Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 119

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Б.С.Абрамович,

С.Н. Гурбатов,

Ю.А. Рыжов

г. Горький – 1978

1. Введение

Проблема многократного рассеяния волн в одномерных неупорядоченных системах вызывает интерес прежде всего возможностью получения ряда точных результатов. На примере одномерной структуры можно разобраться в деталях влияния многократного рассеяния на процесс распространения волн в рассеивающем слое и получить информацию, которая оказывается полезной при анализе более сложных моделей рассеивающих сред. Случай одномерных неоднородностей представляет и самостоятельный интерес, поскольку реализуется во многих физических ситуациях. В частности, является актуальной проблема описания энергетического спектра квантовых систем с примесями, электронный спектр которых близок к одномерному, исследование кинетики квантовой частицы в одномерном случайном потенциале и т.п. [1 – 3] .

Стохастическое волновое уравнение изучалось многими авторами. При этом нетривиальные результаты были получены при изучении статистических свойств коэффициента отражения от слоя [4 – 6] и распределения среднего поля и средней интенсивности поля внутри неоднородного слоя для двух моделей рассеивающей среды – дискретной [4] и непрерывной [6]. В первой модели среда предполагается состоящей из дискретных неоднородностей, каждая из которых может равномерно принимать все положения на отрезке, длина которого кратна длине волны. Такая модель рассматривалась в [4] , где показано, что при неограниченном "усилении" неоднородностей распределение среднего квадрата поля стремится к удвоенной интенсивности падающей волны в половине слоя, обращенной к падающей волне, и к нулю – в другой половине" – ступенчатое распределение. К аналогичному результату приходит и автор работы [7] где рассмотрение проводится для модели непрерывной среды в диффузионном приближении.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению статистических свойств поля в одномерной сплошной случайно неоднородной среде. Рассматриваются две постановки задачи: о прохождении плоской гармонической волны через рассеивающий слой и о падении волны на неоднородный слой, ограниченный идеально отражающей поверхностью (зеркалом). Для решения поставленных задач выводятся укороченные стохастические уравнения для медленно меняющихся на интервале порядка длины волны энергетических и фазовых характеристик поля внутри слоя.

Показано, что в задаче о прохождении волны через слой энергетические характеристики волны, в частности, интенсивность, не являются марковским процессом, что не позволяет непосредственно применить аппарат уравнения ЭФПК [8, 9]. Однако, используя двухточечное вероятностное распределение локального коэффициента отражения, удается найти функцию распределения интенсивности, с помощью которой вычисляется распределение среднего квадрата поля в слое. Приводится асимптотическое разложение средней интенсивности в оптически толстой рассеивающей среде, откуда следует, что при увеличении оптической толщины слоя распределение среднего квадрата поля стремится не к ступенчатому, а к все более плавному.

При рассмотрении задачи об отражении плоской волны от слоя с зеркалом на границе укороченные уравнения позволяют весьма детально исследовать статистические характеристики поля внутри слоя. Показано, что при идеальном отражении от задней границы слоя интенсивность I, усредненная по периоду высокочастотных осцилляций поля, является марковским процессом, имеющим логарифмически-нормальную плотность вероятности. При этом средняя интенсивность не меняется вдоль слоя и равна I_0 – удвоенной интенсивности падающей волны, в то время как само вероятностное распределение по мере проникновения волны в слой локализуется в области малых интенсивностей $I << I_0$. Однако, несмотря на то, что вероятность появления больших интенсивностей мала, из-за медленного спадания функции плотности вероятности при $I >> I_0$ возможен эффект значительного усиления поля в нерегулярном слое. В частности, именно наличие отдельных реализаций с $I >> I_0$ приводит к постоянству среднего квадрата поля, к сильным флуктуациям интенсивности и полной энергии, сосредоточенной в рассеивающей среде. В то же время показано, что относительное число реализаций, в которых возможен эффект усиления поля, т.е. превышение случайной интенсивностью заданного уровня $I^* > I_0$ даже в бесконечном слое равно $I_0 / I^* < 1$ и уменьшается с ростом порога I^*.

2. Вывод основных соотношений

Пусть плоская гармоническая волна единичной амплитуды $E_0 = e^{ikz}$, $k = \omega / c$ падает справа на слой $(0, L)$ с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z) = 1 - \Delta\varepsilon(z)$. Предположим, что случайная компонента диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon(z)$ является нормальным случайным процессом с нулевым средним значением и функцией корреляции $\langle \Delta\varepsilon(z) \Delta\varepsilon(z') \rangle = \sigma_\varepsilon^2 \, \ell \, \delta(z - z')$ (ℓ – характерный размер неоднородностей, $\delta(z)$ – дельта-функция), а диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна единице.

