

Министерство высшего и среднего специального образования  
Р С Ф С Р  
Ордена Трудового Красного Знамени  
Научно-исследовательский радиопизический институт (НИРФИ)

Препринт № 118

О ЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ  
МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Н.Г.Денисов

Горький — 1978 г.

Исследованию линейного взаимодействия (трансформации) электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме посвящено большое число работ (см., например, [1-3]), в которых были рассмотрены наиболее типичные случаи взаимодействия волн в ионосферной, космической и лабораторной плазме. Интерес к этой проблеме прежде всего связан с тем, что в определенных условиях эффект взаимодействия проявляется в локализованных областях плазмы и оказывает существенное влияние на параметры распространяющихся волн. Это позволяет, в частности, использовать эффект трансформации для целей диагностики плазмы.

Хорошо известно, что в плавно-неоднородной плазме заметная трансформация волн возможна в той ее области, где показатели преломления нормальных волн  $n_{1,2}$  принимают близкие друг другу значения (область квазипересечения или пересечения кривых  $n_{1,2}(z)$ ). К этому типу взаимодействия относится взаимодействие высокочастотных волн в ионосферной плазме [1], определяющее эффект утраивания сигналов в ионосфере, взаимодействие быстрых и медленных магнитозвуковых волн [4], трансформация низкочастотных волн, объясняющая появление ионных свистов в верхней ионосфере [5], и взаимодействие циркулярно поляризованных волн в области поперечного распространения (см. [6] и цитированную там литературу). Известна также формальная аналогия между теорией взаимодействия волн в неоднородной магнитоактивной плазме и квантовой теорией неупругих соударений между атомами. Так, выше указанные примеры взаимодействия аналогичны неадиабатическим переходам в квантовой системе с двумя линейными термами, тео-

рия которых была развита в работах Ландау и Зинера (см. [7 - 9]). Эта аналогия распространяется и на ряд других случаев линейного взаимодействия, которые рассматриваются в настоящей статье.

Следует отметить также, что в теории распространения электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме были сформулированы [10, 11] общие положения, определяющие характер линейного взаимодействия, которые получили широкое распространение особенно в приложениях к космической и ионосферной плазме [3, 11-13]. Эти положения основаны на результатах качественного анализа уравнений Баддена [10] для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн и, как оказалось, далеко не совершенны.

В настоящей статье детально исследуются различные случаи линейного взаимодействия электромагнитных волн на плавной границе неоднородной гиротропной плазмы (в области малых плотностей электронов), на примере которых можно установить в частности и границы применимости общих положений метода качественного анализа.

## 1. Исходные уравнения

Уравнения поля для плоских электромагнитных волн в неоднородной плоскостой гиротропной плазме могут быть представлены в виде двух связанных уравнений второго порядка [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \pi_1}{dz^2} + (k_0^2 n_1^2 - \psi^2) \pi_1 &= - \frac{d\psi}{dz} \pi_2 - 2\psi \frac{d\pi_2}{dz}, \\ \frac{d^2 \pi_2}{dz^2} + (k_0^2 n_2^2 - \psi^2) \pi_2 &= \frac{d\psi}{dz} \pi_1 + 2\psi \frac{d\pi_1}{dz}, \end{aligned} \quad (1)$$

которым подчиняются волновые функции

$$\pi_{1,2} = E_{x_{1,2}} \sqrt{1 - K_{1,2}^2} \sim e^{i\omega t}, \quad (2)$$

где  $E_{x_{1,2}}$  - компоненты электрического поля необыкновенной (1) и обыкновенной (2) волн, так что  $E_x = E_{x_1} + E_{x_2}$ ,  $E_y = E_{y_1} + E_{y_2}$ ,  $E_{y_{1,2}} = K_{1,2} E_{x_{1,2}}$ . Считается, что волны распространяются вдоль оси  $z$ , а внешнее магнитное поле  $H_0$  лежит в плоскости  $yz$  и составляет угол  $\vartheta$  с осью  $z$ . В (2) входят также коэффициенты поляризации нормальных волн

$$K_{1,2} = i(\eta \mp \sqrt{1 + \eta^2}), \quad \eta = \frac{s_c}{1 - v - is} \quad (3)$$

Здесь используются хорошо известные обозначения [1]:

$$v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad s = \frac{v_{эф}}{\omega} \quad \text{и} \quad s_c = \sqrt{u} \frac{\sin^2 \vartheta}{2 \cos \vartheta} \quad (4)$$

( $\omega_0$  - плазменная частота,  $\omega_H = \sqrt{u} \omega$  - гирочастота электронов и  $v_{эф}$  - эффективное число соударений электронов с тяжелыми частицами). Коэффициент связи  $\psi$ , входящий в систему (1), определяется формулой [1]:

$$\psi = \frac{i}{K_2^2 - 1} \frac{dK_2}{dz} = \frac{1}{2(1 + \eta^2)} \frac{d\eta}{dz} \quad (5)$$

и, как видно из (3), определяется градиентами концентрации электронов, числа соударений и внешнего магнитного поля. В среде с плавно меняющимися свойствами эффектом отражения волн можно пренебречь, и уравнения (1) сводятся к системе уравнений второго порядка для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн [1, 10]. Имея в виду дальнейшие приложения, мы приведем эти уравнения в той форме, в которой она была получена в [11] (слабо-ионизированная плазма,  $v \ll 1$ ). Медленно меняющиеся амплитуды нормальных волн  $u_{1,2}(z)$ , определенные соотношениями

$$u_{1,2} = U_{1,2} \exp\left\{-ik_0 \int \frac{n_1 + n_2}{2} dz\right\}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (6)$$

