа. В то же время ряд качественных выводов, по-видимому, не изменится и при учете указанных выше факторов. Отметим основные из них.

В ионосферной плазмы под воздействием мощного электромагнитного излучения возбуждается тепловая параметрическая неустойчивость, связанная с нагревом плазмы электромагнитной волной и рассеянными плазменными волнами. В результате образуются вытянутые вдоль магнитного поля неоднородности концентрации плазмы с широким спектром поперечных масштабов (см. (4.9) § [2]).

Пороги и инкременты неустойчивости зависят от поперечного масштаба неоднородностей и при $\varkappa^2\rho_e^2 > \delta$ пороги растут с ростом $\varkappa$ (см. (4.7) § [2]). Зависимость инкремента неустойчивости от $\varkappa$ видна из рис. 4§[2].

Существенную роль в развитии тепловой параметрической неустойчивости играет начальное состояние плазмы. Если в момент включения волны накачки в ионосфере уже имелось мелкомасштабные неоднородности плотности, неустойчивость возбуждается при меньшей мощности падающей волны. Понижаются пороги и при уменьшении регулярных градиентов плотности плазмы.

Указанная зависимость ТПН от присутствия в ионосфере мелкомасштабных неоднородностей приводит к появлению своеобразного гистерезиса: срыв неустойчивости происходит при существенно меньших амплитудах волны накачки, чем включение ТПН. Вследствие жесткого режима возбуждения интенсивность флуктуаций плотности велика даже вблизи порога, что приводит к значительному аномальному ослаблению волны накачки.

Неоднородности концентрации сильно вытянуты вдоль магнитного поля, причем с увеличением $\varkappa$ продольный масштаб уменьшается из-за влияния поперечной диффузии. Пространственный спектр плазменных волн существенно шире спектра неоднородностей и может простираться до очень малых масштабов ($\lambda \sim r_d$).

Указанные выше результаты объясняют многие особенности наблюдаемого мелкомасштабного теплового расслоения ионосферной плазмы [9 – 11].

Оценим, в частности, пороговые мощности для ионосферной плазмы. Минимальные пороги в отсутствие начальных возмущений имеют место для $\varkappa^2\rho_e^2 \ll \delta$. В условиях, типичных для F -области ионосферы (высоты $h \sim 250$ км) $\delta \simeq 10^{-4}$, $\rho_e \simeq 2$ см, Поэтому неравенство $\varkappa^2\rho_e^2 < \delta$ выполняется для поперечных масштабов неоднородностей

$$\lambda_\perp \sim \frac{2\pi}{\varkappa} > \frac{2\pi \rho_e}{\sqrt{\delta}} = 12\,\text{м}. \qquad (4.1)$$

Мощность наземного передатчика связана с плотностью энергии электромагнитной волны соотношением

$$S = \frac{V_t E_t^2}{8\pi} = \frac{PG}{8\pi h^2},$$

где P – мощность передатчика, G – коэффициент усиления антенны, V_t – групповая скорость волны накачки. Отсюда можно получить выражение для пороговой мощности передатчика:

$$(PG)_{пор} = 4\pi V_t h^2 N T \varepsilon_n^T, \qquad (4.2)$$

где ε_n^T определяется выражением (4.7) в [2]. Групповая скорость обыкновенной волны в области взаимодействия при $\omega \sim \omega_{pe}$ $V_t = c\,\frac{\omega_{He}}{\omega}$. Для частоты передатчика $\omega/2\pi \simeq 6$ МГц и значений $h \simeq 250$ км $\lambda_{T0}^{-1} = \frac{\rho_e}{\sqrt{\delta}} = 30$ км, $L \simeq 200$ км

$$(PG)_{пор} \simeq 5\,\text{мгВт}. \qquad (4.3)$$

Порог ТПН при $\varkappa^2 \rho_e^2/\delta = 8$ $(\lambda_\perp \simeq 4{,}5\,\text{м})$ в три раза превышает (4.3). При $PG \simeq 25$ мгВт (кривая 3 на рис. 4б [2]), что соответствует реальным значениям мощностей передатчиков в экспериментах [9–11], возбуждаются неоднородности с $\lambda_\perp$ (см. (4.9) [2]).

