Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 116

РЕКУРРЕНТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Я.И.Альбер

Горький – 1978 г.

Реферат

Исследуются рекуррентные числовые неравенства вида

$$\lambda_{n+1} \le (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_n) + \gamma_n, \quad \lambda_n \ge 0; \; n = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(\lambda)$ – строго возрастающая функция при $\lambda \ge 0$, $\psi(0) = 0$. При различных дополнительных предположениях относительно α_n, β_n и γ_n доказывается сходимость к нулю последовательности λ_n, когда $n \to \infty$. Для

$$\alpha_n = \frac{b_1}{n^t} \left(\alpha_n = \frac{b}{(n \ln n)^t} \right), \quad \beta_n = \frac{a}{n^\tau}, \quad \gamma_n = \frac{d}{n^s},$$

$$0 < t < 1, \; s \ge t, \; a > 0, \; b > 0, \; d > 0, \; \tau > 1$$

устанавливаются неасимптотические оценки скорости сходимости λ_n. Аналогичные результаты получены и для дифференциальных неравенств вида

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \le -\alpha(t)\psi(\lambda(t)) + \gamma(t), \quad \lambda(t_0) = \lambda_0, \; t \ge t_0 \ge 0$$

Библ. 14 назв.

§ 1. Введение

Рекуррентные числовые и дифференциальные неравенства являются самым мощным и в большинстве случаев единственным средством доказательства сходимости и установления оценок скорости сходимости приближенных методов решения уравнений и экстремальных задач, и достигнутые здесь успехи определяются, главным образом, прогрессом в исследовании указанных неравенств. Поясним это подробнее.

Пусть I – множество чисел натурального ряда[+], и задано соотношение

$$\lambda_{n+1} \le f(\lambda_n, a_n^1, \ldots, a_n^s), \quad n \in I, \tag{1.1}$$

рекуррентно связывающее неотрицательные числа $\{\lambda_n\}$ и зависящие от числовых параметров $\{a_n^i\}$, $i = 1,2,\ldots,s$, $s \ge 1$. В частности, может быть $a_n^i = const$. Изучая неравенство (1.1), обычно определяют условия, при которых $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ и (или) $\lambda_n \le \chi(n)$, где $\chi(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

+) Основные результаты этой работы по частям докладывались автором на II Всесоюзном симпозиуме по оптимальному управлению в г.Тбилиси в июне 1976 г. и на семинаре "Численные методы решения экстремальных задач" на факультете прикладной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в марте 1977 г.

В течение долгого времени в теории приближенных методов систематически и интенсивно эксплуатировалось неравенство

$$\lambda_{n+1} \le q\lambda_n, \quad 0 < q < 1, \quad n \in I, \qquad (1.2)$$

необходимость использования которого накладывает очень жесткие ограничения на входные данные: например, в гильбертовом пространстве H оператор уравнения обязан быть сильно монотонным, а функционал экстремальной задачи – сильно выпуклым, при этом обеспечивается скорость сходимости не ниже скорости сходимости геометрической прогрессии: $\lambda_{n+1} \le q^n \lambda_1$

В 1947 г. Л.В.Канторович, используя неравенство

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n - c\lambda_n^2, \quad c > 0, \quad n \in I, \qquad (1.3)$$

доказал сходимость по функционалу со скоростью $O\left(\frac{1}{n}\right)$ метода наискорейшего спуска для минимизации квадратичного функционала [1]. Спустя почти двадцать лет аналогичные результаты были установлены из того же самого неравенства (1.3) для метода условного градиента и метода проекции градиента и произвольного выпуклого функционала класса $C^{1,1}$ в задачах с ограничениями [2].

Дальнейший прогресс определился неравенством

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n - \alpha_n \lambda_n^p, \quad \alpha_n \ge 0. \qquad (1.4)$$

Лемма 1. Пусть неотрицательные числа $\{\lambda_n\}$, $n \in I$, удовлетворяют соотношению (1.4), $p > 1$. Тогда

$$\lambda_n \le \lambda_1 \left[1 + (p-1)\lambda_1^{p-1} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\right]^{-1/p-1}. \qquad (1.5)$$

Формулировка этой леммы приведена в [3]; при $p = 2$ она доказана в [4]. Ясно, что если $\sum_1^\infty \alpha_i = \infty$, то

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, если же $\alpha_n = c > 0$, то $\lambda_n = O(n^{1/1-\rho})$.

С помощью этого предложения автором установлена сходимость различных вариантов градиентного метода (в том числе метода проекции градиента и метода условного градиента) для выпуклых и равномерно-выпуклых функционалов степенного типа в классах Гельдера $C^{1,\mu}$, $0<\mu\le 1$ [5, 6]. В частности показано, как следует выбирать шаг, чтобы быстрота сходимости по функционалу в выпуклом случае была равна $O(1/n^{\mu})$, а при $\mu = 1$ методы совпадали с известными [2].

Ниже мы изучаем более общие по сравнению с (1.2) –(1.4) неравенства, например,

$$\lambda_{n+1} \le (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_n) + \gamma_n , \tag{1.6}$$

где $\psi(\lambda)$ строго возрастающая функция при $\lambda \ge 0$, $\psi(0) = 0$. Они позволяют значительно расширить круг экстремальных задач и операторных уравнений, решаемых итеративными алгоритмами (детермированными и стохастическими). Для таких неравенств устанавливается не только сходимость, но и оценки быстроты сходимости последовательности λ_n.+) Изложению этих результатов посвящены §§ 2, 3. В §§ 4, 5 исследуются дифференциальные неравенства вида

$$\frac{d\lambda}{dt} \le -\alpha(t)\psi(\lambda(t)) + \gamma(t),\ t \ge t_0 ;\ \lambda(t_0) = \lambda_0 , \tag{1.7}$$

к которым сводятся в конечном счете доказательства стабилизации непрерывных процессов в задачах минимизации функционалов и решения операторных уравнений. Прежде чем переходить к непосредственному изложению новых утверждений, для удобства ссылок приведем еще два предложения.

+) Заметим, что оценки скорости сходимости λ_n к нулю в неравенстве (1.6) были получены раньше только для случая $\psi(\lambda) = \lambda$, $\beta_n = 0$ и при некоторых дополнительных предположениях относительно α_n и γ_n .

Лемма 2. (Дерман и Сакс [7]) Пусть $\{\lambda_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{a_n\}$ неотрицательны, $\sum_1^\infty \alpha_n = \infty$, $\sum_1^\infty \beta_n < \infty$, $\sum_1^\infty \gamma_n < \infty$ и для всех n, больших некоторого N_0, имеет место неравенство

$$\lambda_n < \max\left[a_n, (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n + \gamma_n\right].$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Лемма 3 [8]. Пусть вещественная неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \le -\alpha(t)\lambda(t) + \gamma(t), \quad \lambda(t_0) = \lambda_0, \quad \alpha(t) > 0. \tag{1.8}$$

Для того, чтобы $\lambda(t)$ стремилось к нулю при $t \to \infty$, достаточно, чтобы выполнялись условия

1) $$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau = \infty \tag{1,9}$$

2) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} = 0 \tag{1.10}$$

В заключение заметим, что существенное предвиже - ние вперед в изучении рекуррентных и дифференциальных неравенств в настоящей работе определяется новым методом исследования. Он основан на введении специального параметра, с помощью которого все множество чисел натурального ряда или пространство $R^+_{t_0} = \{t : t \ge t_0\}$ разбивается на непересекающиеся подмножества, причем на каждом из этих подмножеств можно дать точные выражения, мажорирующие λ_n и $\lambda(t)$ при всех $n \ge 1$ и $t \ge t_0$ соответственно. При этом получаются неасимптотические оценки скорости сходимости и стабилизации.