Внутри слоя для поля $E_x = E$ волны имеем стохастическое волновое уравнение

$$E''_\xi + [1 - \Delta\varepsilon(\xi)] E = 0, \tag{1}$$

где введена безразмерная координата $\xi = kz$. Решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$E = P(\xi) e^{i\xi} + Q(\xi) e^{-i\xi}. \tag{2}$$

Легко убедиться, что (2) является решением уравнения (1), если функции $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений первого порядка:

$$P'_\xi = -\frac{i}{2}\Delta\varepsilon\left(P + Qe^{-2i\xi}\right), \qquad (3)$$
$$Q'_\xi = \frac{i}{2}\Delta\varepsilon\left(Q + Pe^{2i\xi}\right).$$

Граничные условия для функций $P(\xi)$ и $Q(\xi)$, вытекающие из требования непрерывности поля и его производной на границах нерегулярного слоя, имеют вид:

$$P(kL) = 1, \quad Q(0) = \lambda P(0), \qquad (4)$$

где $\lambda = 0$ в задаче о прохождении волны и $\lambda = 1$, если в плоскости $z = 0$ находится идеально отражающая поверхность – зеркало.

Введем в рассмотрение новые переменные:

$$I = |P|^2 + |Q|^2, \quad S = 2|PQ|, \quad \varphi = \arg(QP^{-1}),$$

для которых из (3) получаем:

$$I'_\xi = \Delta\varepsilon S \sin\psi, \qquad (5)$$

$$S'_\xi = \Delta\varepsilon I \sin\psi, \qquad (6)$$

$$\varphi'_\xi = \Delta\varepsilon\left(1 + IS^{-1}\cos\psi\right), \qquad (7)$$

где $\psi = \varphi - 2\xi$. В этих переменных для квадрата модуля электрического поля в среде справедливо следующее выражение:

$$|E|^2 = I + S\cos\psi,$$

откуда виден физический смысл величин $I(\xi)$ и $S(\xi)$: I есть суммарная интенсивность встречных волн, а член $S\cos\psi$ описывает их интерференцию+).

Очевидно, что уравнения (3) с условиями (4) и вытекающие из них уравнения (5)-(7) образуют краевую задачу, не обладающую причинностью, и поэтому для вероятностного анализа процессов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$, а вслед за ними и $I(\xi)$, $S(\xi)$, $\varphi(\xi)$, на основе диффузионного уравнения необходимо сформулировать соответствующую уравнениям (3) и (5)-(7) одноточечную задачу. В силу линейности уравнений (3) и уравнений (5), (6) последнее тривиально и делается следующим образом: введем функции $\tilde{P}(\xi) = P(\xi)/P(0)$, $\tilde{Q}(\xi) = Q(\xi)/P(0)$ и, соответственно, $\tilde{I}(\xi) = I(\xi)/|P(0)|^2$, $\tilde{S}(\xi) = S(\xi)/|P(0)|^2$. Легко видеть, что $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ удовлетворяют уравнениям (3), а $\tilde{I}$ и $\tilde{S}$ удовлетворяют уравнениям (5), (6) не меняя уравнения (7) для $\varphi(\xi)$. При этом граничные условия задаются в одной точке $\xi = 0$++):

$$\tilde{P}(0) = 1, \quad \tilde{Q}(0) = \lambda \tag{8}$$

и

$$\tilde{I}(0) = 1 + \lambda^2, \quad \tilde{S}(0) = 2|\lambda|, \quad \varphi(0) = \arg\lambda. \tag{9}$$

Последнее обеспечивает причинность при изменении вели -

+) Заметим, что интерпретация величин P и Q, как комплексных амплитуд встречных волн в неоднородной среде, носит весьма условный характер.

++) В случае, когда среды в среднем "согласованы ($\lambda = 0$) $\varphi(0) = \arg\lambda = \pi/2$, что следует из принципа предельного поглощения.

чин $\tilde{P}(\xi)$, $\tilde{Q}(\xi)$, $\tilde{I}(\xi)$, $\tilde{S}(\xi)$, $\varphi(\xi)$, что позволяет стандартными методами диффузионного приближения исследовать статистические свойства этих процессов.