$$3{,}5\,\text{м} < \lambda_\perp < 60\,\text{м}. \qquad (4.4)$$

Максимальный инкремент неустойчивости при этом (см. (4.8) в [1])

$$\gamma_{max} \simeq 5\delta\nu_e \quad \text{при} \quad \lambda_\perp \simeq 5 \div 6\,\text{м} \qquad (4.5)$$

При $\nu_e \simeq 5\cdot 10^2$ сек$^{-1}$ характерное время развития неустойчивости составляет $\tau \sim \gamma_{max}^{-1} \simeq 4$ сек.

Приведенные оценки пороговых мощностей (4.3) ширина спектра неоднородностей (4.4) и времени развития неустойчивости (4.5) находятся в хорошем согласии с экспериментом [9–11].

В соответствии с экспериментом находятся также доплеровские сдвиги частот рассеянных сигналов. Качественно можно понять процесс развития неустойчивости на малых мощностях накачки. В этом случае эксперименты [11] свидетельствуют об очень нерегулярном возникновении неустойчивости с длительной подготовительной фазой. Такое поведение можно объяснить "ожиданием" достаточно больших начальных мелкомасштабных возмущений плотности.

В неплохом согласии с экспериментом находятся величина аномального ослабления накачки, интенсивность и характерная ширина пространственного спектра неоднородностей, а также протяженность спектра плазменных волн в сторону существенно более мелких масштабов, чем спектра неоднородностей,

В последнем эксперименте [12] четко выявлен гистерезисный характер возбуждения мелкомасштабных неоднородностей.

В то же время ряд важных количественных параметров, таких как детальная структура спектра неоднородностей, зависимость уровня флуктуаций ΔN^2 от мощности волны накачки, время жизни неоднородностей и другое еще предстоит объяснить.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М.Грач, В.Ю.Трахтенгерц. Изв.ВУЗов, Радиофизика, 18, 1288, 1975 г.
2. С.М.Грач, А.Н.Караштин, Н.А.Митяков, В.О.Рапопорт, В.Ю. Трахтенгерц Тепловая параметрическая неустойчивость в неоднородной плазме. Часть 1. Линейная теория. Препринт НИРФИ, № 114, 1978 г.
3. С.М.Грач, А.Н.Караштин, Н.А.Митяков, В.О. Рапопорт, В.Ю. Трахтенгерц а) Изв. ВУЗов, Радиофизика, 20, № 12, 1977. б) Физика плазмы, в печати.
4. Н.А.Митяков, В.О. Рапопорт, В.Ю.Трахтенгерц. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 18, 1273, 1975.
5. В.В.Васьков, А.В.Гуревич а) Препринт ФИАН им. П.Н.Лебедева, № 95, М., 1975. б) ЖЭТФ, 69, 176, 1975. в) Физика плазмы 2, 113, 1976. г) ЖЭТФ 73, 923, 1977.
6. В.В.Васьков, А.В.Гуревич. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 18, 1261, 1975.
7. Н.Д.Борисов, В.В.Васьков, А.В.Гуревич. Геомагн. и аэроном., 16, 783, 1976. Физика плазмы, 3, 168, 1977.
8. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
9. Г.Г.Гетманцев и др. Письма ЖЭТФ, 18, 621, 1973. В.В.Беликович и др. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 18, 512, 1975.
10. Г.Г.Гетманцев и др. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 19, № 12, 1976. А.Ф.Беленов и др. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 20, № 12, 1977.
11. У.Ютло, Р.Коэн. УФН, 109, 371, 1973. W.F.Utlaut. Proc.IEEE, 63, 1022, 1975.
12. Л.М.Ерухимов, С.А. Метелев, Н.А. Митяков, В.Л.Фролов. Письма ЖЭТФ, в печати.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Получим уравнение для плотности энергий плазменных волн $W_{\vec{k}_\rho\omega}$. Для этого домножим уравнение (1.1) на $A_{\vec{k}_\rho\omega}$ и сложим с комплексно-сопряженным. Усредняя результат по фазам, будем иметь ($\Delta\omega = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(V_z W_{\vec{k}_\rho\omega}\right) + \nu W_{\vec{k}_\rho\omega} = \frac{i\omega}{16\pi}\int \frac{\partial R_e\left(a'_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} a^*_\beta\right)}{\partial N}\, d\Omega\, d\omega' \times$$