§ 2. Рекуррентные числовые неравенства

Лемма 1. справедлива при $\rho > 1$ и доказывается методом математической индукции. Ниже мы приводим ее для $\rho > 0$ в другой редакции.

Лемма 4. Пусть $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ неотрицательны, удовлетворяют условиям

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\ ,\quad \alpha_n \geq 0 \qquad (2.1)$$

$$2)\ \sum_1^{\infty} \alpha_n^{1+\varepsilon} = \infty\ , \qquad (2.2)$$

ε – некоторое положительное число, и для всех $n \geq 1$ выполняется неравенство (1.4) при $\rho > 0$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Имеют место следующие оценки

$$\lambda_n < \alpha_n^{\varkappa} \qquad n = n_\ell\ , \{n_\ell\} \neq \phi\ , n_\ell \to \infty \qquad (2.3)$$

$$\lambda_n \leq \alpha_{n_\ell}^{\varkappa}\ ,\ n_\ell < n < n_{\ell+1}\ ,\ \varkappa = \varepsilon/\rho \qquad (2.4)$$

по крайней мере начиная с некоторого конечного $n = k+1$, причем $0 \leq k \leq \max\{s : \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^{1+\varepsilon} \leq \lambda_1\}$;

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n,\ \lambda_{n+1} \leq \lambda_1 - \sum_1^n \alpha_i^{1+\varepsilon}\ , \qquad (2.5)$$
$$n = \overline{1, k}\ .$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что неравенство $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$ вытекает из (1.4), поскольку $\alpha_n \geq 0$, $\lambda_n \geq 0$. Обозначим через I – множество чисел натурального ряда. При каждом $n \geq 1$ может выполняться одно из двух следующих неравенств

$$1)\ \lambda_n < \alpha_n^{\varkappa}\ ,$$

$$2)\ \lambda_n \geq \alpha_n^{\varkappa}\ .$$

Обозначим

$$I_1 = \{n \in I : \lambda_n < \alpha_n^{\varkappa}\} \qquad (2.6)$$

–

$$I_2=\{n\in I\;:\;\lambda_n\geq \alpha_n^{\varkappa}\}. \qquad (2.7)$$

Ясно, что $I=I_1\cup I_2$. Нетрудно показать, что I_1 неограниченное множество. Если это не так, то при всех $n\geq N_0$ $\lambda_n\geq\alpha_n^{\varkappa}$. Тогда, используя (1.4), получаем

$$\lambda_{n+1}\leq\lambda_n-\alpha_n^{1+\varepsilon},$$

откуда

$$\lambda_{n+1}\leq\lambda_{N_0}-\sum_{i=N_0}^{n}\alpha_i^{1+\varepsilon},\quad n=N_0,N_0+1,N_0+2,\ldots$$

А этого быть не может в силу расходимости ряда (2.2). Таким образом, I_1 – бесконечное подмножество множества I. Обозначим его элементы через $n_1,n_2,\ldots,n_\ell,\ldots$ Очевидно, $\lambda_{n_\ell}<\alpha_{n_\ell}^{\varkappa}$, $\{n_\ell\}\neq\phi$, $n_\ell\to\infty$, т.е. имеет место (2.3). Остается установить (2.4). Предположим вначале, что $n_1=1$. Выберем произвольный интервал $I_\ell=[n_\ell,n_{\ell+1}]$. Не исключая общности можно считать, что $n_{\ell+1}>n_\ell+1$, так как в случае $n_{\ell+1}=n_\ell+1$ $I_\ell\in I_1$ и оценка на λ_n для $n\in I_\ell$ известна.
Используя (1.4), имеем

$$\lambda_n<\lambda_{n_\ell}-\sum_{i=n_\ell+1}^{n-1}\alpha_i^{1+\varepsilon}<\alpha_{n_\ell}^{\varkappa} \qquad (2.8)$$

для всех $n_\ell<n<n_{\ell+1}$. Поскольку I_1 неограничено, отсюда следует: $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$. Пусть теперь $n_1=K+1$, $K\geq1$. Тогда множество $\{1,2,\ldots,K\}\in I_2$ и, значит,

$$\lambda_{n+1}\leq\lambda_1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{1+\varepsilon},\quad n=\overline{1,K}.$$

Условие неотрицательности λ_n дает ограничение сверху (2.5) на число K. А дальше рассуждения проводятся так же, как и в случае $n_1=1$. Лемма доказана.

Замечание 1. Из (2.8) следует, что при фиксированном n_ℓ индекс $n_{\ell+1}$ не может неограниченно возрастать, но этого нельзя сказать, когда $n_\ell \to \infty$. Поэтому оценки (2.3) и (2.4) не являются "рабочими". Однако, можно показать (см. § 3), что во всех практически важных случаях ($\alpha_n = \frac{1}{n^s}$, $\alpha_n = \frac{1}{(n \ln n)^s}$, $0 < s < 1$) отношение $n_{\ell+1}/n_\ell$ ограничено и, следовательно $\lambda_n \le C\alpha_n^{\varkappa}$, $C = const$ при всех $n \ge 1$. Это замечание относится ко всем леммам § 2.

Замечание 2. Чтобы получить наилучшую оценку скорости сходимости, гарантированную леммой 4, необходимо ε выбирать наибольшим, при котором имеет место (2.2). При $\varepsilon = 0$ (например $\alpha_n = 1/n$), из леммы 4 следует только ограниченность λ_n.

Приведем примеры.

1. Пусть $\alpha_n = n^{-t}$, $0 < t < 1$. Полагая $0 < \varepsilon < \frac{1-t}{t}$, получаем $\lambda_{n_\ell} < n_\ell^{-\sigma}$, $\sigma = t\varepsilon/p$. Например, $\sigma = (1-t)/p$ при $\varepsilon = (1-t)/t$. При $t \to 1$ гарантированная оценка быстроты сходимости ухудшается, и наоборот, при $t \to 0$ оценка улучшается. Это очевидно, поскольку при $t_1 > t_2$ ряд $\sum_1^\infty n^{-t_1}$ расходится медленнее, чем ряд $\sum_1^\infty n^{-t_2}$.