Легко видеть, что при относительно небольших флуктуациях диэлектрической проницаемости $\sigma_\varepsilon << 1$ комплексные амплитуды P, $\tilde{P}$ и Q, $\tilde{Q}$, а вслед за ними и функции I, $\tilde{I}$, S, $\tilde{S}$ и $\varphi(\xi)$ медленно изменяются на интервале $\Delta\xi \sim 1$ (т.е. при изменении координаты z на величину порядка длины волны). С другой стороны, функции $\exp(\pm 2i\xi)$ и $\Delta\varepsilon(\xi)$ являются быстропеременными. Поэтому естественно перейти от уравнений (5)-(7) к укороченным уравнениям, усредненным за период функций $\exp(\pm 2i\xi)$ (см., например, [9]). Для получения укороченных уравнений нужно предварительно вычислить средние значения и корреляционные функции случайных процессов, входящих в правые части уравнений (5)-(7). Обозначим

$$\mu(\xi) = \Delta\varepsilon(\xi) \sin\psi(\xi).$$

Если бы в этом выражении фаза $\varphi(\xi)$ была фиксированной величиной, то среднее значение $\langle\mu\rangle$ и корреляционная функция $B_\mu = \langle\mu(\xi)\mu(\xi')\rangle$ находились бы просто. Однако из уравнения (7) видно, что фаза $\varphi(\xi)$ получается в результате интегрирования белого шума $\Delta\varepsilon(\xi)$ и, следовательно, коррелированна с ним.

Рассмотрим достаточно малый интервал $\eta > 0$, на котором функции $\tilde{I}(\xi)$, $\tilde{S}(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ не успевают заметно измениться. Ограничиваясь учетом первых членов разложения в ряд по $\Delta\varphi(\eta) = \varphi(\xi) - \varphi(\xi - \eta)$ и учитывая статистическую независимость величин $\tilde{I}(\xi-\eta)$, $\tilde{S}(\xi-\eta)$ и $\varphi(\xi-\eta)$ от значений $\Delta\varepsilon(\xi)$, получаем:

$$\langle\mu(\xi)\rangle = \langle\Delta\varepsilon(\xi)\Delta\varphi(\eta)\rangle \cos\psi(\xi).$$

Для вычисления $\langle\Delta\varepsilon(\xi)\Delta\varphi(\eta)\rangle$ воспользуемся уравнением (7), проинтегрировав его на интервале $[\xi-\eta, \xi]$.

Используя δ -коррелированность процесса $\Delta\varepsilon(\xi)$ и отбрасывая в полученных выражениях осциллирующие члены, окончательно получаем:

$$\langle\mu(\xi)\rangle = \frac{\varkappa}{k}\,\frac{\tilde{I}}{\tilde{S}} = \frac{\varkappa}{k}\,\frac{I}{S} \qquad (10)$$

Здесь $\varkappa = \frac{1}{4}\sigma_\varepsilon^2 k^2 \ell$ – коэффициент диффузии для слоя с мелкомасштабными неоднородностями, $k\ell \ll 1$ +).
Введем центрированную случайную функцию:

$$\zeta(\tau_z) = \varkappa^{-1}\left[\mu(\tau_z) - \langle\mu(\tau_z)\rangle\right].$$

где $\tau_z = \varkappa z$ – оптическая толщина. Очевидно, что $\langle\zeta(\tau_z)\rangle = 0$, а функция корреляции $B_\zeta = 2\delta(\tau_z - \tau'_z)$.

Подставляя полученные выражения в формулы (5) и (6), приходим к следующей системе стохастических уравнений для медленно меняющихся функций $\tilde{I}(\tau_z)$, $\tilde{S}(\tau_z)$, а, следовательно, и для $I(\tau_z)$, $S(\tau_z)$:

$$I'_{\tau_z} = I + S\zeta(\tau_z), \qquad (11)$$

$$S'_{\tau_z} = I\left[I S^{-1} + \zeta(\tau_z)\right]. \qquad (12)$$

Аналогичным образом из (7) получаем:

$$\varphi'_{\tau_z} = \left(2 + I^2 S^{-2}\right)^{1/2}\tilde{\zeta}(\tau_z), \qquad (13)$$

+) При произвольном соотношении между длиной волны k^{-1} и масштабом неоднородностей ℓ коэффициент диффузии равен $\varkappa = 1/4\, k^2 \Phi_\varepsilon(2k)$, где Φ_ε – спектр пространственных неоднородностей $\Delta\varepsilon(z)$. Появление спектра на удвоенной пространственной гармонике физически связано с известным условием Брэгга для дифракции на пространственных структурах.

где $\langle \tilde{\zeta}(\tau_z) \rangle = 0$, $B_{\tilde{\zeta}} = 2\delta(\tau_z - \tau'_z)$, $\langle \tilde{\zeta}(\tau_z)\zeta(\tau'_z) \rangle = 0$.

Легко видеть, что уравнения (11), (12) имеют интеграл:

$$I^2 - S^2 = \mathrm{const}, \tag{14}$$

соответствующий сохранению потока мощности в диэлектрике без потерь.