$$\times\, d\vec{\varkappa}_\rho\, d\vec{k}'_\rho\, d\vec{k}_{\rho_1}\, d\omega_1 \Big[\langle \Delta N_{\vec{\varkappa}_\rho\Omega} A_{\vec{k}'_\rho\omega'} A_{\vec{k}_{\rho_1}\omega_1} \rangle \exp\Big\{ i\int_{z_0}^{z} (k'_z - k_z - \varkappa_z)\, dx \Big\} \times \qquad (1\ \Pi)$$

$$\times\, \delta(\omega - \omega' - \Omega)\, \delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}'_\rho - \vec{\varkappa}_\rho) + \langle \Delta N^*_{\varkappa_\rho\Omega} A_{\vec{k}'_\rho\omega'} A^*_{k_{\rho_1}\omega_1} \rangle \times$$

$$\times \exp\Big\{ -i\int_{z_0}^{z} (k'_z - k_z + \varkappa_z)\, dx \Big\}\, \delta(\omega + \Omega - \omega')\, \delta(\vec{k}_\rho + \vec{\varkappa}_\rho - \vec{k}'_\rho) + \text{к.с.} \Big]$$

В левой части (1 П) мы использовали равенство:

$$\langle A_{\vec{k}_\rho}(z)\, A^*_{k'_\rho\omega'}(z) \rangle \simeq \frac{8\pi W_{\vec{k}_\rho\omega}(z)}{\partial D/\omega\, d\omega}\, \delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}'_\rho)\, \delta(\omega - \omega')\,. \qquad (2\ \Pi)$$

Положим $A_{\vec{k}_\rho\omega} = A^{(0)}_{\vec{k}_\rho\omega} + A^{(1)}_{\vec{k}_\rho\omega} + \dots$, где $A_{\vec{k}_\rho\omega}$ – малая корреляционная добавка, возникающая из-за взаимодействия. Ее можно найти методом последовательных приближений из динамического уравнения (1.1):

$$A^{(1)\pm}_{k_\rho\omega}(z) = i\int_{z_0}^{z} \frac{\beta^{\pm}_{\ell t}\, \Delta N_{\varkappa_\rho\omega}(z')\, A_t(z')}{\partial D^{\pm}/\partial k_z}\, dz' \exp\Big\{ -\int_{z_1}^{z} \frac{\nu + \tilde{\gamma}^{\pm}}{V^{\pm}_z}\, dx -$$

$$-\, i\int_{z_0}^{z'} (k_t - k_z \pm \varkappa_z)\, dx \Big\}\, d\vec{\varkappa}_\rho\, d\Omega\, \delta(\vec{k}_\rho \mp \vec{\varkappa}_\rho)\, \delta(\omega_t - \omega \pm \Omega)\, +$$

$$+\, i\int_{z_0}^{z} dz' \int d\vec{k}'_\rho\, d\omega'\, d\vec{\varkappa}_\rho\, d\Omega\, \frac{\beta_{\ell\ell}\, \Delta N_{\varkappa_\rho\Omega}(z')\, A_{k'_\rho\omega'}}{\partial D^{\pm}/\partial k_z} \times \qquad (3\ \Pi)$$

$$\times \exp\Big\{ -\int_{z'}^{z} \frac{\nu + \tilde{\gamma}}{V^{\pm}_z}\, dx - i\int_{z_0}^{z} (k'_z - k_z \pm \varkappa_z)\, dx \Big\}\, \delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}'_\rho \mp \vec{\varkappa}_\rho)\, \delta(\omega - \omega' \mp \Omega).$$