2. Пусть $p = 1$. Тогда

$$\lambda_{n+1} \le (1-\alpha_n)\lambda_n, \quad n \in J.$$

Если $\alpha_n = n^{-1/2}$, то при любом $0 < \varepsilon \le 1$ ряд $\sum_1^\infty \alpha_n^{1+\varepsilon}$ расходится, значит, $\lambda_{n_\ell} < n_\ell^{-\varepsilon/2}$, в частности, $\lambda_{n_\ell} < n_\ell^{-1/2}$. Отметим, что другим способом для этого неравенства можно доказать сходимость $\lambda_n \to 0$ при условии

$$\sum_1^\infty \alpha_n = \infty$$

причем, если $\alpha_n = 1/n$, то $\lambda_n = O(1/n)$. Действительно

$$\lambda_n \le \lambda_1 \prod_1^{n-1} (1-\alpha_i) \le \lambda_1 e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = O\left(e^{-\ln n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если же $\alpha_n = (2n-1)^{-1}$, то $\lambda_n = O(n^{-\dots})$

Лемма 5. Пусть последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ неотрицательны, удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2) и для всех $n \geq 1$

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \alpha_n \lambda_n^p + \gamma_n , \quad p > 0 , \tag{2.9}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty . \tag{2.10}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Справедливы оценки

$$\lambda_n < \alpha_n^{\varkappa} , \quad n = n_e , \{n_e\} \neq \phi , \quad n_e \to \infty \tag{2.11}$$

$$\lambda_n \leq \alpha_{n_e}^{\varkappa} + \sum_{i=n_e}^{n-1} \gamma_i , \quad n_e < n < n_{e+1} \tag{2.12}$$

по крайней мере, начиная с некоторого конечного $n = K+1$, причем

$$0 \leq K \leq \max\{s : \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i^{1+\varepsilon} - \gamma_i) < \lambda_1 \} \tag{2.13}$$

кроме того

$$\lambda_{n+1} < \lambda_1 - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{1+\varepsilon} - \gamma_i) , \quad n = \overline{1,K} \tag{2.14}$$

Доказательство аналогично лемме 4. Введем вновь обозначения (2.6), (2.7). Так же как и раньше, показывается что I_1 бесконечное множество, т.к. в противном случае, начиная с некоторого N_0 будем иметь

$$\lambda_n \leq \lambda_{N_0} - \sum_{i=N_0}^{n-1} \alpha_i^{1+\varepsilon} + \sum_{i=N_0}^{n-1} \gamma_i .$$

Но вследствие (2.1) и (2.10) этого быть не может. Следовательно, имеет место (2.11). Для доказательства неравенства (2.12) выберем произвольный интервал $[n_e, n_{e+1}]$, считая, что $n_{e+1} \neq n_e + 1$. Используя (2.9) получаем

$$\lambda_n < \lambda_{n_e} - \sum_{i=n_e+1}^{n-1} \alpha_i^{1+\varepsilon} + \sum_{i=n_e}^{n-1} \gamma_i < \lambda_{n_e} + \sum_{i=n_e}^{n-1} \gamma_i \ , \ n_e < n < n_{e+1} .$$

Если $n_1 = 1$, то лемма доказана. Если $n_1 = K+1$, то условие неотрицательности λ_n дает оценки (2.13) и (2.14).

В действительности мы показали, что при $n \geq K$

$$\lambda_{n+1} \leq \min\{\alpha_n^{\varkappa}, \lambda_n - \alpha_n^{1+\varepsilon} + \gamma_n\}$$

и после этого факт сходимости λ_n к нулю следует также из леммы Дермана и Сакса.

Конкретные последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ дают обычные оценки быстроты сходимости. Например, если $\rho = 1$, $\alpha_n = 1/\sqrt{n}$, $\gamma_n = 1/(n^2-1)$, то $\lambda_n < C_n/\sqrt{n}$, $n \in I$, $n-1$, $1 < C_n < 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 1$. Заметим, что $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n = 3/4$.

<u>Лемма 6</u>. Пусть $\{\lambda_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$ – последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяют условиям (2.9), (2.10), и, кроме того, при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n^{\varepsilon} = \infty . \qquad (2.15)$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Имеют место оценки

$$\lambda_n < \gamma_n^{\varkappa} , \ n = n_e , \ \{n_e\} \neq \phi , \ n_e \to \infty ,$$

$$\lambda_n < \gamma_{n_e}^{\varkappa} + \sum_{i=n_e}^{n-1} \gamma_i , \ n_e < n < n_{e+1} ;$$

по крайней мере, начиная с некоторого $n = K+1$,

$$0 \leq K \leq \max\{s : \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^{\varepsilon} (\alpha_i - \gamma_i^{1-\varepsilon}) < \lambda_1\} ,$$

причем

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \gamma_i^{\varepsilon} - \gamma_i) ; \ n = \overline{1, K} .$$

Соотношения (2.10) и (2.15) реализуют, например, следующие последовательности

а) $\alpha_n = C > 0$, $\gamma_n = n^{-(s+1)}$, $s > 0$, $0 < \varepsilon < (s+1)^{-1}$

б) $\alpha_n = n^{-(1-s_1)}$, $\gamma_n = n^{-(1+s_2)}$, $0 < s_1 < 1$, $s_2 > 0$, $0 < \varepsilon \le s_1(1+s_2)^{-1}$.

<u>Лемма 7.</u> Предположим, что неотрицательные числа $\{\lambda_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ удовлетворяют соотношениям (2.1), (2.2), (2.9), $p > 0$, и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = 0. \tag{2.16}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Выполняются оценки

$$\lambda_n < g(n), \quad n = n_e, \{n_e\} \ne \phi, \; n_e \to \infty$$

$$\lambda_n \le g(n_e), \quad n_e < n < n_{e+1},$$

где $g = \max\{(2\gamma_n/\alpha_n)^{1/p} + \gamma_n \cdot \alpha_n^{\varkappa}\}$ по крайней мере, начиная с некоторого $n = K+1$,

$$0 \le K \le \max\{S : \sum_{i=1}^{S} \alpha_i^{1+\varepsilon} < 2\lambda_1\}$$

причем

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n, \; \lambda_{n+1} \le \lambda_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{1+\varepsilon}, \quad n = \overline{1,K}.$$

Лемма доказывается разбиением множества I на два непересекающихся подмножеств.

$$I_1 = \{n \in I : \lambda_n^p < \frac{2\gamma_n}{\alpha_n}\},$$

$$I_2 = \{n \in I : \lambda_n^p \ge \frac{2\gamma_n}{\alpha_n}\}.$$

Оценки быстроты сходимости в лемме 7 рассчитаны на наихудший случай. Однако, в зависимости от величины показателя p и "мощности" I_1 и (или) I_2 можно дать несколько вариантов формул, мажорирующих λ_n ;

1) $I_1 = \phi$, $p > 0$. Тогда λ_n удовлетворяет (2.3), (2.4); $n \in I$.

2) $I_1 = \phi$, $\rho = 1$. Тогда $\lambda_n < \lambda_1 e^{-\tau_1}$, $\tau_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$; $n \in I$.

3) $I_1 = \phi$, $\rho > 1$. Тогда λ_n удовлетворяет (1.5); $n \in I$

4) $I_2 = \phi$. Тогда $\lambda_n < (2\gamma_n/\alpha_n)^{1/\rho}$, $n \in I$.