Величина $U = \frac{c}{8\pi} I$ представляет собой усредненную по высокочастотным осцилляциям плотность энергии волны в слое. Ниже исследуются статистические свойства процесса $I(\tau_z)$ для задачи о прохождении волны через слой с неотражающей задней границей и о падении волны на слой с полным отражением на дальней границе.

3. Прохождение волны через неоднородный слой

В задаче о прохождении волны через рассеивающий слой граничными условиями для $I(\tau_z)$, $S(\tau_z)$, удовлетворяющими уравнениям (11), (12), являются, как следует из (4) и (14), следующие соотношения:

$$S(0) = 0\,, \quad I(\tau_L) = 1 + \frac{S^2(\tau_L)}{4}\,, \tag{15}$$

в то время как для $\tilde{I}(\tau_z)$, $\tilde{S}(\tau_z)$, удовлетворяющих той же системе уравнений (11), (12), мы имеем одноточечную задачу (9). Таким образом, используя двухточечное вероятностное распределение двумерного марковского процесса $(\tilde{I}, \tilde{S})$ можно определить вероятностные характеристики I и S . Эквивалентным образом к одноточечной задаче можно перейти непосредственно от уравнений (11), (12) для I и S с двухточечными условиями (15). Для этого введем еще процесс $v(\tau_z)$ +):

+) Заметим, что величина $\rho = \mathrm{th}\, v/2$ есть модуль локального коэффициента отражения в слое $\rho = |Q|/|P|$ [10].

$$v = \operatorname{Arcth}\left(I S^{-1}\right), \qquad (16)$$

для которого из (11), (12) следует:

$$v'_{\tau_z} = \operatorname{cth} v + \zeta(\tau_z), \quad v(0) = 0. \qquad (17)$$

Уравнение (17) является дифференциальным уравнением первого порядка с граничным условием при $\tau_z = 0$ и, следовательно, статистические характеристики процесса $v(\tau_z)$ могут быть описаны в приближении диффузионного случайного процесса [8].

Используя соотношения (14)-(16), находим, что энергетические характеристики волны в слое определяются следующими выражениями:

$$I = \frac{\operatorname{ch} v(\tau_z)}{\operatorname{ch}^2 v(\tau_L)/2}, \quad S = \frac{\operatorname{sh} v(\tau_z)}{\operatorname{ch}^2 v(\tau_L)/2}. \qquad (18)$$

Таким образом, функция плотности вероятности процесса $I = I(\tau_z, \tau_L)$ и $S = S(\tau_z, \tau_L)$ определяется двухточечной функцией распределения марковского процесса $v(\tau_z)$.

Так как процес $v(\tau_z)$ – марковский, то для нахождения функции плотности вероятности $W_2(v_{\tau_z}, v_{\tau_L}; \tau_z, \tau_L)$ необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial v} \operatorname{cth} v \cdot W + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \qquad (19)$$

$$W(v; \bar{v}, \tau = 0) = \delta(v - \bar{v}), \quad |W(v; \bar{v}, \tau)| < \infty .$$

Уравнение (19) является уравнением ЭФПК для плотности вероятности перехода марковского процесса $v(\tau_z)$. При этом

$$W_2 = W(v_{\tau_z}; 0, \tau_z) W(v_{\tau_L}; v_{\tau_z}, \tau_L - \tau_z). \qquad (20)$$

Решение задачи Коши (19) представляется интегралом Мелера–Фока [13]

$$W(\vartheta;\bar{\vartheta},\tau)=\operatorname{sh}\vartheta\int_0^\infty dt\cdot t\cdot \operatorname{th}\pi t\cdot P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch}\vartheta)P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch}\bar{\vartheta})e^{-\tau(t^2+\frac{1}{4})}, \tag{21}$$

где $P_\nu(u)$ – функция Лежандра первого рода.

Подставляя (21) в (20) и производя усреднение в формуле (18), после соответствующих преобразований получаем выражение для распределения средней интенсивности в рассеивающем слое:

$$\langle I(\tau_z,\tau_L)\rangle=2\pi e^{\tau_z-\tau_L/4}\int_0^\infty dt\cdot t\,\frac{\operatorname{sh}\pi t}{\operatorname{ch}^2\pi t}\left(\cos 2\tau_z t+\frac{\sin 2\tau_z t}{2t}\right)e^{-\tau_L t^2}. \tag{22}$$

Этот результат иным способом был получен в работах [4], [7].