В случае $A^{(1)}_{k_\rho\omega} << A^{(0)}_{k_\rho\omega}$ тройные корреляции в (1 П) можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
< \overset{\circ}{\Delta N}_{\varkappa_\rho\Omega} A_{k'_\rho\omega'} A^*_{k_{\rho_1}\omega_1} > = & < \Delta N^{(0)}_{\varkappa_\rho\Omega} A^{(1)}_{k'_\rho\omega'} A^{*(0)}_{k_{\rho_1}\omega_1} > + \\
+ < \overset{\circ}{\Delta N}{}^{(0)}_{\Omega\varkappa_\rho} A^{(0)}_{k'_\rho\omega'} A^{*(1)}_{k_{\rho_1}\omega_1} > & + < \Delta N^{(1)}_{\varkappa_\rho\Omega} A^{(0)}_{k'_\rho\omega'} A^{(0)*}_{k_{\rho_1}\omega_1} > .
\end{aligned}
\qquad (4\ \text{П})
$$

Оценки показывают, что в рассматриваемом случае третьим членом в (4 П) можно пренебречь. Теперь учтем, что в приближении случайных фаз выполняются соотношения (2.1). Подставляя (3 П)-(4 П) в (1 П) и используя (2.1), окончательно получим:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\left(V_z W_{k_\rho\omega}\right) + \nu W_{k_\rho\omega} = \\
&= \sum_{\pm} \int \frac{W_t \, \Delta N^2_{\varkappa_\rho\Omega} \nu \beta^2_{\ell t} \, \delta(\vec{k}_\rho \mp \vec{\varkappa}_\rho)}{\nu^2 + (k_z - k_t \mp \varkappa_z)^2 V_z^2} \delta(\omega - \omega_t \mp \Omega) \, d\vec{\varkappa}_\rho \, d\Omega - \\
&- \int \beta^2_{\ell\ell} \nu \Delta N^2_{\varkappa_\rho\Omega} \, \delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}'_\rho - \vec{\varkappa}_\rho) \, \delta(\omega - \omega' - \Omega) \times \\
&\times \left[\frac{W_{k_\rho\omega}}{\nu^2 + (k_z - k'_z - \varkappa_z)^2 V'^2_z} - \frac{W_{k'_\rho\omega'}}{\nu^2 + (k_z - k'_z - \varkappa_z)^2 V_z^2} \right] d\vec{\varkappa}_\rho \, d\vec{k}'_\rho \, d\omega' \, d\Omega ,
\end{aligned}
\qquad (5\ \text{П})
$$

где мы предположили, что в плазме присутствуют монохроматическая волна накачки и ансамбль плазменных волн, т.е.

$$
A_{k_\rho\omega} = A_t \, \delta(\omega - \omega_t) \, \delta(\vec{k}_\rho) + A^{\ell}_{k_\rho\omega}
$$

$W_t = (A_t^2 / 8\pi)$ – плотность энергии волны накачки. При получении правой части (5 П) было использовано то обстоятельство, что фазовые множители типа $\int_{z'}^{z} (k_z - k'_z - \varkappa_z) \, dx$ меняется гораздо быстрее амплитудных $W_{k_\rho\omega}$, поэтому при вычислении интегралов по z в правой части (5 П) оказалось возможным применить метод стационарной фазы.