5) $I_1 \neq \phi$, $I_2 = \phi$ и I_1, I_2 – бесконечные множества. Тогда

$$\lambda_n < \left(\frac{2\gamma_n}{\alpha_n}\right)^{1/\rho}, \ n = n_e, \ \{n_e\} \neq \phi, \ n_e \to \infty,$$

$$\lambda_n < \left(\frac{2\gamma_{n_e}}{\alpha_{n_e}}\right)^{1/\rho} + \gamma_{n_e}, \quad n_e < n < n_{e+1}.$$

Замечание 3. Лемма 7 при $\rho > 1$ была, по-видимому, впервые получена в [9]. Раньше в ряде работ (см. например, [10] и библиографию там) рассматривался случай $\rho = 1$.

Лемма 8. Пусть последовательности неотрицательных чисел $\{\lambda_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ удовлетворяют условиям (2.1), (2.2), (2.10)

$$\sum_1^\infty \beta_n < \infty \tag{2.17}$$

и при всех $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\lambda_{n+1} \leq (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \lambda_n^\rho + \gamma_n, \quad \rho > 0,$$

Тогда справедливо утверждение леммы 7, если положить в ней

$$g = C \max\left\{ \left(\frac{2\gamma_n}{\alpha_n}\right)^{1/\rho} + \gamma_n, \ \alpha_n^{\varkappa} \right\}, \tag{2.18}$$

$$0 \leq k \leq \max\{s : \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^{1+\varepsilon} < 2C\lambda_1\}, \tag{2.19}$$

$$\lambda_{n+1} < C\lambda_1 - 1/2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{1+\varepsilon},$$

где

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+\beta_i) < C. \qquad (2.20)$$

Замечание 4. Имеют место более точные по сравнению с (2.19), (2.20) оценки на λ_n и K :

$$K \le \max\{s : \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^{1+\varepsilon} \prod_{j=i+1}^{s} (1+\beta_j) < 2C\lambda_1\} \qquad (2.18')$$

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_1 \prod_{i=1}^{n} (1+\beta_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{1+\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} (1+\beta_i), n=\overline{1,K} \qquad (2.19')$$

Замечание 5. В обозначениях леммы 8 и везде ниже полагаем $\prod_{i=m}^{n} (1+\beta_i) = 1$, если $m > n$.

Замечание 6. Хорошо известно, что бесконечное произведение $\prod_{i=1}^{\infty} (1+\beta_i)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (2.17).

Лемма 9. Предположим, что $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ неотрицательны, удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2) и при всех $n \ge 1$

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_n),$$

где $\psi(\lambda)$ строго возрастающая функция для $\lambda \ge 0$, $\psi(0)=0$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, причем

$$\lambda_n < \psi^{-1}(\alpha_n^{\varepsilon}), \; n = n_\ell, \{n_\ell\} \ne \phi, \; n_\ell \to \infty,$$

$$\lambda_n \le \psi^{-1}(\alpha_{n_\ell}^{\varepsilon}), \; n_\ell < n < n_{\ell+1},$$

по крайней мере, начиная с некоторого $n = K+1$, для которого имеет место соотношение (2.5).

Наконец, самая общая

Лемма 10[+]. Пусть $\{\alpha_n\}, \{\lambda_n\}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\}$, последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяют условиям (2.1), (2.2), (2.16), (2.17), (2.20) и для всех $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\lambda_{n+1} \leq (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_n) + \gamma_n , \tag{2.21}$$

где $\psi(\lambda)$ строго возрастающая функция при $\lambda \geq 0$, $\psi(0) = 0$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Справедливы следующие оценки:

$$\lambda_n < C g(n), \quad n = n_\ell, \quad \{n_\ell\} \neq \emptyset, \quad n_\ell \to \infty,$$

$$\lambda_n < C g(n_\ell), \quad n_\ell < n < n_{\ell+1},$$

где

$$g(n) = \max\left\{ \psi^{-1}\left(\frac{2\gamma_n}{\alpha_n}\right) + \gamma_n, \psi^{-1}(\alpha_n^{\varepsilon}) \right\},$$

по крайней мере, начиная с некоторого конечного $n = k+1$, для которого имеют место неравенства (2,18), (2.19) (или (2.18°), (2.19°)).

Мы не приводим доказательств лемм 6–10, так как в идейном отношении они близки к доказательству леммы 4.

§ 3. Неасимптотические оценки скорости сходимости в рекуррентных числовых неравенствах.

Приведем вначале одно общее утверждение, позволяющее получить обычные оценки быстроты сходимости, "работающие" при любом $n \geq 1$.

+) Б.Т.Поляк обратил внимание автора на свою статью [10], в которой отмечается факт сходимости к нулю последовательности λ_n из (2.21). Оценки скорости сходимости в работе [10] даны только для случая $\psi(\lambda) = \lambda$.

Пусть $\sum_{1}^{\infty} \alpha_n^{1+\varepsilon} = \sum_{1}^{\infty} f(n)$,
где $f(n) = \alpha_n^{1+\varepsilon}$ – значение при $x = n$, $n \in J$, некоторой функции $f(x)$, определенной при $x \geq N_0 \geq 1$. Предположим, в соответствии со свойством (2.1), эту функцию непрерывной, положительной и монотонно убывающей. Пусть далее $F(x)$ какая-либо первообразная для $f(x)$. Поскольку $F'(x) = f(x) > 0$, то функция $F(x)$ возрастающая, но она растет на бесконечности медленнее функции $y = x$, в силу того, что $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Известно (см. [11]), что

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) = F(n+1) + C + \delta_n, \ \delta_n \to 0,$$

где C –конечный предел возрастающей и ограниченной последовательности $\{a_n = \sum f(m) - F(n+1)\}$, а δ_n –соответствующая бесконечно малая.

Предположим далее, что $F(x)$ обладает свойством (P): существуют числа $\delta > 0$ и $\bar{x} \geq x_0$, такие что из соотношения $F(x) - F(y) \leq \delta$, $x \geq y \geq \bar{x}$, следует: $f(y)/f(x) < C$. C – константа, не зависящая от x, y.

Допустим теперь, что в дополнение к перечисленным выше предположениям выполнены условия леммы 4. Тогда, используя равенство

$$\sum_{m=n_e+1}^{n_{e+1}} f(m) = F(n_{e+1}+1) - F(n_e+1) + \delta_{n_{e+1}} - \delta_{n_e} =$$

$$= F(n_{e+1}) - F(n_e) + \delta_{n_{e+1}} - \delta_{n_e} + f(\theta_2) - f(\theta_1),$$

где $n_e < \theta_1 < n_e + 1$, $n_{e+1} < \theta_2 < n_{e+1} + 1$, и неравенство (2.8), получаем

1) $\sum_{m=n_e+1}^{n_{e+1}} \alpha_m^{1+\varepsilon} \leq \lambda_{n_e} < \alpha_{n_e}^{\varkappa}$

2) $F(n_{e+1}) - F(n_e) \leq \alpha_{n_e}^{\varkappa} + \delta_{n_e} - \delta_{n_{e+1}} + \alpha_{n_e}^{1+\varepsilon} - \alpha_{n_{e+2}+1}^{1+\varepsilon} =$
$= \delta(n_{e+1}, n_e)$.

3) $\delta(n_{e+1}, n_e) \le \alpha_{n_e}^{\varkappa} + |\delta_{n_e}| + \alpha_{n_e}^{1+\varepsilon} \to 0, \; n_e \to \infty$.