подчиняются системе уравнений

$$\begin{cases} u_1' = ik_0 \frac{n_2 - n_1}{2} u_1 - \psi u_2 \\ u_2' = \psi u_1 - ik_0 \frac{n_2 - n_1}{2} u_2 \end{cases} \quad (7)$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по  $z$ ;  $n_{1,2}(z)$  — показатели преломления нормальных волн в плазме. При  $v \ll 1$  и  $S = 0$  [1]:

$$n_2 - n_1 = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad A = \frac{v u_T}{2(1-u)}, \quad u_T = u \sin^2 \vartheta, \quad (8)$$

$$n_2 + n_1 = 2\sqrt{1 - \frac{v}{2} \frac{2-u_T}{1-u}}, \quad B = \frac{v\sqrt{u_L}}{1-u}, \quad u_L = u \cos^2 \vartheta.$$

Параметр  $\zeta$ , определяющий коэффициент связи  $\psi$ , при этом будет равен

$$\zeta = \frac{A}{B} = \frac{u_T}{2\sqrt{u_L}} = S_c. \quad (9)$$

Таким образом, в использованном здесь приближении система (7) описывает линейное взаимодействие волн в плазме лишь при условии изменения параметра  $S_c$ , то есть при неоднородном внешнем магнитном поле  $H_0$ . Вместе с тем по своей структуре она практически совпадает с общими уравнениями Баддена [10], и результаты, полученные ниже для определенных типов пересечений, могут быть использованы при анализе подобных случаев взаимодействия в плазме без принятых здесь ограничений.

Следует указать на то, что система (7) плохо приспособлена для решения тех задач, о которых пойдет речь ниже, то есть тех случаев взаимодействия, когда точки  $\zeta = \pm i$  (в которых  $n_1 = n_2$ ) располагаются вблизи действительной оси  $z$ . В этих точках коэффициенты поляризации нормальных волн  $K_{1,2}$  (см. (3)) совпадают, и параметр  $\psi$  обращается в бесконечность. Однако уравнения (7) можно преобразовать к более удобному виду — к системе с регулярными коэффициентами, если перейти к другим зависимым переменным [14]  $V_{x,y}(z)$ :

$$E_{x,y} = V_{x,y} \exp \left\{ -i \int \frac{n_1 + n_2}{2} dz \right\}. \quad (10)$$

Это достигается преобразованием

$$\begin{cases} V_x = U_1 \cos g + U_2 \sin g, \\ iV_y = U_1 \sin g - U_2 \cos g, \end{cases} \quad \operatorname{ctg} 2g = \eta = \frac{A}{B} \quad (11)$$

которое дает систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд  $V_{x,y}$ , эквивалентную (7):

$$\begin{cases} V'_x = i \frac{k_0 A}{2} V_x - \frac{k_0 B}{2} V_y, \\ V'_y = \frac{k_0 B}{2} V_x - i \frac{k_0 A}{2} V_y, \end{cases} \quad (12)$$

Для амплитуд циркулярно поляризованных волн  $V_+ = V_x + iV_y$ ,  $V_- = V_x - iV_y$  эта система запишется так:

$$\begin{cases} V'_+ = i \frac{k_0 B}{2} V_+ + i \frac{k_0 A}{2} V_-, \\ V'_- = i \frac{k_0 A}{2} V_+ - i \frac{k_0 B}{2} V_-. \end{cases} \quad (13)$$

Выбор той или иной системы уравнений (7), (12) определяется условиями постановки конкретных задач и позволяет существенно упростить их решение.

При  $u \ll 1$  уравнения (13) совпадают с уравнениями квазиизотропного приближения [6]. Аналогичные уравнения для общего случая неоднородной магнитоактивной плазмы были получены в работах [15, 16].

В теории распространения волн в средах с плавно ме-

няющимися свойствами широко используется приближение геометрической оптики (ГО), которое для уравнений (12) имеет вид:

$$V_x = \frac{C_1}{\sqrt{1-K_1^2}} \exp\left\{ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz\right\} + \frac{C_2}{\sqrt{1-K_2^2}} \exp\left\{-ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz\right\} \quad (14)$$

(  $K_{1,2}$  определяется формулами (3) ) и представляет волновое поле в виде независимых волн двух типов. Однако в области сближения кривых  $n_{1,2}(z)$ , когда точки  $z = \pm i (K_{1,2}^2 = 1)$  приближаются к действительной оси  $z$ , решение (14) становится неприменимым. Здесь коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  изменяются и по выходе из указанной области принимают другие значения. Закон преобразования коэффициентов в решении (14), который полностью описывает эффект линейного взаимодействия, может быть получен на основе более полного исследования решений исходной системы (12). Поскольку результат существенно зависит от характера пересечения дисперсионных кривых, ниже рассматриваются конкретные модели неоднородных плазменных слоев.