Уравнение (5 П) описывает эволюцию спектра плазменных волн. Однако (1 П) можно использовать и для получения уравнения, описывающего изменение интенсивности волны накачки. При этом следует учесть, что вследствие большой разницы групповых скоростей электромагнитных и плазменных волн эффектами рассеяния в электромагнитные волны, как правило, можно пренебречь. Кроме того, обратный приток энергии в волну накачки, связанный с многократным рассеянием, пренебрежимо мал из-за малого фазового объема, занимаемого волной накачки. С учетом указанных замечаний будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(V_t W_t\right) + \nu W_t =$$

$$= -\sum_{\pm} \frac{\beta_{t\ell}^2\, \nu \Delta N^2_{\text{æ}_p\Omega} W_t}{\nu^2 + (k_t - k'_z \mp \text{æ}_z)^2}\, d\vec{\text{æ}}_p\, d\vec{k}'_p\, d\Omega\, d\omega'\, \delta(\vec{k}'_p \pm \vec{\text{æ}}_p)\, \delta(\omega_t - \omega' \mp \Omega) = \qquad (6\ \text{п})$$

$$\underset{\nu \to 0}{=} W_t \sum_{\pm} \int \pi \beta^2_{t\ell} V_z^{-1} \Delta N^2_{\text{æ}_p\Omega}\, d\vec{\text{æ}}_p\, d\vec{k}'_p\, d\Omega\, d\omega'\, \delta(\vec{k}'_p \pm \vec{\text{æ}}_p)\, \delta(\omega_t - \omega' \mp \Omega),$$

где $V_{t,z}$ – проекция групповой скорости на ось z соответственно электромагнитной и плазменной волн.

2. Найдем уравнение для спектра интенсивности флуктуаций плотности $\Delta N^2_{\text{æ}_p\Omega}$ в ПСФ. Исходные динамические уравнения (1.1) и (1.7) запишем в виде:

$$A^{\pm}_{k_p} = i \int_{z_0}^{z} V_z^{-1} \exp\left\{-\int_{z'}^{z} \frac{\nu + \tilde{\gamma}}{V_z}\, d\xi\right\} dz' \int d\vec{\text{æ}}_p\, \beta_\ell\, A_t\, \Delta N^{\mp}_{\text{æ}_p} \times$$

$$\times\, \delta(\vec{k}_p \mp \vec{\text{æ}}_p) \times \exp\left\{ i \int_{z_0}^{z'} (k_t - k_z \mp \text{æ}_z)\, d\xi \right\} + \qquad (7\ \text{п})$$

$$+\, i \int_{z_0}^{z} V_z^{-1} \exp\left\{-\int_{z'}^{z} \frac{\nu + \tilde{\gamma}}{V_z}\, d\xi\right\} dz' \int d\vec{k}'_p\, d\vec{\text{æ}}_p\, \Delta N^{\pm}_{\text{æ}_p} \times$$

$$\times\, \delta(\vec{k}_p - \vec{k}'_p - \vec{\text{æ}}_p) \exp\left\{ i \int_{z_0}^{z} (k_z - k'_z - \text{æ}_z)\, d\xi \right\}.$$

$$\Delta N_{\overset{\circ}{\varkappa}_\rho} = -\frac{1}{3T\cdot D_T \Lambda_T}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} dz' \sum_{\pm}\int d\vec{k}_\rho \,(A_{k_\rho}\sigma A_t^{\dagger})^{\mp} \times$$

$$\times\,\delta(\vec{k}_\rho \mp \vec{\varkappa}_\rho)\exp\Big\{\mp i\int_{z_0}^{z'}(k'_z - k_t \mp \varkappa_z)\,d\zeta\Big\} +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} dz'\int d\vec{k}'_\rho\, d\vec{k}_\rho\,(A_{k_\rho}\sigma A'^{*}_{k_\rho})\,\delta(\vec{k}_\rho - \vec{k}'_\rho - \vec{\varkappa}_\rho)\times \tag{8 П}$$

$$\times \exp\Big\{-i\int_{z_0}^{z'}\Delta K_z^{\ell}\, d\xi\Big\}\Big],$$

$$\Delta k_z^{\ell} = k_z - k'_z - \varkappa_z\,,\quad \Delta N^{+}_{\varkappa_\rho} = \Delta N^{*}_{\varkappa_\rho}\,,\quad \Delta N^{-}_{\varkappa_\rho} = \Delta N_{\varkappa_\rho}\,,$$