Проанализируем характер распределения средней интенсивности в оптически толстом слое $\tau_L \gg 1$. Прежде всего заметим, что интеграл (22) не имеет равномерной асимптотики при $\tau_L \to \infty$. Однако вблизи середины слоя, когда удовлетворяется неравенство $|1-2\tau_z/\tau_L| \ll 1$, из (22) можно получить при $\tau_L \gg 1$:

$$\langle I(\tau_z,\tau_L)\rangle = 1-\Phi(\Delta). \tag{23}$$

Здесь $\Delta = \frac{1}{2}\tau_L^{1/2}(1-2\tau_z/\tau_L)$, $\Phi(\Delta)$ – интеграл вероятности [13]. Из (23), в частности, следует:

$$\frac{\partial^n\langle I\rangle}{\partial\tau_z^n}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\tau_L^{-n/2}\,e^{-\Delta^2}H_{n-1}(\Delta),\quad n\geq 1,$$

где $H_n(\Delta)$ – полиномы Эрмита. Следовательно, при увеличении размеров рассеивающей среды распределение средней интенсивности становится все более плавным (см. рис. 1а). В связи с этим следует отметить, что вывод авторов работ [4, 7] о том, что в оптически толстом слое

($\tau_L >> 1$) реализуется "ступенчатое" распределение средней интенсивности, справедлив лишь в безразмерных координатах $\theta = \tau_z / \tau_L$. Реально же характерная ширина переходной области $\langle I(\tau_z, \tau_L) \rangle$ в середине слоя $\delta = (\partial \langle I \rangle / \partial \tau_z)^{-1}_{\Delta = 0}$ увеличивается пропорционально $\tau_L^{1/2}$.

Наконец, обратим внимание на одно интересное обстоятельство. Интерференционный член $S \cos \psi$ в формуле для $|E|^2$ при усреднении по ансамблю реализаций выпадает, так что $\langle |E|^2 \rangle = \langle I \rangle$. Соотношение $\langle S \cos \psi \rangle = 0$ связано с тем, что при отсутствии отражения на границах слоя ($S(0) = 0$) процессы S и ψ статистически независимы, а фаза $\varphi(\tau_z)$ имеет равномерное распределение. Последнее, в частности, приводит к качественному отличию рассеяния волны в среде без отражения на границе от рассмотренного в следующем разделе случая падения плоской волны на слой с полным отражением.

4. Флуктуации интенсивности в слое, ограниченном зеркалом

В случае, если в плоскости $z = 0$ находится идеально отражающая поверхность, разность потоков падающей и отраженной волн равна нулю, следовательно, $I = S$ и из (11), (12) получаем следующее уравнение для стохастической интенсивности:

$$I'_\tau = [-1 + \zeta(\tau)] I. \tag{24}$$

Здесь мы перешли к новой переменной $\tau = \tau_L - \tau_z$, соответствующей отсчету от "входа" в неоднородную среду. Уравнение (24) следует решать с граничным условием:

$$I(0) = I_0, \tag{25}$$

где I_0 – удвоенная интенсивность падающей волны.

Поскольку уравнение (24) является дифференциальным уравнением первого порядка по τ с начальным условием (25) при $\tau = 0$, то процесс $I(\tau)$ является марковским. Подчеркнем, что последнее утверждение справедливо лишь для медленной компоненты полной интенсивности волны, распространяющейся в слое со случайными неоднородностями при идеальном отражении от задней границы. Следует при этом отметить, что статистика интенсивности $I(\tau)$ не зависит от полной толщины слоя τ_L, а определяется лишь расстоянием τ от "входа" в случайно неоднородную среду.

Учитывая статистические свойства процесса $\zeta(\tau)$ из (24) и (25) легко получить, что $I(\tau)$ имеет логарифмически-нормальное распределение:

$$W(I,\tau) = \frac{I^{-1}}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{I}{I_0}+\tau\right)^2}{4\tau}\right\}. \tag{26}$$

Используя вероятностное распределение (26), легко найти среднюю интенсивность в слое $\langle I(\tau)\rangle$ и величину относительных флуктуаций интенсивности $\gamma_I(\tau) = -\left[\langle (I-\langle I\rangle)^2\rangle\right]^{1/2}/\langle I\rangle$:

$$\langle I(\tau)\rangle = I_0 \quad , \gamma_I(\tau) = \left(e^{2\tau}-1\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Таким образом, средняя интенсивность волны в слое постоянна, а флуктуации интенсивности неограниченно возрастают по мере увеличения τ – расстояния от входа в случайно неоднородную среду. В то же время из (26) следует, что с увеличением τ максимум распределения $W(I,\tau)$ смещается в сторону меньших интенсивностей $I_m = I_0 \exp(-3\tau)$, причем при $\tau \gg 1$ практически все распределение $W(I,\tau)$ сосредоточено в области малых интенсивностей $I \ll I_0$ (см. рис. 2).