## 2. Расчет эффекта взаимодействия

Рассмотрим вначале наиболее типичный и хорошо известный случай пересечения кривых  $n_{1,2}(z)$  на примере трансформации волн в слабоионизированной ( $v \ll 1$ ) и слабогиротропной ( $u \ll 1$ ) плазме в области поперечного распространения. Если в результате изменения внешнего магнитного поля на пути распространения плоской волны встречается точка, в которой  $\vec{H}_0 \perp \vec{k}_0$  ( $z = 0$ ), разделяющая области квазипродольного распространения, то взаимодействие волн происходит в окрестности точки  $z = 0$ . Коэффициент  $B(z)$  в уравнениях (12) в этой точке меняет знак. При плавном изменении параметров среды в некоторой окрестности  $z = 0$  можно считать, что  $B(z) = (dB/dz)_0 z$ ,  $A(z) = \text{const}$ . Качественное поведение функций  $n_{1,2}(z)$  в этом случае ото-

бражено на рис. 1. Система уравнений (12) теперь может быть решена точно [6<sup>†</sup>) в функциях параболического цилиндра. Исследование этого решения показывает, что волна определенного типа в области взаимодействия рождает волну другого типа с относительной амплитудой  $e^{-\delta}$ , где параметр  $\delta$  равен

$$\delta = \frac{\pi}{2} k_0 A^2 \left( \frac{dB}{d\tilde{x}} \right)_0^{-1} = \frac{\pi}{8} v u^{3/2} k_0 L. \quad (15)$$

Конкретное значение  $\delta$  в (15) записано для линейного закона изменения функции  $\cos \vartheta = \tilde{x}/L$  [6]. Простая оценка параметра взаимодействия  $\delta$  может быть получена путем подсчета разности набежгов фаз нормальных волн на эффективной длине взаимодействия [6]. Последняя определяется расстоянием между нулями функции  $n_2(\tilde{x}) - n_1(\tilde{x}) = \sqrt{A^2 + B^2(\tilde{x})}$  и равна  $L_{\text{эф}} = L\sqrt{u}$ . Это дает

$$\delta \sim k_0 (n_2 - n_1)_{\tilde{x}=0} L_{\text{эф}}. \quad (16)$$

В аналогичной задаче о неадиабатических переходах в квантовомеханической системе, состоящей из двух атомов, этот параметр носит название параметра Месси [9]. Существенно, что в слабогиротропной среде ( $u \ll 1$ )  $L_{\text{эф}} \ll L$ , и область взаимодействия локализована в сравнительно узкой области неоднородного слоя плазмы. Этот факт указывает на возможность использования линейной аппроксимации коэффициентов исходных уравнений.

Как уже отмечалось, рассмотренный тип пересечения характерен для многих примеров линейного взаимодействия волн и является наиболее простым. Далее мы рассмотрим другие случаи взаимодействия, реализующиеся на границе плавнеоднородной гиротропной плазмы с однородной гиротропной или изотропной средой.

<sup>†</sup>) В теории неадиабатических переходов при атомных столкновениях такая модель (модель линейных термов) была рассмотрена Ландау и Зинером (см. [7, 9]).



а) Взаимодействие при выходе в однородную гиротропную среду.

Как показано в [10, 14] на примере одной модели переходного слоя плазмы, заметного взаимодействия волн следует ожидать при сильном перепаде параметра  $\int \psi d\tilde{x}$  на масштабе изменения  $n_2 - n_1$ . По этой причине мы будем рассматривать те случаи распространения волн в неоднородной плазме, когда в глубоких ее слоях выполнено условие квазипоперечности  $S_c \gg 1$ , а при выходе из слоя  $(\tilde{x} \rightarrow \infty) S_c \rightarrow 0$ . При этом кривые  $n_{1,2}(\tilde{x})$  не пересекаются и ведут себя качественно так, как изображено на рис. 2. В области  $\tilde{x} \sim \tilde{x}_0$  ( $A \sim B$ ) происходит перестройка дисперсионных кривых, так что слева от нее распространение волн носит квазипоперечный характер, а при  $\tilde{x} > \tilde{x}_0$  распространение квазипродольное.

В квантовой теории неупругих соударений между атомами такой случай квазипересечения рассматривался в работе [8], где было показано, что область  $A \sim B$  ( $\tilde{x} \sim \tilde{x}_0$ ) обладает свойствами подобными свойствами рассмотренного выше линейного пересечения. Задача решалась методом фазовых интегралов для потенциала взаимодействия, спадающего по степенному закону. В обозначениях нашей задачи это соответствует следующей модели переходного слоя плазмы:

$$A = A_0 \left( \frac{\tilde{x}}{L} \right)^{-s} \quad (s \geq 2), \quad B(\tilde{x}) = \text{const} \quad (17)$$

(поперечная компонента внешнего магнитного поля при  $\tilde{x} \rightarrow \infty$  исчезает и поле становится продольным).

Используя решение, полученное в [8], сразу же можно найти коэффициенты трансформации волн при прохождении области квазипересечения. Так, если в области  $A > B$  задана волна определенного типа (2), то при прохождении через точку  $\tilde{x} = \tilde{x}_0$  она расщепляется на две волны 1 и 2 с амплитудами

$$|C_1| = e^{-\delta}, \quad |C_2| = \sqrt{1 - e^{-2\delta}} \quad (18)$$

параметр  $\delta$  в этом случае равен

$$\delta = -\frac{ik_0}{4} \oint (n_2 - n_1) dz = -\frac{ik_0}{2} \oint \sqrt{A^2 + B^2} dz. \quad (19)$$

Если ввести переменную интегрирования

$$t = \frac{A}{B} = \frac{A_0}{B} \left(\frac{z}{L}\right)^{-s},$$

то интеграл (19) запишется в виде

$$\delta = \frac{ik_0 L}{4s} B^{\frac{s-1}{s}} A_0^{\frac{1}{s}} \oint \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^n} dt, \quad n = 1 + \frac{1}{s}, \quad (20)$$