где опущены медленно меняющиеся в области взаимодействия множители $\sim \exp\{-\Lambda_T|z-z'|\}$, и учтена узость спектра по частоте $\Delta N_{\varkappa_\rho \Omega}$ $(\Delta N_{\varkappa_\rho} = \int \Delta N_{\varkappa_\rho \Omega}\, d\Omega,\quad A_{k_\rho} = \int A_{k_\rho \omega}\, d\omega)$.

Чтобы упростить дальнейшие расчеты, рассмотрим два предельных случая. Один соответствует пренебрежению вторым членом в динамическом уравнении (7 П), описывающим нелинейную перекачку плазменных волн по спектру (второй член в правой части (5 П)). Второй случай отвечает высокому уровню плазменных волн, когда определяющую роль в (8 П) играет нелинейный источник (второй член в правой части (8 П)), и необходимо учитывать перекачку энергии плазменных волн по спектру $\vec{k}_\rho$.

В первом случае имеем:

$$A^{\pm}_{k_\rho} = i\int_{z_0}^{z} V_z^{-1}\exp\Big\{-\int_{z'}^{z}\frac{\nu+\tilde{\gamma}}{V_z}\,d\zeta\Big\}dz'\beta_{\ell t}\,A_t\,\Delta N^{\mp}_{\pm k_\rho}\exp\Big\{i\int_{z}^{z'}(k_t - k_z \mp \varkappa_z)\,d\zeta\Big\}. \tag{9 П}$$

Подстановка выражения (9 П) в (8 П) обращает первое слагаемое в правой части (8 П) в ноль. Здесь, однако, следует иметь в виду, что в (9 П) не учтены точки поворота для плазменных волн и волны накачки. Как показано в §§ 3, 4 в [2], наличие таких точек играет принципиальную роль для ТПН. При этом выражение (9 П) определяет амплитуду плазменной волны $A^{\dagger}_{k_\rho}$, бегущей в $(+\vec{z}$) направлении и не имеющей точки отражения выше точки взаимодействия, т.е. при $z < z_t^*$ [+)]. Поле $E_{k_p}^{\downarrow}$ возмущения, бегущего в $(-\vec{z})$ направлении, складывается уже из двух волн: волны, возбуждаемой непосредственно в области $z \sim z_t^*$, и волны $E_{k_p}^{отр}$, отраженной от уровня $u + v = \omega_H^2/\omega^2 + \omega_p^2/\omega^2 \sim 1$ и вновь вернувшейся в область взаимодействия с волной накачки. Величина $E_{k_p}^{\downarrow}$ равна (более подробно см. § 3 [1]):

$$E_{k_p}^{\downarrow\pm} = A_{k_p}^{\downarrow\pm} \exp\left\{ i\int_{z_0}^{z} k_z^{\downarrow}\, dx \right\} \tag{10п}$$

$$A_{k_p}^{\downarrow\pm} = \exp\left\{-i\int_{z_0}^{z} k_z^{\downarrow}\, dx\right\} E_{k_p}^{\pm}(z_{отр}) \exp\left\{ i\int_{z'}^{z} k_z^{\downarrow}\, dx + \int_{z_\ell^{отр}}^{z} \frac{\nu+\tilde{\gamma}}{V_z^{\downarrow}}\, dx \right\} - i\int_{z_\ell^{отр}}^{z} \frac{\beta_{\ell t}\, \Delta N_{\vec{\varkappa}_p}^{\mp}\, \delta(\vec{k}_p \mp \vec{\varkappa}_p)}{|\partial D/\partial\omega|\, V_z^{\downarrow}}\, dz'\, d\vec{\varkappa}_p \exp\left\{ \int_{z'}^{z} \frac{\nu+\tilde{\gamma}}{V_z^{\downarrow}}\, dx - i\int_{z_0}^{z'} (k_z^{\downarrow} \mp \varkappa_z)\, dx \right\} \times \left(E_t^{\downarrow} + E_t^{\uparrow}\right),$$