Из свойства (P) следует: существует N такое, что при всех $n_{e+1} > n_e \ge N$

$$\frac{\alpha_{n_e}}{\alpha_{n_{e+1}}} < C. \tag{3.1}$$

Окончательная оценка вытекает из (2.4)

$$\lambda_n \le (x_n)^{\varkappa} \left(\frac{\alpha_{n_e}}{\alpha_n}\right)^{\varkappa} \le (x_n)^{\varkappa} \left(\frac{\alpha_{n_e}}{\alpha_{n_{e+1}}}\right)^{\varkappa} \le C\alpha_n^{\varkappa} = C_1\alpha_n^{\varkappa}. \tag{3.2}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 11. Пусть 1) неотрицательные числа $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$, удовлетворяют соотношениям (1.4), (2.1) и (2.2); 2) $f(x)$ – положительная, монотонно убывающая функция, принимающая значения $\alpha_n^{1+\varepsilon}$ при $x = n$; 3) $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$, обладающая свойством (P). Тогда

$$\lambda_n < C\alpha_n^{\varkappa}, \quad \varkappa = \varepsilon/p$$

по крайней мере, начиная с некоторого конечного $n = k+1$, для которого имеет место (2.5).

Аналогичным образом можно переформулировать и остальные леммы § 2. Константа C конкретизируется для достаточно широкого набора последовательностей α_n. Приведем соответствующие утверждения.

Лемма 12. Пусть неотрицательные числа $\{\lambda_n\}$ удовлетворяют неравенству

$$\lambda_{n+1} \le \lambda_n - \frac{b}{n^t}\lambda_n^p, \quad p > 0, \; 0 < t \le 1, \; b > 0.$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Кроме того

$$\lambda_n < \left(\frac{C}{n}\right)^{\frac{1-t}{P}}, \quad C = \exp\left[\frac{1}{B} + \frac{1}{2}\right], \tag{3.3}$$

по крайней мере, начиная с некоторого конечного $n = K+1$, причем $0 \le K \le \exp\left[\frac{\lambda_1}{B} - \bar{C}\right]$; $\lambda_{n+1} \le \lambda_1 - B(\ln n + \bar{C})$,

$\bar{C} \approx 0{,}577$ –

– постоянная Эйлера.

Действительно, положим $\varepsilon = \frac{1-t}{t}$. Тогда $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln n$. Очевидно, $F(x)$ обладает свойством (P). Далее из представления [12]

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = \ln n + \bar{C} + \delta_n, \quad |\delta_n| < \frac{1}{2}, \quad \delta_n \to 0$$

следует

$$\frac{n_{\ell+1}}{n_\ell} < \exp\left[\frac{1}{B}\left(\frac{1}{n_\ell}\right)^{\frac{1-t}{P}} + \delta_{n_\ell}\right] < \exp\left[\frac{1}{B} + \frac{1}{2}\right] = C. \tag{3.4}$$

Оценка (3.3) получается так же как и общая оценка (3.2).

Покажем, что и в случае $0 < \varepsilon < \frac{1-t}{t}$ первообразная $F(x)$ для $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{t(1+\varepsilon)}$ обладает свойством (P). В самом деле,

$$F(x) = \sigma^{-1} x^{\sigma}, \quad \sigma = 1 - t(1+\varepsilon) < 1 - t.$$

Если $\sigma^{-1}(x^{\sigma} - y^{\sigma}) < \delta$, $x \ge y$, $\delta > 0$,

то $$\frac{f(y)}{f(x)} \le (1 + \sigma\delta)^{(1+\varepsilon)t/\sigma},$$

$$\frac{n_{\ell+1}}{n_\ell} \le \left(1 + \frac{\sigma\delta}{n_\ell^{\sigma}}\right)^{1/\sigma} \le \left(1 + (1-t)\delta\right)^{1/\sigma} = C_1. \tag{3.5}$$

Отсюда следует (3.1). Общая же оценка такова:

$$\lambda_n < \left(\frac{C_1}{n}\right)^{\varepsilon/P}, \quad n \in I. \tag{3.6}$$

Сравнивая (3.3) и (3.6), замечаем, что при достаточно больших n оценка (3.3) предпочтительнее оценки (3.5). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только случай $\varepsilon = (1-t)/t$.

Лемма 13. Предположим, что неотрицательные числа λ_n, $n \geq 1$, удовлетворяют неравенству

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \frac{b}{n^t} \lambda_n^p + \frac{d}{n^s}, \tag{3.7}$$

$p > 0$, $s > t$, $0 < t < 1$, $b > 0$, $d > 0$

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Справедлива оценка

$$\lambda_n < C \left(\frac{1}{n}\right)^{\varkappa}, \quad n \in I,$$

$$\varkappa = \min\left\{\frac{s-t}{p}, \frac{1-t}{p}, s\right\}, \tag{3.8}$$

$$C = \max\left\{C_1 \exp\left[z_1\left(\frac{2}{b}C_1 + \frac{1}{2}\right)\right], \exp\left[\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-t}{p}\right)\right]\right\},$$

$$C_1 = 2\max\left\{\left(\frac{2d}{b}\right)^{1/2}, d\right\}, \quad z_1 = \min\left\{\frac{s-t}{p}, s\right\},$$

по крайнем мере, начиная с некоторого конечного $n = K+1$, где

$$0 \leq K \leq \exp\left[\frac{2\lambda_1}{b} - \bar{C}\right]; \quad \lambda_n \leq \lambda_1 - \frac{b}{2}(\ln n + \bar{C}), \quad n = \overline{1, K}. \tag{3.9}$$

Лемма 14. Пусть неотрицательные числа λ_n, $n \in I$, удовлетворяют неравенству

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \frac{b}{n^t} \psi(\lambda_n) + \frac{d}{n^s},$$

$\psi(\lambda)$ – монотонно возрастающая функция для $\lambda \geq 0$, $\psi(0) = 0$. константы b, d, t и s такие же, как и в лемме 13. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Имеют место следующие скорости сходимости

$$\lambda_n \le \max\left\{2\psi^{-1}\left(\frac{2d}{\beta}\,\frac{c_1^{s-t}}{n^{s-t}}\right),\ \frac{dc_1^s}{n^s},\ \psi^{-1}\left(\frac{c_2^{1-t}}{n^{1-t}}\right)\right\},$$

$$c_1 = \exp\left[\frac{4}{\beta}\max\left\{\psi^{-1}\left(\frac{2d}{\beta}\right), d\right\} + \frac{1}{2}\right],$$

$$c_2 = \exp\left[\frac{\beta + 4\psi^{-1}(1)}{2\beta}\right],$$

по крайней мере, начиная с некоторого $n = k+1$, для которого выполняется (3.9).

Леммы 13 и 14 обобщают и дополняют известные результаты Чжуна, Буркхольдера, Вентера и других авторов [7, 13, 14].