где контур интегрирования  $\oint$  охватывает точки ветвления  $t = \pm i$  (см. рис. 3). На рис. 3 изображены также линии Стокса для случая  $s = 2$ , которые разделяют плоскость комплексного переменного  $t$  на области с различным асимптотическим поведением решения вида (14). При этом линия, соединяющая точки  $t = \pm i$ , является полуокружностью, пересечение которой с действительной осью  $t$  соответствует точке квазипересечения  $A \sim B$ . В работе [8] было показано также, что при увеличении  $s$  структура стоксовых линий, изображенная на рис. 3, изменяется незначительно, так что качественно картина взаимодействия для переходного слоя (17) при  $s > 2$  сохраняется. При этом эффект трансформации волн определяется параметром  $\delta$  (см. (19)), который, как легко показать, по порядку величины равен разности набега фазы в области квазипересечения:

$$\delta \sim k_0 (n_2 - n_1) L_{\text{эф}}, \quad L_{\text{эф}} = L \left(\frac{A_0}{B}\right)^{1/s}. \quad (21)$$

эффективная длина взаимодействия определяется расстоянием между ближайшими к действительной оси  $z$  точками, в которых  $n_1 = n_2$

Граничный случай  $s = 1$  в работе [8] не рассматривался, однако для такого закона изменения параметра  $A$  уравнения (12) могут быть решены точно. При

$A = A_0 (\xi / L)^{-1}$  и  $B = \text{const}$  система (12) сводится к уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 V_x}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{\alpha^2 + i\alpha}{\xi^2}\right) V_x = 0, \quad (22)$$

где  $\xi = \frac{k_0 B}{2} \frac{z}{L}$ ,  $\alpha = k_0 L A_0 / 2$ , решение которого может быть выражено в функциях Бесселя. Если теперь выбрать частное решение (12) в виде

$$\begin{aligned} V_x &= C \sqrt{\xi} J_{1/2 - i\alpha}(\xi), \\ V_y &= -C \sqrt{\xi} J_{-1/2 - i\alpha}(\xi), \end{aligned} \quad |C|^2 = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \pi \alpha}, \quad (23)$$

где константа  $C$  выбрана для нормировки полного потока на единицу, то в области квазипоперечного распространения ( $\xi \ll 1$ ,  $\alpha \neq 0$ ) оно дает одну нормальную волну (2), поляризация которой близка к линейной:

$$V_x \approx \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{\xi}{\Gamma(3/2 - i\alpha)} \exp\{-i\alpha \ln \frac{\xi}{2}\} \sim \xi \exp\{-ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz\} \quad (24)$$

$$V_y \approx \frac{C \sqrt{2}}{\Gamma(1/2 - i\alpha)} \exp\{-i\alpha \ln \frac{\xi}{2}\} \sim \exp\{-ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz\}$$

При выходе в область квазипродольного распространения ( $z \rightarrow \infty$ ), асимптотическое представление функции Бесселя в (23) при  $\xi \gg 1$ ,  $\xi \gg \alpha$  дает циркулярно поляризованные нормальные волны. Амплитуды этих волн равны

$$|C_1| = (1 + e^{2\delta})^{-1/2}, \quad |C_2| = (1 + e^{-2\delta})^{-1/2}, \quad \delta = \pi \alpha = \frac{\pi}{2} k_0 L A_0. \quad (25)$$

Параметр взаимодействия в этом случае также определя-

ется разностью набегов фаз нормальных волн на эффективной длине взаимодействия.

Можно привести ряд других моделей переходного слоя, для которых уравнения (12) имеют точные решения. Так, например, при экспоненциальном спадении поперечной компоненты  $H_0$   $A(z) = A_0 e^{-z/L}$ ,  $B = \text{const}$  взаимодействие волн в области квазипересечения  $A \sim B$  характеризуется коэффициентами трансформации (25), в которых параметр взаимодействия равен

$$\delta = \frac{\pi}{2} k_0 L B \quad (26)$$

и по порядку величины совпадает со значением параметра Месси (16) в точке квазипересечения. Заметим также, что длина взаимодействия  $L_{\text{эф}}$  для рассмотренных моделей переходного слоя совпадает со значением  $\psi^{-1}$  (см. (5)) в точке квазипересечения.

б) Взаимодействие волн при выходе в изотропную среду.

Аналогичное квазипересечение дисперсионных кривых реализуется в переходном слое магнитоактивная плазма - изотропная среда.

В этом случае эффект трансформации определяет предельную поляризацию волн, выходящих из неоднородной гиротропной среды, поскольку фазовые скорости нормальных волн в изотропной среде совпадают [1]. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда в переходном слое внешнее магнитное поле  $H_0$  или концентрация электронов  $N$  стремятся к нулю. Это означает, что при  $z \rightarrow \infty$   $A(z) \rightarrow 0$  и  $B(z) \rightarrow 0$  и дисперсионные кривые ведут себя так, как показано на рис. 4. Область квазипересечения, где происходит перестройка дисперсионных кривых ( $z \sim z_0$ ,  $A \sim B$ ), здесь такая же, как и в рассмотренном выше случае, но теперь при  $z > z_0$  располагается область, в которой кривые  $\nu_{1,2}(z)$  продолжают сближаться и на действительной оси  $z$  может появиться точка их пересечения. Наличие дополнительной точки пересечения существенно усложняет задачу, однако и в этих случаях она может быть ре-

шена точно для некоторых моделей переходного слоя.