Сохранение средней интенсивности в слое, несмотря на то, что при $\tau >> 1$ вероятностное распределение сосредоточено вблизи нулевой интенсивности, обусловлено достаточно медленным спаданием функции распределения $W(I, \tau)$ при $I \to \infty$. Последнее соответствует тому, что в редких реализациях квадрат поля волны $|E|^2$ может принимать большие значения, в том числе возможны реализации, в которых $I(\tau) >> I_0$. Наличие подобных реализаций процесса приводит к сильным флуктуациям плотности энергии волны $\bar{I}^L = \tau_L^{-1} \int_0^{\tau_L} I(\tau)\, d\tau$ в оптически толстом слое:

$$\gamma_{\bar{I}^L} = 2^{-1/2} \tau_L^{-1} \left(e^{2\tau_L} - 1 - 2\tau_L - 2\tau_L^2\right)^{1/2}.$$

Таким образом, можно сделать следующий вывод; при распространении волны в случайно неоднородном слое, ограниченном зеркалом, в отдельных, достаточно редких реализациях может сосредоточиваться значительная энергия, существенно превышая величину $I_0 L$ – энергию волны в регулярном слое.

Важной характеристикой флуктуаций интенсивности $I(\tau)$ является вероятностное распределение $\tilde{w}(\tau; I^*, I_0)$ оптического пути τ, на котором интенсивность достигает заданного уровня $I(\tau) = I^*$. При этом более удобно рассматривать эквивалентную задачу о достижении логарифмом нормированной интенсивности $q = \ln I/I_0$ соответствующего значения. $q^* = \ln I^*/I_0$.

Поскольку марковский процесс $q(\tau)$ описывается уравнением

$$q'_\tau = -1 + \xi(\tau), \quad q(0) = q_0 = 0, \tag{28}$$

то плотность вероятности $w(\tau, q^*)$ "времени" τ первого достижения границы $q = q^*$ удовлетворяет уравнению [9]:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial w}{\partial q_0} - w\right) \tag{29}$$

с начальными и граничными условиями:

$$w(\tau, q^*)_{q_0 = q^*} = \delta(\tau), \quad w(0, q^*) = 0, \tag{30}$$

$$w(\tau, q^* < 0)_{q_0 = \infty} = w(\tau, q^* > 0)_{q_0 = -\infty} = 0.$$

Решение уравнения (29), удовлетворяющее условиям (30), имеет вид:

$$w(\tau, q^*) = \frac{|q^*|}{2\sqrt{\pi}} \tau^{-3/2} \exp\left\{-\frac{(q^* + \tau)^2}{4\tau}\right\}. \tag{31}$$

Вероятность достижения процессом $I(\tau)$ уровня $I = I^*$ в слое оптической толщины τ определяется функцией $\psi_\tau(q^*) = \int_0^\tau d\tau' w(\tau', q^*)$, график которой приведен на рис. 3. При этом для бесконечного слоя из (31) получаем

$$\psi_\infty = \begin{cases} 1, & I^* < I_0, \\ I_0/I^*, & I^* > I_0. \end{cases} \tag{32}$$

Из (32) следует, что в бесконечном слое все реализации интенсивности пересекают уровень $I^* < I_0$, в то время как уровня $I^* > I_0$ достигает лишь часть реализаций, тем меньшая, чем больше отношение I_0/I^*.

Для среднего "времени" $T = \psi_\infty^{-1} \int_0^\infty d\tau' \tau' w(\tau', q^*)$ достижения значения $I(\tau) = I^*$ в бесконечном слое, используя (31), получаем:

$$T = \left| \ln \frac{I_0}{I^*} \right|. \tag{33}$$

Заметим, что в случае $I_0 < I^*$, когда в силу (32) $\psi_\infty < 1$, формула (33) описывает условное среднее "время" достижения интенсивности I^* в классе реализаций, пересекающих данный уровень.

Полученные результаты несложно обобщить, учитывая интерференционный член в выражении для $|E|^2$:

$$|E|^2 = I\,(1+\cos\psi). \tag{34}$$

В частности, из (34) следует (см. рис. 1б):

$$\langle|E|^2\rangle = I_0\left(1-\cos 2kz\, e^{-3\varkappa z}\right). \tag{35}$$

При получении (35) использовалась статистическая независимость марковских процессов $I(\tau)$ и $\psi(\tau_z)$, а также вытекающее из уравнения (13) при $I = S$ нормальное вероятностное распределение фазы $\varphi(\tau_z)$. Естественно, усредняя (35) по периоду высокочастотных осцилляций k^{-1}, мы получаем формулу (27). Заметим, что при $\tau_z >> 1$ неусредненный на масштабе k^{-1} средний квадрат поля $\langle|E|^2\rangle \approx I_0$. Последнее связано с тем, что многократное рассеяние встречных волн $p(\tau_z)$ и $Q(\tau_z)$ приводит к их фазовому рассогласованию и, следовательно, к отсутствию интерференции.