Рассмотрим теперь случай

$$\alpha_n = \frac{1}{(n \ln n)^t},\ 0<t<1,\ \alpha_n \to 0,\ n \ge 2.$$

Выбирая вновь $\varepsilon = \frac{1-t}{t}$, получаем

$$\alpha_n^{1+\varepsilon} = \frac{1}{n \ln n},\quad \sum_1^\infty \alpha_n^{1+\varepsilon} = \infty.$$

Пусть, далее, выполняется неравенство (1.4). Тогда

$$\lambda_n < \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{\frac{1-t}{p}},\ n = n_e,\ \{n_e\} \ne \phi,\ n_e \to \infty, \tag{3.10}$$

$$\lambda_n < \left(\frac{1}{n_e \ln n_e}\right)^{\frac{1-t}{p}},\ n_e < n < n_{e+1}. \tag{3.11}$$

Покажем, что функция $F(x) = \ln \ln x$ – первообразная для функции $f(x) = 1/x \ln x$ – обладает свойством (P) для произвольного $x = n_{e+1}$, $y = n_e$.

Прежде всего отметим, что

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m \ln m} = C + \ln \ln n + \delta_n,\ C \simeq 0{,}8,\ 0 < \delta_n < 0{,}3,\ \delta_n \to 0 \tag{3.12}$$

Далее

$$\sum_{m=n_e+1}^{n_{e+1}} \frac{1}{m\ln m} = \ln\ln n_{e+1} - \ln\ln n_e + \delta_{n_e},$$

$$\delta_{n_e} = \delta_{n_{e+1}} - \theta_{n_e}; \quad |\delta_{n_e}| < 0{,}3 .$$

Отсюда и из (3.11) имеем

$$\frac{\ln n_{e+1}}{\ln n_e} < \sigma, \quad \sigma = \exp\left[(n_e \ln n_e)^{\frac{t-1}{p}} + |\delta_{n_e}|\right], n_e \geq 2.$$

Это неравенство позволяет оценить отношение n_{e+1}/n_e. Действительно

$$\frac{n_{e+1}}{n_e} < n_e^{\sigma-1}. \tag{3.13}$$

Последовательность, стоящая в правой части неравенства (3.12), начиная с некоторого n_e монотонно убывает, поэтому $n_{e+1}/n_e < C_1$. Например, при $t = 0{,}1$ и $p = 0{,}5$ $C_1 < 3$; $C_1 < 9$ при $t = 0{,}2$, $p = 5$; $C_1 < 4$ при $t = 0{,}5$ $p = 1$. Отметим также, что в (3.12) δ_n (следовательно, и δ_{n_e} в (3.13)) достаточно быстро убывает: $\delta_2 = 0{,}283$, $\delta_{100} = 0{,}001$, $\delta_{1000} = 0{,}00007$; C_1 растет с ростом p.
Таким образом, и для неравенства

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \frac{\delta}{(n\ln n)^t}\psi(\lambda_n) + \frac{d}{n^s}$$

можно сформулировать результаты, аналогичные леммам 12–14. Их можно распространить также и на условия леммы 10, положив $\beta_n = 1/n^z$, $z > 1$.

В заключение подчеркнем, что из (3.4), (3.5) и (3.13) следует:

$$\lim_{n_e \to \infty} \frac{n_{e+1}}{n_e} = 1.$$

§ 4. Дифференциальные неравенства

Изучение дифференциальных неравенств, так же как и числовых, мы начнем с простого случая, затем перейдем к более сложным. Везде ниже мы предполагаем существование решения дифференциального неравенства на полубесконечном интервале.

Лемма 15. Предположим, что функции $\lambda(t)$ и $\alpha(t)$ неотрицательны и при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\alpha(t)\lambda^p(t), \; p>0, \; \lambda(t_0)=\lambda_0 \,. \quad (4.1)$$

Для того, чтобы $\lambda(t)$ при $t \to \infty$ стремилось к нулю, достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$1) \quad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0 \,. \qquad (4.2)$$

$$2) \quad \int_0^\infty \alpha^{1+\varepsilon}(\tau)\, d\tau = \infty \,, \qquad (4.3)$$

ε – некоторое положительное число.

Доказательство. При каждом $t \geqslant t_0$ возможны только два случая:

$$1) \quad \lambda^p(t) < \alpha^\varepsilon(t), \qquad (4.4)$$

$$2) \quad \lambda^p(t) \geqslant \alpha^\varepsilon(t). \qquad (4.5)$$

Пусть $T_1^1, T_1^2, \ldots, T_2^1, T_2^2, \ldots,$ – интервалы по t (в направлении увеличения t), на которых выполняются (4.4) и (4.5) соответственно (не исключается, что какие-либо T_j^i состоят из отдельных точек). Обозначим t_j^i и $\bar{t}_j^i$ – начало и конец интервала T_j^i, $j=1,2$; $i=1,2,\ldots,$ $T_1 = \cup T_1^i$, $T_2 = \cup T_2^i$. $T_{t_0}^+ = \{t : t \geqslant t_0\}$.

Тогда $T_1 \cup T_2 = T_{t_0}^+$. В силу (4.4) на каждом интервале T_1^i

$$\lambda(t) < \alpha^{\varkappa}(t) \,, \; \varkappa = \frac{\varepsilon}{p} \,, \qquad (4.6)$$

а на каждом интервале T_2^i

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \le -\alpha^{1+\varepsilon}(t). \tag{4.7}$$

Интегрируя (4.7) с начальным значением $\lambda(t_2^i)$, равным значению $\lambda(t)$ на конце интервала T_1^i, получаем

$$\lambda(t) \le \lambda(\bar{t}_1^i) - \int_{\bar{t}_1^i}^{t} \alpha^{1+\varepsilon}(\tau)\,d\tau, \ \forall t \in T_2^i. \tag{4.8}$$

Итак, из (4.6) и (4.8) следует: на каждом интервале T_1^i $\lambda(t)$ мажорируется убывающей к нулю функций $\alpha^{\varkappa}(t)$, а на каждом интервале T_2^i $\lambda(t)$ не возрастает и ограничена значением $\lambda(t)$ на конце предыдущего интервала T_1^i, то есть

$$\lambda(t) \le \lambda(\bar{t}_1^i) \le \alpha^{\varkappa}(\bar{t}_1^i), \ \forall t \in T_2^i \tag{4.9}$$

Покажем, что T_1 неограничено. Действительно, из предположения противного вытекает, что существует T_0 такое, что

$$\lambda(t) \le \lambda(T_0) - \int_{T_0}^{t} \alpha^{1+\varepsilon}(\tau)\,d\tau, \forall t \in [T_0, \infty],$$

чего не может быть в силу расходимости интеграла (4.3). Если при этом $T_2 = \phi$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $T_2 \ne \phi$. Тогда T_1^i и T_2^i чередуются и соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ следует из (4.6) и (4.9).

<u>Замечание 7.</u> Эти же неравенства являются оценками скорости стабилизации при любом $t \ge t_0$, если $t_0 \in T_1^1$. Если же $t_0 \in T_2^1$, то (4.6) и (4.9) имеют место по крайней мере, начиная с некоторого конечного $t = t_1$, $t_0 \le t_1 \le \max\{s: \int_{t_0}^{s} \alpha^{1+\varepsilon}(\tau)\,d\tau < \lambda_0\}$.