Рассмотрим вначале переходный слой, в котором внешнее магнитное поле спадает по закону  $H_0 \sim 1/z$ . Коэффициенты системы уравнений (12) будут равны:

$$A = A_0 \left( \frac{z}{L} \right)^{-2}, \quad B = B_0 \left( \frac{z}{L} \right)^{-1} \quad (27)$$

и ее решение может быть записано в функциях Уиттекера [17]:

$$V_y = \frac{1}{\sqrt{t}} W_{1/2, i\beta}(-t), \quad t = \frac{ik_0 L A_0}{z} = \frac{ik_0 v U_T^0}{2z}, \quad (28)$$

$$V_x = \frac{\beta}{\sqrt{t}} W_{-1/2, i\beta}(-t), \quad \beta = \frac{k_0 L B_0}{2} = \frac{k_0 L}{2} v \sqrt{U_L^0}.$$

В глубоких слоях плазмы, то-есть при  $|t| \gg 1$ ,  $|t| \gg \beta$  асимптотическое разложение функций Уиттекера дает представление

$$V_y \approx e^t \sim \exp \left\{ -ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz \right\},$$

$$V_x \approx \frac{\beta e^t}{t} \sim \frac{\beta}{t} \exp \left\{ -ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz \right\},$$

соответствующее приближению Г.О. для волны типа 2, которая в этой области имеет поляризацию, близкую к линейной. Поле этой волны при выходе в изотропную среду ( $z \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0$ ) имеет также простое представление, если использовать разложения функций, входящих в (28), при  $t \ll 1$  [17]:

$$V_y = (-t)^{i\beta} \frac{\Gamma(-2i\beta)}{\Gamma(-i\beta)} + (-t)^{-i\beta} \frac{\Gamma(2i\beta)}{\Gamma(i\beta)}, \quad (29)$$

$$V_x = \beta \left[ (-t)^{i\beta} \frac{\Gamma(-2i\beta)}{\Gamma(1-i\beta)} + (-t)^{-i\beta} \frac{\Gamma(2i\beta)}{\Gamma(1+i\beta)} \right],$$

где  $\Gamma$  - гамма-функция Эйлера. Легко убедиться в том, что формула (29) дает циркулярно поляризованные волны. Используя известные свойства гамма-функций, можно показать, что амплитуды этих волн равны:

$$|V_x + iV_y| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\beta}}}, \quad |V_x - iV_y| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi\beta}}}. \quad (30)$$

Таким образом, эффект трансформации в этом случае зависит от параметра  $\delta = \pi\beta = \frac{\pi}{2} k_0 L v \sqrt{U_0} \cos \theta$ , который при заданном градиенте внешнего магнитного поля ( $L^{-1}$ ) может принимать различные значения. При  $\delta \ll 1$  волна распространяется без изменения поляризации, а при  $\delta \gg 1$  ее поляризация меняется в соответствии с поляризацией нормальной волны (2).

Следует отметить, что рассмотренный случай переходного слоя во многом напоминает рассмотренный выше, так как и здесь существует область взаимодействия, разделяющая области применимости Г.О. Поэтому наиболее характерным переходным слоем между гиротропной плазмой и изотропной средой является тот, для которого интеграл  $\int_z (n_2 - n_1) dz$  имеет конечное значение. В этом случае вся информация об эффекте взаимодействия содержится в предельном значении коэффициента поляризации волны, выходящей из гиротропной плазмы. Некоторые модели такого рода переходных слоев были рассмотрены в [14]. Одним из них является слой, в котором  $H_0$  спадает по экспоненциальному закону. При этом коэффициенты системы уравнений (12) определяются формулами

$$A = A_0 e^{-2z/L}, \quad B = e^{-z/L}$$

и ее решение может быть записано через функции параболического цилиндра:

$$V_y = D_p(\xi), \quad p = i \frac{k_0 L}{4} \frac{B_0^2}{A_0} = \frac{i}{2} k_0 L v \operatorname{ctg}^2 \theta,$$

$$V_x = -\sqrt{p} D_{p-1}(\xi), \quad \xi = e^{-i\pi/4} \sqrt{k_0 L A_0} e^{-z/L} \quad (31)$$

В глубоких слоях плазмы ( $z \rightarrow -\infty$ ) при условии

$$|\xi| \gg 1, \quad |\xi| \gg |p|$$

$$V_y \sim \xi^p e^{-\xi^2/2}, \quad V_x \sim \sqrt{p} \xi^{p-1} e^{-\xi^2/2}$$

Так как  $\xi^2/2 = -ik_0 L A_0 e^{-2z/L} = -ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz$ ,

то решение (31) представляет волну типа (2) в области квазипоперечного распространения. При выходе в изотропную среду  $\xi \rightarrow 0$ , и предельное значение коэффициента поляризации будет равно:

$$K_2(p) = \frac{E_x}{E_y} \Big|_{\xi=0} = -\frac{D_p(0)}{\sqrt{p} D_{p-1}(0)} = -\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma(1 - \frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{p}{2})}. \quad (32)$$

Интенсивность взаимодействия определяется модулем коэффициента поляризации, значение которого легко получить из (32), используя известные свойства гамма-функций:

$$|K_2(p)|^2 = \operatorname{cth} \frac{\pi|p|}{2}. \quad (33)$$

При  $|p| \gg 1$   $|K_2(p)| \approx 1$ , что соответствует слабому взаимодействию нормальных волн в плазме. Поляризация выходящей из плазменного слоя волны определяется поляризацией исходной нормальной волны, выходящей в вакуум. В другом предельном случае  $|p| \ll 1$  волна распространяется без изменения поляризации. Взаимодействие волн в переходном слое определяется, таким образом, одним параметром  $p$  (см. (31)), который по порядку величины равен разности набегов фаз нормальных волн в области квазипересечения. В рассматриваемом случае длина взаимодействия будет равна масштабу всего переходного слоя  $L_{эф} \sim L$ . В таких случаях, как известно, характер взаимодействия сильно зависит от модели переходного слоя.