5. Заключение

В настоящей работе в диффузионном приближении исследовалось распространение плоской электромагнитной волны в диэлектрике с одномерными случайными неоднородностями. Рассмотрение проводилось на основе укороченных уравнений для усредненных по периоду высокочастотных осцилляций поля энергетических и фазовых характеристик волны. Однако, те же результаты могут быть получены, если развивать статистическое описание исходя из точных (неусредненных на масштабе k^{-1}) уравнений, и лишь в полученных выражениях, в частности, в уравнении ЭФПК проводить высокочастотное усреднение [10].

Рассмотрение двух постановок задачи о распространении волны в нерегулярном слое - отсутствие отражения на границе слоя и полное отражение волны на дальней границе (слой с зеркалом на конце) - связано с принципиальной разницей характера многократного рассеяния волны в этих случаях, так как при многократном рассеянии фазовые соотношение играют определяющую роль. Последнее проявляется в том, что идеальное отражение на границе рассеивающей среды приводит к синхронизации фаз встречных волн вблизи отражающей поверхности и к отсутствию потока мощности в среде. Вследствие этого средняя интенсивность волны не меняется вдоль слоя, и вблизи отражающей границы возникает устойчивая в среднем интерференционная картина (35).

Отсутствие же регулярного отражения на границе слоя приводит к равномерному распределению локальной разности фаз встречных волн и к появлению потока мощности в среде. Это обстоятельство существенно сказывается на распределении средней интенсивности волны в рассеивающем слое (см. рис. 1) и приводит к отсутствию в среднем интерференции встречных волн, т.е. $\langle |E|^2 \rangle = \langle I \rangle$.

Проведенное рассмотрение может быть обобщено учетом малой диссипации в слое. При этом добавляется еще одно укороченное уравнение, описывающее эволюцию потока мощности в неоднородном диэлектрике с потерями. Аналитические результаты, помимо стационарного распределения коэффициента отражения [11, 12] , получить довольно трудно, поскольку решение соответствующей уравнению ЭФПК краевой задачи выражается через мало изученные сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции [10] .

Авторы признательны Н.Г. Денисову за стимулирующие дискуссии.