<u>Лемма 16.</u> Пусть функции $\lambda(t)$, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ неотрицательны и при всех $t \ge t_0 \ge 0$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq -\alpha(t)\lambda^p(t) + \gamma(t), \; p > 0, \; \lambda(t_0) = \lambda_0, \qquad (4.10)$$

Тогда, для того, чтобы $\lambda(t)$ стремилось к нулю при $t \to \infty$ достаточно, чтобы выполнялись соотношения (4.2), (4.3) и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} = 0. \qquad (4.11)$$

Доказательство. Обозначим через $T_1^1, T_1^2, T_1^3, \ldots$ – интервалы по t, на которых в силе неравенство

$$\lambda^p(t) < \frac{2\gamma(t)}{\alpha(t)}, \qquad (4.12)$$

а через $T_2^1, T_2^2, T_2^3, \ldots$ – интервалы, на которых имеет место противоположное неравенству

$$\lambda^p(t) \geq \frac{2\gamma(t)}{\alpha(t)}, \qquad (4.13)$$

$T_1^i \in T_{t_0}^+$, $T_2^i \in T_{t_0}^+$. Как и раньше, $T_1 = \cup T_1^i$, $T_2 = \cup T_2^i$, $T_1 \cup T_2 = T_{t_0}^+$.

В силу (4.12) на каждом T_1^i

$$\lambda(t) \leq \left[\frac{2\gamma(t)}{\alpha(t)}\right]^{1/p}, \qquad (4.14)$$

а в силу (4.13) на каждом T_2^i

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \leq -\frac{1}{2}\alpha(t)\lambda^p(t). \qquad (4.15)$$

Предположим, что $T_2 = \phi$. Тогда $T_1 = [t_0, \infty)$. Вследствие (4.14) и (4.11) $\lambda(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. В случае $T_1 = \phi$ такое же заключение можно сделать на основании леммы 15. Пусть теперь T_1 и T_2 бесконечные множества. Тогда T_1^i и T_2^i чередуются и аналогично лемме 15 любой интервал можно разбить на непересекающиеся множества, на каждом из которых справедливо либо (4.6), либо (4.9) ((4.8)). Отсюда следует утверждение леммы, если вспомнить, что на каждом множестве T_1^i имеет место (4.12). Точно также исследуется случай ограниченного T_1 (или T_2).

Отметим, что равенство (4.3) выполняется, например, для функции $\alpha(t) = 1/t^m$, $0 < m < 1$, но не выполняется при $m = 1$, так как какое бы $\varepsilon > 0$ ни выбрать, интеграл (4.3) будет сходящимся. Следует подчеркнуть, что лемма 16 справедлива и тогда, когда предположение (4.3) заменяется равенством

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\, dt = \infty \tag{4.16}$$

(и тогда можно положить, например, $\alpha(t) = 1/t$). Однако, неассимптотические оценки скорости стабилизации мы получаем в следующем параграфе только в предположении (4.3). Вопрос о том, можно ли их получить в предположении (4.16), остается в настоящее время открытым.

Лемма 16'. Предположим, что выполнены условия леммы 16 и соотношения (4.2), (4.11) и (4.16). Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$.

Лемма 17. Пусть функция $\lambda(t)$ неотрицательна при $t \geq t_0$; $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3). $\psi(\lambda)$ монотонно возрастает при $\lambda \geq 0$ и $\psi(0) = 0$; имеет место неравенство:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \leq -\alpha(t)\psi(\lambda(t)), \ \lambda(t_0) = \lambda_0, \ t \geq t_0.$$

Тогда. $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$.

В условиях этой леммы множество $T_{t_0}^+$ можно разбить на множества T_1 и T_2 следующим образом:

$$T_1 = \cup T_1^i, \quad T_1^i = \{t : \psi(\lambda) < \alpha^{\varepsilon}(t)\}, \ i = 1, 2, \ldots$$

$$T_2 = \cup T_2^i, \quad T_2^i = \{t : \psi(\lambda) \geq \alpha^{\varepsilon}(t)\}, \ i = 1, 2, \ldots$$

Тогда на каждом T^i $\lambda(t) < \psi^{-1}(\alpha^{\varepsilon}(t))$, а на каждом T_2^i $\lambda(t) = \lambda(\bar{t}_1^i) < \psi^{-1}(\alpha^{\varepsilon}(\bar{t}_1^i))$

где, как и раньше, $\bar{t}_1^i$ конец интервала T_1^i, совпадающий с началом интервала T_2^i. А дальше доказательство проводится по схеме доказательства леммы 16 (см. также замечание 7).

Лемма 18. Пусть функции $\lambda(t)$, $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям леммы 17, соотношению (4.11) и неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \le -\alpha(t)\psi(\lambda(t)) + \gamma(t), \quad \lambda(t_0) = \lambda_0 .$$

Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$.

Здесь множество $T_{t_0}^+$ разбивается на два подмножества T_1 и T_2 следующим образом:

$$T_1 = \left\{ t : \psi(\lambda) < \frac{2\gamma(t)}{\alpha(t)} \right\}$$

$$T_2 = \left\{ t : \psi(\lambda) \ge \frac{2\gamma(t)}{\alpha(t)} \right\}, \quad T_1 \cup T_2 = T_{t_0}^+$$

§ 5. Неасимптотические оценки скорости стабилизации $\lambda(t)$ при $t \to \infty$ в дифференциальных неравенствах.

Так же как и в случае числовых рекуррентных неравенств, можно показать, что при произвольных $\alpha(t)$, удовлетворяющих лишь ограничениям (4.2), (4.3), интервалы T_2^i в леммах § 4 при $t \to \infty$ могут неограниченно возрастать, хотя при каждом фиксированном t_2^i множество T_2^i ограничено. Поэтому оценки вида (4.6), (4.9) в практических приложениях не всегда оказываются пригодными. Однако, для целого ряда функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ выполняется соотношение

$$\bar{t}_2^i < C t_2^i ,$$

где константа C не зависит от $\bar{t}_2^i$ и t_2^i, что позволяет получить оценки скорости стабилизации, справедливые при любом $t \geq t_0$.

<u>Лемма 19.</u> Предположим, что неотрицательная функция $\lambda(t)$, $t \geq t_0 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq \frac{b}{t^n}\lambda^p(t) + \frac{d}{t^m}, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0, \quad p > 0, \tag{5.1}$$

$0 < n < 1$, $m > n$, $b > 0$, $d > 0$. Тогда $\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Кроме того

$$\lambda(t) < C\left(\frac{1}{t}\right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \min\left\{\frac{m-n}{p}, \frac{1-n}{p}\right\}, \tag{5.2}$$

$$C = \max\left\{\left(\frac{2d}{b}\right)^{1/p}, \ \exp\left[\frac{2(1-n)}{b t_0 p}\right]\right\},$$

по крайней мере, начиная с некоторого конечного $t = t_1$, $t_0 \leq t_1 \leq t_0 \exp[2\lambda_0/b]$, при этом

$$\lambda(t) \leq \lambda_0 - \frac{b}{2}\ln\frac{t}{t_0}, \tag{5.3}$$

$$t_0 \leq t \leq t_1.$$

<u>Доказательство.</u> Обозначим

$$J_1 = \left\{t \in T^+_{t_0} : [\lambda(t)]^p < \frac{2d}{b}\left(\frac{1}{t}\right)^{m-n}\right\},$$

$$J_2 = \left\{t \in T^+_{t_0} : [\lambda(t)]^p \geq \frac{2d}{b}\left(\frac{1}{t}\right)^{m-n}\right\}.$$