Рассмотрим теперь более сложную ситуацию, когда наряду с областью квазипересечения, где происходит перестройка дисперсионных кривых, на действительной оси существует точка их пересечения. Это имеет место, например, для переходного слоя, в котором магнитное поле или концентрация электронов стремится к нулю и обращается в нуль при конечных  $z$  ( $z = z_1$ ) (см. рис. 5). Теперь область взаимодействия включает в себя квазипересечение ( $z \sim z_0$ ) и пересечение ( $z = z_1$ ), влияние которых на распространяющиеся волны можно рассматривать отдельно, если они расположены достаточно далеко друг от друга. При этом влияние области  $z \sim z_0$  ( $A \sim B$ ) такое же, как и в рассмотренных выше случаях. Взаимодействие в области пересечения  $z = z_1$  носит совершенно иной характер и может быть рассчитано на основе уравнений (7) для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн, поскольку в точке пересечения  $z = z_1$  параметр связи  $\psi$  регулярен. Для достаточно плавного слоя мы можем в некоторой окрестности точки  $z = z_1$  функцию  $n_2 - n_1$  аппроксимировать линейным законом, а параметр  $\psi$  считать постоянным:

$$n_2 - n_1 = \gamma (z_1 - z), \quad \psi = \psi(z_1). \quad (34)$$

Тогда уравнения (7) могут быть решены точно в функциях параболического цилиндра:

$$u_1 = D_p(\xi), \quad \rho = i \frac{\psi^2}{k_0 \gamma}, \quad (35)$$

$$u_2 = \sqrt{|\rho|} D_{p-1}(\xi), \quad \xi = e^{-i\pi/4} \sqrt{k_0 \gamma} z.$$

Параметром взаимодействия в этом случае является величина  $|\rho| = \psi^2 / k_0 \gamma$ . При  $\rho = 0$  нормальные волны не взаимодействуют, а при малых  $\rho$  одна нормальная волна рождает волну другого типа с амплитудой  $\sim \sqrt{|\rho|} = \psi / \sqrt{k_0 \gamma}$ , что соответствует результату работы [18], где были исследованы такого рода пересечения методом возмущений. Этот параметр, также как



и для рассмотренных выше моделей переходного слоя, определяется разностью набегов фаз нормальных волн на эффективной длине взаимодействия. Последнюю можно оценить из естественного условия  $k_0 (n_2 - n_1) =$   
 $= k_0 \gamma L_{\text{эф}} \sim \Psi$ ;  $L_{\text{эф}} \sim \Psi / k_0 \gamma$  и пара-  
 метр взаимодействия будет равен:

$$k_0 \int_0^{L_{\text{эф}}} (n_2 - n_1) dz = \frac{\Psi^2}{k_0 \gamma} \quad (36)$$

Характерной особенностью рассмотренного пересечения является зависимость  $L_{\text{эф}}$  от длины волны, что связано с использованием уравнений (7). В этих уравнениях связь нормальных волн определяется коэффициентом  $\Psi$ , который не содержит параметра  $k_0$ .

В заключение подчеркнем, что в зависимости от характера задачи следует использовать ту или иную систему связанных уравнений (7) или (12). Уравнения (7) удобно использовать в тех случаях, когда коэффициент связи  $\Psi$  изменяется плавно. Это имеет место, например, для переходного слоя (34), слоя Баддена  $n_2 - n_1 \sim e^{-z/L}$ ,  $\Psi = \text{const}$  [10] и неоднородного слоя плазмы с широким магнитного поля [19, 20], то-есть в тех случаях, когда область сближения дисперсионных кривых характеризуется отсутствием поляризационного вырождения. Напротив, система (12) приспособлена для расчета эффекта взаимодействия в области с поляризационным вырождением ( $n_1 \approx n_2$ ,  $K_1 \approx K_2$ ).

### 3. О качественной теории линейного взаимодействия.

В работах [10, 11] на основе уравнений типа (7) были сформулированы некоторые общие положения, определяющие характер линейного взаимодействия нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме в той области, где дисперсионные кривые  $n_{1,2}(z)$  сближаются. Эти положения основываются на том, что уравнения (7) в двух случаях имеют простые решения. Так, при  $\Psi = 0$  амплитуды нормальных волн изменяются по закону

$$u_{1,2}(z) = \exp\left\{\pm ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz\right\} \quad (37)$$

в соответствии с приближением Г.О. для независимых нормальных волн. В другом случае, когда  $n_2 - n_1 \equiv 0$  решение (7) имеет вид:

$$u_1(z) = C_1 e^{i \int \psi dz} + C_2 e^{-i \int \psi dz}, \quad (38)$$

$$u_2(z) = -i C_1 e^{i \int \psi dz} + i C_2 e^{-i \int \psi dz}$$

и описывает волну с постоянной поляризацией [10]. Отсюда был сделан вывод о том, что в области I, где  $|k_0(n_2 - n_1)| \gg |\psi|$ , применимо приближение Г.О. - среда локально однородна. Если же  $|k_0(n_2 - n_1)| \ll |\psi|$  (область II), решение имеет вид (38) - среда локально изотропна. Таким образом, при распространении волны из области I в область II, например, при выходе излучения из гиротропной среды в изотропную, изменение поляризации прекращается на уровне  $|k_0(n_2 - n_1)| \sim |\psi|$  (уровень предельной поляризации).

Коэном [11] был введен параметр взаимодействия

$$Q = k_0 (n_2 - n_1) \psi^{-1}, \quad (39)$$

так что при  $Q \gg 1$  нормальные волны слабо взаимодействуют и поляризация изменяется также как и в локально однородной среде (эффект Фарадея), а при  $Q \ll 1$  имеет место сильное взаимодействие, в результате которого поляризация излучения не изменяется.