где
$$E_{k_p\, отр}^{\pm}(z) = i\int_{z'}^{z_\ell^{отр}} \frac{\beta_{\ell t}\, \Delta N_{\vec{\varkappa}_p = \pm\vec{k}_p}^{\mp}\, d\vec{z}'}{(\partial D/\partial\omega)\, V_z^{\uparrow}} \left(E_t^{\uparrow} + E_t^{\downarrow}\right) \exp\left\{ -i\int_{z_0}^{z_\ell} k_z^{\uparrow}\, dx \right\} \times \tag{11п}$$

$$\times \exp\left\{ -\int_{z'}^{z_\ell^{отр}} \frac{\nu_\ell + \tilde{\gamma}}{V_z^{\uparrow}}\, dx + i\int_{z_0}^{z'} (k_z^{\uparrow} \pm \varkappa_z)\, dx \right\}$$

$$E_t^{\uparrow} = A_t^{\uparrow} \exp\left\{ -i\int_{z_0}^{z} k_t\, dx \right\},$$

$$E_t^{\downarrow} = A_t^{\downarrow} \exp\left\{ -i\int_{z_0}^{z_t^{отр}} k_t\, dx + i\int_{z_t^{отр}}^{z} k_t\, dx \right\},$$

$z_{\ell,t}^{отр}$ – координаты точек поворота плазменной (ℓ) и электромагнитной (t) волн, $A_t^{\uparrow\downarrow}$ – амплитуды составляющих волны накачки, бегущих в $(+\vec{z})$ и $(-\vec{z})$ направлениях. В (11п) учтено, что при одном и том же $|\vec{k}_p|$ $V_z^{\downarrow} \approx -V_z^{\uparrow}$ и $k_z^{\downarrow} \approx -k_z^{\uparrow}$ $(\alpha \to 0)$.

+) z_t^* по-прежнему соответствует уровню, где выполняется синхронизм: $k_z(z_t^*) = k_t \pm \varkappa_z$.

С учетом (9П)–(11П) первый член в правой части (8П) можно записать в виде

$$(1) = -\varepsilon\,\Delta N_{\varkappa_\rho}\,,\quad \varepsilon = \frac{\pi\sigma A_t^1 A_t^1 \beta_{et}}{3T D_T \Lambda_T}\left|\frac{\partial D}{\partial k_z}\;\frac{\partial \Delta K_z^t}{\partial z}\right|^{-1}_{z_t^*} \times$$

$$\times \exp\left\{-2\int_{z_t^*}^{z_e^{\text{отр}}} \frac{\nu+\tilde{\gamma}}{V_z}\,dx\right\}\sin\left[2\int_{z_t^*}^{z_e^{\text{отр}}}(k_t-k_z)\,dx - 2\int_{z_e^{\text{отр}}}^{z_t^{\text{отр}}} k_t\,dx + g\right] \tag{12П}$$

Объединим (12П) с членом в левой части уравнения (8П). Домножая теперь (8П) на $\Delta N^*_{\varkappa_{\rho_1}}$ и усредняя по ансамблю, после интегрирования по $\vec{\varkappa}_{\rho_1}$ будем иметь

$$\Delta N^2_{\varkappa_\rho}(1-\varepsilon)^2 - \int \frac{\pi\Lambda_T^{-2}\,\nu^2\, W_{K_\rho} W_{K'_\rho}\, d\vec{K}_\rho\, d\vec{K}'_\rho}{18T^2 D_T^2\,\left|\partial\Delta K_z^e/\partial z\right|_{z_e^*}}\cdot\delta(\vec{K}_\rho-\vec{K}'_\rho-\vec{\varkappa}_\rho)\,. \tag{13П}$$