Тогда

$$J_1 \cup J_2 = T^+_{t_0}, \quad J_1 = \cup T_1^i, \quad J_2 = \cup T_2^i.$$

Предположим далее, что $J_1 \neq \varnothing$. Тогда для всех $t \in T^+_{t_0}$.

$$\frac{d\lambda}{dt} \le - \frac{\beta}{2t^n} \lambda^p(t) \qquad (5.4)$$

Воспользуемся рассуждениями леммы 15, введя множества T_1 и T_2 и считая $\varepsilon = \frac{1-n}{n}$.В силу (4.6) и (4.8)

$$\lambda(t) < \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1-n}{p}}, \ \forall t \in T_1^i, \ i = 1, 2, \ldots \qquad (5.5)$$

$$\lambda(t) \le \lambda(\bar{t}_1^i) - \frac{\beta}{2} \int_{\bar{t}_1^i}^{t} \frac{d\tau}{\tau}, \ \forall t \in T_2^i, \ i = 1, 2, \ldots \qquad (5.6)$$

Как было выяснено раньше, множество T_1 неограниченно. Это вместе с (5.6) дает первое утверждение леммы: $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$. Далее, из (5.6) следует

$$\int_{t_1^i}^{t} \frac{d\tau}{\tau} < \frac{2}{\beta} (\bar{t}_1^i)^{-1} = \frac{2}{\beta} (t_2^i)^{-1}, \ \forall t \in T_2^i, \ i = 1, 2, \ldots \qquad (5.7)$$

Отсюда

$$\frac{\bar{t}_2^i}{t_2^i} < C_t = \exp\left[\frac{2}{\beta t_2^i}\right] \le C = \exp\left[\frac{2}{\beta t_0}\right]. \qquad (5.8)$$

Снова обратимся к неравенству (5.6). Имеем

$$\lambda(t) \le \left(\frac{1}{t_2^i}\right)^{\frac{1-n}{p}} \le \left(\frac{C}{t}\right)^{\frac{1-n}{p}}, \quad C > 1. \qquad (5.9)$$

Сравнивая (5.5) и (5.9), заключаем, что (5.9) имеет место при всех $t \in T_{t_c}^+$. Пусть теперь $J_2 \ne \phi$. Тогда

$$\lambda(t) < \left(\frac{2d}{\beta}\right)^{1/p} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{m-n}{p}}, \ \forall t \in T_{t_0}^+ . \qquad (5.10)$$

Если J_1 или J_2 конечны, то оценки (5.9), (5.10) справедливы при $t \ge \bar{t} \ge t_0$. Предположим, наконец, что J_2 и J_1 бесконечные множества од–

новременно. Выберем произвольное $\mathcal{T}_1^i \in \mathcal{T}_1$, оно определяет $\mathcal{T}_2^i \in \mathcal{T}_2$ (с тем же индексом i). Для всех $t \in \mathcal{T}_1^i$ в силе (5.10). Множество $\mathcal{T}_2^i$ разобьем на два непересекающихся (не обязательно связанных) подмножества

$$\mathcal{T}_{21}^i = \left\{ t \in \mathcal{T}_2^i : \lambda(t) < \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1-n}{p}} \right\}$$

$$\mathcal{T}_{22}^i = \left\{ t \in \mathcal{T}_2^i : \lambda(t) \geq \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1-n}{p}} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{T}_{21}^i = \phi$. Тогда

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq -\frac{\beta}{2t}, \quad \forall t \in \mathcal{T}_{22}^i = \mathcal{T}_2^i$$

и $\lambda(t)$ мажорируется выражением (5.9). Если же $\mathcal{T}_{22}^i = \phi$, то

$$\lambda(t) < \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1-n}{p}}, \quad \forall t \in \mathcal{T}_{21}^i = \mathcal{T}_2^i . \tag{5.11}$$

Если же $\mathcal{T}_{21}^i$ и $\mathcal{T}_{22}^i$ одновременно не пусты, то при каждом $t \in \mathcal{T}_2^i$ выполняется одно из неравенств (5.9), (5.11). И последнее. Если $t_0 \in \mathcal{T}_2^1$, то условие неотрицательности $\lambda(t)$ и соотношение (5.8) дает оценку на t_1 и на $\lambda(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$. Вместе с (5.10) эти неравенства приводят к окончательному утверждению леммы.

<u>Лемма 20</u>. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ при $t \geq t_0 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq -\frac{b}{t^n}\psi(\lambda(t)) + \frac{d}{t^m}, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0$$

$0 < n < 1$, $m > n$, $b > 0$, $d > 0$. Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$. Кроме того

$$\lambda(t) \leq \max\left\{\psi^{-1}\left(\frac{2d}{\beta}\left(\frac{1}{t}\right)^{m-n}\right), \psi^{-1}\left(\left(\frac{c}{t}\right)^{1-n}\right)\right\},$$

$$c = \exp\left[2/\beta t_0\right],$$

по крайней мере, начиная с некоторого конечного $t = t_1$, для которого имеет место (5.3).

Аналогичные результаты формулируются для дифференциального неравенства

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq -\frac{\beta}{(t \ln t)^n}\psi(\lambda(t)) + \frac{d}{t^m},$$

$$\lambda(t_0) = \lambda_0, \quad t \geq t_0 > 1.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Канторович Л.В. О методе наискорейшего спуска. Докл. АН СССР, 56, № 3 (1947), 233-236.

2. Левитин Е.С., Поляк Б.Т. Методы минимизации при наличии ограничений. Ж.вычисл. матем. и матем.физ., 6, № 5 (1966), 787-823.

3. Любич Ю.И., Майстровский Г.Д. Общая теория релаксационных процессов. УМН, 25, 1 (1970), 57-112.

4. Карманов В.Г. Оценки сходимости итерационных методов минимизации. Ж., вычисл.матем. и матем. физ., 14, № 1 (1974), 3-14.

5. Альбер Я.И. К задаче минимизации гладких функционалов градиентными методами. Ж. вычисл. матем. и матам.физ., 11, № 3 (1971), 752-758.

6. Альбер Я.И. О минимизации функционалов класса $C^{1,\mu}$ на ограниченных множествах. Экономика и матем. методы (в печати).

7. Вазан М. Стохастическая аппроксимация, М., "Мир", 1972.

8. Альбер Я.И. Непрерывная регуляризация линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Матем. заметки, 4, № 5 (1968), 503-509.

9. Альбер Я.И. Применение градиентных методов для решения задач оптимального управления в классе функционалов $C^{1,\mu}$, $0<\mu\leq 1$.
Материалы II Всесоюзного симпозиума по оптимальному управления и дифференциальным играм, Тбилиси, 1976.

10. Поляк Б.Т. Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. 1. Общий случай. Автоматики и телемеханика, № 12 (1976), 83-94.

11. Фихтенгеольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. Гостехиздат, 1948.

12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1948.

13. Chung K.L. On stochastic approximation, Ann.Math.Stat., 25(1954), 463-483.

14. Venter J.H. On stochastic approximation methods. Ph.D.Thesis University of Chicago (1963).