Проведенный в настоящей статье анализ эффекта линейного взаимодействия для различного типа переходных слоев позволяет оценить пределы применимости качественного анализа уравнений взаимодействия. Прежде всего следует указать на то, что условие  $Q \gg 1$  представляет собой одно из условий применимости приближения Г.О. [1], и в той области, где оно выполнено (наряду с другими условиями), нормальные волны слабо взаимодействуют. Однако выполнение противоположного неравенства не означает, что решение имеет вид (38). Более того, во многих случаях решение в области  $Q \ll 1$ , во-

обще говоря, не может быть представлено в виде (38). Это видно, например, из решения для переходного слоя типа (34). Однако можно найти такие модели переходного слоя, например, слой Баддена [10], для которого в области  $z > z_p$ , по своим свойствам близкой к изотропной среде, решение имеет вид (38) при условии  $k_0 \int_{z_p} (n_2 - n_1) dz \ll 1$  [14]. Решения уравнений взаимодействия для этого слоя, а также для других типов переходных слоев (см. выше) показывают, что уровень предельной поляризации грубо определяется из условия  $k_0 \int_z (n_2 - n_1) dz \sim 1$ : выход волны с этого уровня в изотропную среду характеризуется малым эффектом Фарадея. При этом оказывается, что уровень  $|\psi| \sim |k_0 (n_2 - n_1)|$  не является выделенным.

Определение параметра взаимодействия сильно зависит от аналитических свойств переходного слоя. Так, если функция  $n_2(z) - n_1(z)$  имеет комплексные нули, близко расположенные от действительной оси  $z$  (в этих точках совпадают коэффициенты поляризации нормальных волн  $K_1 = K_2$ ), то параметр взаимодействия определяется стандартным образом, как разность набегов фазы нормальных волн на эффективной длине взаимодействия. Последняя по порядку величины равна расстоянию между ближайшими нулями функции  $n_2 - n_1$ . Такое определение совпадает со значением параметра Коэна (39), взятого в точке квазипересечения, так как в этих случаях  $L_{\text{эф}} \sim \psi^{-1}$ . Однако для других типов пересечений, таких как  $n_2 - n_1 = z/L$ ,  $\psi = \text{const}$ , или  $n_2 - n_1 \sim e^{iz/L}$ ,  $\psi = \text{const}$ , параметр взаимодействия не может быть оценен из формулы Коэна (39). В этих случаях (когда нет поляризационного вырождения) по порядку величины он равен

$$\delta \sim k_0 \int_0^{L_{\text{эф}}} (n_2 - n_1) dz,$$

где  $L_{\text{эф}}$  определяется условием  $k_0 (n_2 - n_1) \sim \psi$ , так как взаимодействие волн происходит в тех слоях плазмы, в которых коэффициент связи  $\psi$  превышает

разность "термов"  $k_0(n_2 - n_1)$

Таким образом, качественная теория линейного взаимодействия волн, предложенная в работах [10, 11], не является универсальной, некоторые ее положения, такие как определение параметра взаимодействия, годятся лишь для определенного типа квазипересечения дисперсионных кривых, а условия формирования предельной формы решения и предельной поляризации волны на границе с изотропной средой оказываются неверными.

Автор признателен П.П.Докучаеву, В.В. Тамойкину и Н.С. Беллюстину за обсуждение вопросов, затронутых в статье.