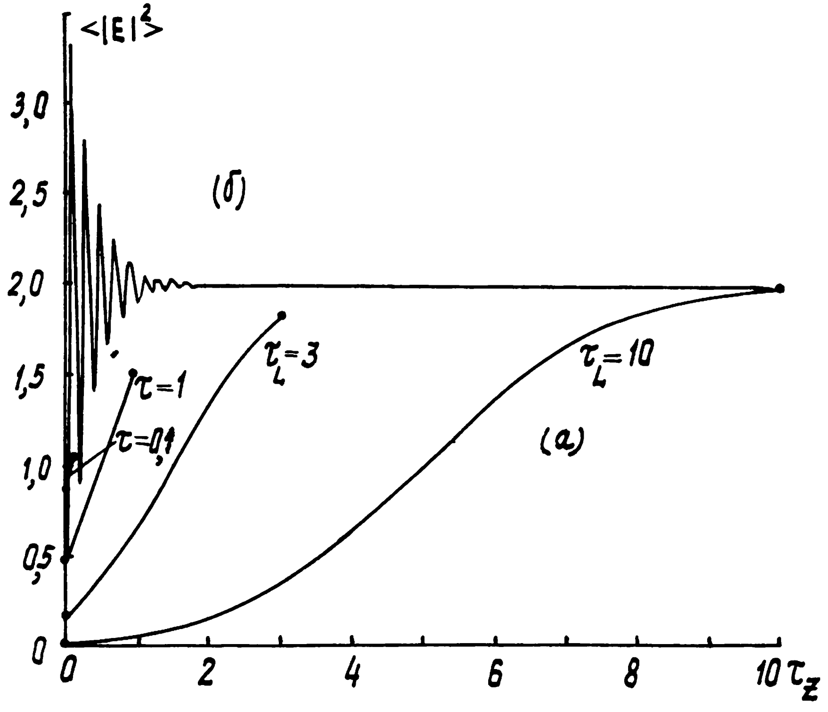

Рис.1

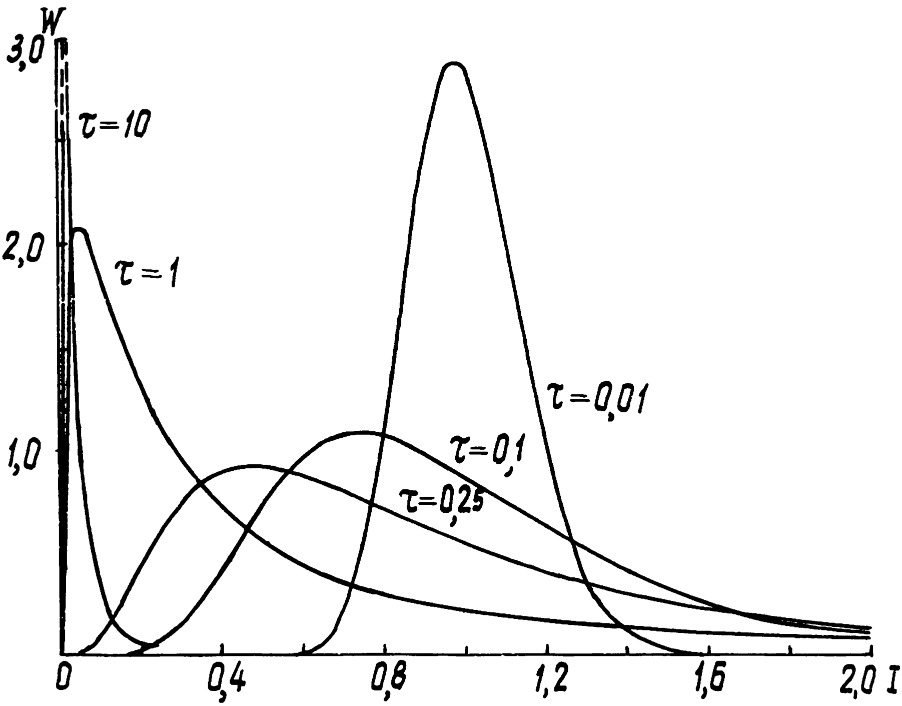

Рис.2

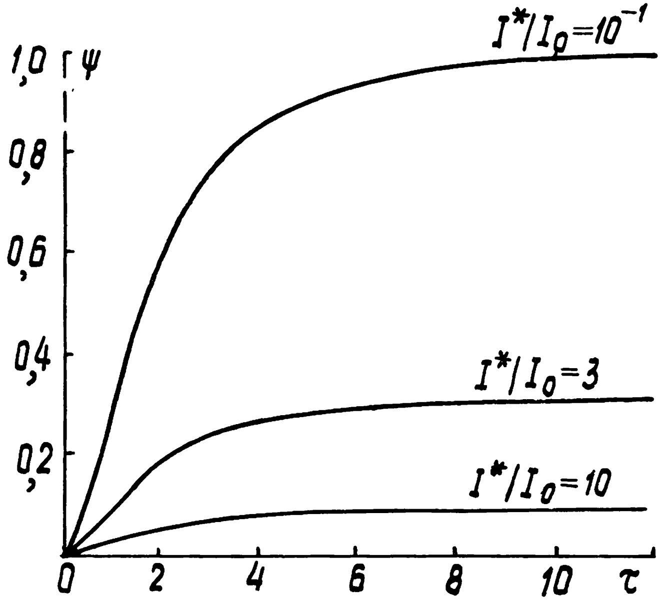

Рис.3

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Распределение среднего квадрата поля $\langle |E|^2 \rangle$ внутри рассеивающего слоя при различных значениях оптической толщины слоя τ_L : (а) – слой без регулярного отражения от границы, (б) – слой с зеркалом на конце ($I_0 = 2$).

Рис. 2. Эволюция функции распределения интенсивности $W(I,\tau)$ для слоя с зеркалом ($I_0 = 2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А.Бычков. ЖЭТФ, 65, 427, 1973.
2. В.Л.Березинский. ЖЭТФ, 65, 1251, 1973.
3. R.J.Elliott, J.A.Krumhansl, P.L.Leath. Rev.Mod.Phys., 46, 465, 1974.
4. Ю.Л.Газарян. ЖЭТФ, 56, 1856, 1969.
5. G.Papanicolaou. SIAM J.Appl.Math., 21, 13, 1971.
6. Yu.A.Ryshov. Rad.Sci., 11, 121, 1976.
7. R.H.Lang. J.Math.Phys., 14, 1921, 1973.
8. В.И.Кляцкин, В.И.Татарский. УФН, 110, 499, 1973.
9. В.И.Тихонов, М.А.Миронов. Марковские процессы, "Сов.радио", 1977.
10. Б.С.Абрамович, Ю.А.Рыжов. УП Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (г.Ростов-на Дону), краткие тексты докладов, 1, 311, 1977.
11. Б.С.Абрамович, А.А.Дятлов. Изв. высш. уч.зав.-Радиофизика, 18, 1122, 1975.
12. В.И.Кляцкин, В.И.Татарский. Изв. высш.уч. зав. Радиофизика, 20, 1040, 1977.
13. Н.Н.Лебедев. Специальные функции и их приложения, Физматгиз, М.-Л., 1963.