Учитывая выражения (9П)–(10П) найдем W_{K_ρ} в случае, когда можно пренебречь нелинейной перекачкой плазменных волн по спектру:

$$W_{k_\rho}(z) = \frac{2\beta_{et}^2 L}{\omega V_z}\,\Delta N^2_{k_\rho}\left[W_t^1(z) + W_t^1(z) + \left(W_t^1 W_t^1\right)^{1/2}\cos\zeta\right]\times$$

$$\times \exp\left\{-\int_{z_t^*}^{z}(\nu/V_z)\,dx\right\} \tag{14П}$$

На стадии развитой неустойчивости, когда $\Delta N^2_{\varkappa_\rho}$ достаточно велико, основной вклад дает член в правой части (13П) (ε_n можно опустить). Следует обратить внимание еще на одно обстоятельство. Множитель $\left|\partial\Delta K_z^e/\partial z\right|^{-1}_{z_e^*}$ в правой части (13П) появился после вычисления интеграла

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,dz'\,W_{k_\rho}(z)\,W_{k_\rho}(z')\exp\{-i\psi(z,z')\} \tag{15П}$$

с быстрой фазой $\psi = \int_{z'}^{z}\Delta K_z^e\,d\xi$. При $\left|\partial\Delta K_z^e/\partial z\right| \to 0$ значение (15П) следует уточнить. В частности, в случае, когда $W_{k_\rho}(z)$ определяется формулой (14П), (15П) будет пропорционален следующей величине:

$$\mathcal{I} = \mathrm{Re}\int\limits_{\tilde{z}^*_{t1}}^{\infty}\int\limits_{z^*_{t2}}^{\infty} dz\,dz'\,\exp\left\{-\int\limits_{z^*_{t1}}^{z}\frac{\nu}{V_z}dx-\int\limits_{z^*_{t2}}^{z_1}\frac{\nu}{V_z}dx - i\int\limits_{z'}^{z}\Delta K^{\ell}_{z}\,d\xi\right\} \qquad (16\text{П})$$

Для оценок можно взять групповую скорость постоянной и равной $V_z = V_z(z^*_\ell)$, где z^*_ℓ – координата точки синхронизма $(\Delta K^{\ell}_{z}(z^*_\ell) = 0)$. В этом случае (16П) преобразуется к виду:

$$\mathcal{I} \simeq 2\left|\frac{\partial\Delta K^{\ell}_{z}}{\partial z}\right|^{-1}_{z^*_\ell}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x}\exp\left\{-\frac{\nu}{V_z}x\right\}\cdot \sin\left|\frac{\partial\Delta K^{\ell}_{z}}{\partial z}\right|x^2_{z^*_\ell} . \qquad (17\text{П})$$

При выводе (17П) мы учли неравенство:

$$|z^*_{1,2t} - z^*_\ell| < \frac{V_z}{\nu} .$$

Значение интеграла (17П) легко получить в двух предельных случаях:

$$\mathcal{I} = \begin{cases} 2\left(\dfrac{V_z}{\nu}\right)^2 & \text{при } \left|\dfrac{\partial\Delta K^{\ell}_{z}}{\partial z}\right|\cdot\dfrac{V_z^2}{\nu^2} \ll 1 \\ \left|\dfrac{2\partial\Delta K^{\ell}_{z}}{\pi\,\partial z}\right|^{-1} & \text{при } \left|\dfrac{\partial\Delta K^{\ell}_{z}}{\partial z}\right|\cdot\dfrac{V_z^2}{\nu^2} \gg 1 \end{cases} \qquad (18\text{П})$$

Для удобства записи (18П) можно аппроксимировать $\mathcal{I}$ следующей приближенной функцией:

$$\mathcal{I} \simeq \frac{\pi}{2}\left(\left|\frac{\partial\Delta K^{\ell}_{z}}{\partial z}\right| + \frac{\nu^2}{V_z^2}\right)^{-1}_{z^*_\ell} . \qquad (19\text{П})$$