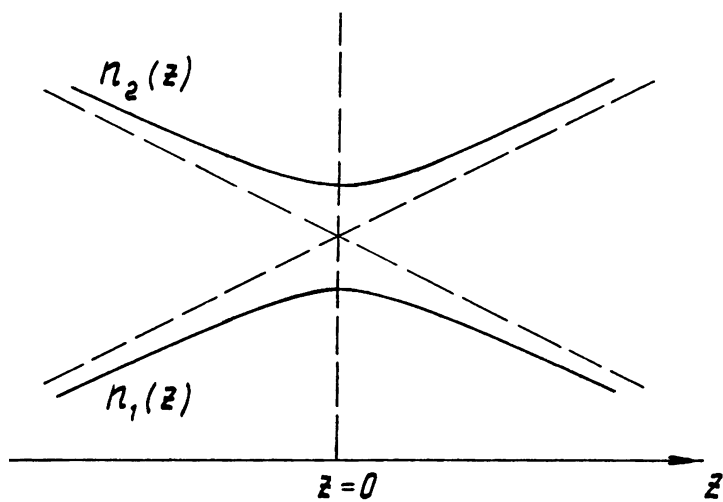


Рис. 1

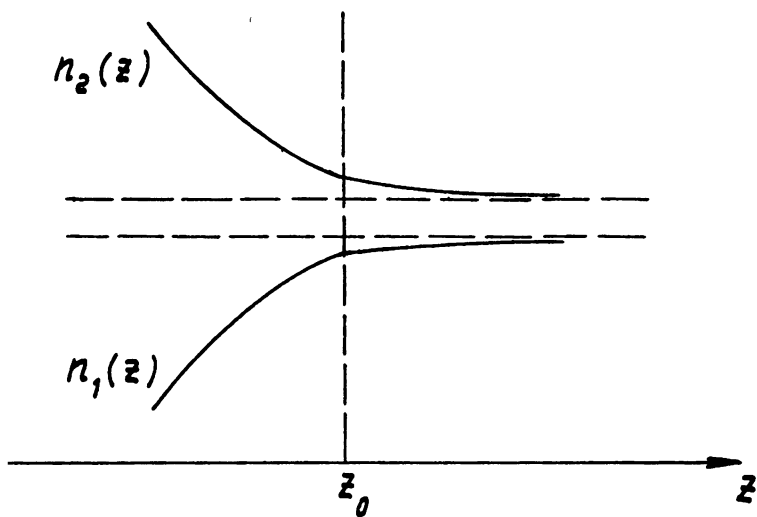


Рис. 2

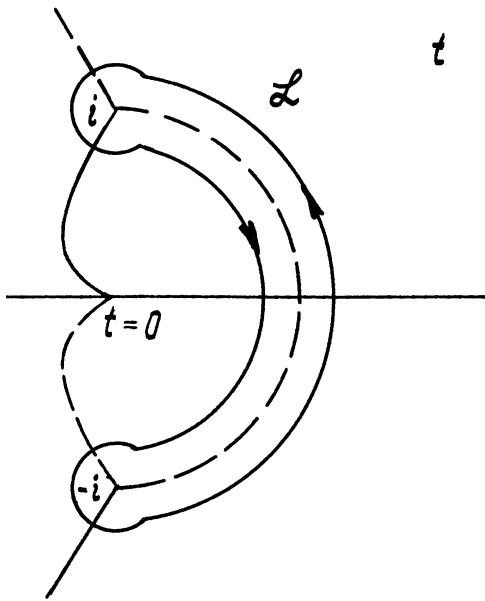


Рис. 3

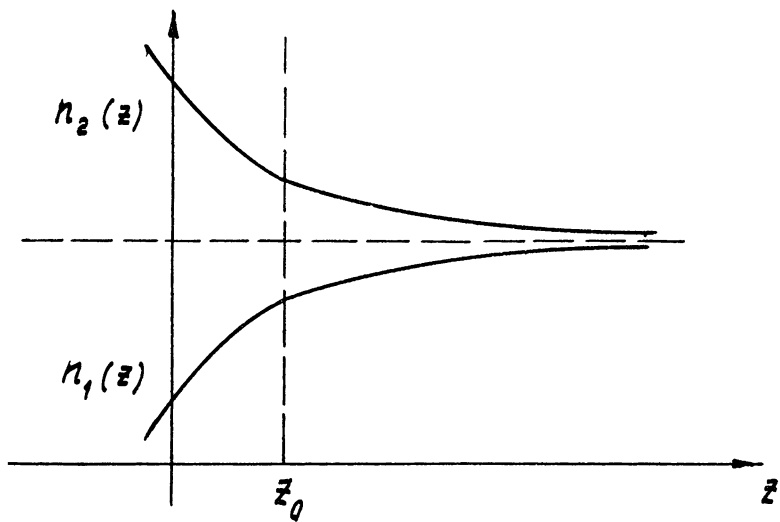


Рис. 4



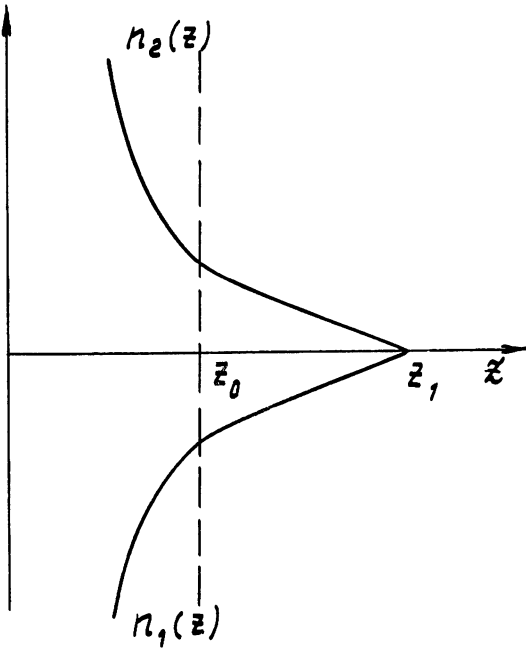


Рис. 5

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В.Л.Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме, М., "Наука", 1967.
2. Н.С.Ерохин, С.С. Моисеев. Вопросы теории плазмы, Вып. 7, 1973.
3. K.G.Budden. Radio waves in the ionosphere, Cambridge, 1961.
4. С.С.Моисеев, В.Р.Смилянский. Магнитная гидродинамика, 2, 23 (1965).
5. Н.С.Беллюстин. Изв. высш. уч. зав. - Радиофизика, 21, № 4 (1978).
6. Ю.А.Кравцов, О.Н. Найда. ЖЭТФ, 71, 237 (1976).
7. Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Физматгиз, 1964.
8. E.C.Stückelberg. Helv.Phys.Acta, 5, 369 (1932).
9. Е.Е.Никитин. Теория элементарных атомно-молекулярных процессов в газах. Изд. Химия, М., 1970.
10. K.G.Budden. Proc.Roy.Soc., A215, 215 (1952).
11. M.H.Gohen. Astrophys.Journ., 131, 664 (1960).
12. J.E.Titheridge. J.Atm.Terr.Phys., 33, 1533, 1541(1971).
13. В.В.Железняков. Электромагнитные волны в космической плазме. Наука, М., 1977.

14. Н.Г.Денисов. Изв. высш. уч.зав. - Радиофизика, 21, № 7 (1978).
15. M.A.Simpson. Austr.Journ.Phys., 29, 343 (1976).
16. Н.С.Беллюстин. Изв. высш. уч.зав. - Радиофизика (в печати).
17. Э.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа, Физматгиз, М., 1963.
18. Н.Г.Денисов. Изв. высш. уч. зав. - Радиофизика, 20, 316 (1977).
19. I.Fidone, G.Granata. Nuclear fusion, II, 133 (1971).
20. Е.В.Суворов. Изв. высш.уч. зав. - Радиофизика, 15, 1320 (1972).