Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Ордена Трудового Красного Знамени
Научно-исследовательский радиофизический институт /НИРФИ/

Препринт № 130

РЕКУРРЕНТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. II

Я.И.Альбер

г. Горький – 1979 г.

Реферат

Предложен новый вариант альтернативного метода исследования рекуррентных числовых и дифференциальных неравенства вида

$$\lambda_{n+1} \leqslant (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \psi(\lambda_n) + \gamma_n, \lambda_1 = \bar{\lambda}, \lambda_n \geqslant 0, n = 1, 2 \ldots,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\alpha(t)\lambda(t) + \gamma(t), t \geqslant t_0 \geqslant 0, \lambda(t_0) = \bar{\lambda},$$

где $\psi(\lambda)$ – строго возрастающая функция при $\lambda \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$. Он позволяет значительно расширить по сравнению с предыдущими результатами автора (см. Я. И. Альбер. Рекуррентные числовые и дифференциальные неравенства, препринт № 116, НИРФИ, 1978 RЖМат. 11 А 1340) класс последовательностей α_n (функций $\alpha(t)$), для которых можно установить неасимптотические оценки скорости сходимости λ_n $(\lambda(t))$ к нулю.

Библ. 2 назв.

В настоящей работе существенно развивается предложенный в [1] альтернативный метод исследования рекуррентных числовых и дифференциальных неравенств. Как и в [1], мы рассматриваем общие нелинейные неравенства вида

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \alpha_n \Psi(\lambda_n) + \gamma_n, \quad n \geq n_0 \geq 1, \tag{1}$$

$$\lambda_{n+1} \leqslant (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \Psi(\lambda_n) + \gamma_n, \quad n \geq n_0 \geq 1, \tag{1'}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \leqslant -\alpha(t)\Psi(\lambda(t)) + \gamma(t), \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \ \lambda(t_0) = \bar{\lambda}, \tag{2}$$

где λ_n, α_n, β_n, γ_n – положительные (или неотрицательные) действительные числа, $\lambda(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ – положительные (или неотрицательные) функции, $\Psi(\lambda)$ – монотонно возрастающая функция, $\Psi(0) = 0$.

Наша цель – расширить по сравнения с [1] класс последовательностей α_n (функций $\alpha(t)$), для которых можно установить неасимптотические оценки скорости стремления λ_n $(\lambda(t))$ к нулю. Поясним это подробнее для неравенства (1).

Пусть $\sum_1^{\infty} \alpha_n = \sum_1^{\infty} \alpha(n)$, где $\alpha(n) = \alpha_n$ – значение при $x = n$ некоторой функции $\alpha(x)$, определенной при $x \geqslant n_0 \geqslant 1$. Предположим, в соответствии с требованием: $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, эту функцию непрерывной, положительной и монотонно убывающей. Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для $\alpha(x)$.

Неасимптотические оценки скорости сходимости λ_n к нулю были получены в [1] только для случая сильных последовательностей α_n. Напомним это понятие.

Последовательность α_n мы называли сильной, если для нее выполняются следующие два условия:

1) существует произвольное положительное число ε такое, что $\sum\limits_1^\infty \alpha_n^{1+\varepsilon} = \infty$;

2) первообразная $F(x)$ обладает свойством (P), т.е. существуют числа $\delta > 0$ и $\bar{x} > x_0$ такие, что из соотношений $F(x) - F(y) \leqslant \delta$, $x \geqslant y \geqslant \bar{x}$ следует: $\frac{\alpha(y)}{\alpha(x)} \leqslant C$, где C – константа, не зависящая от x и y.

Условие 1), грубо говоря, не разрешает последовательности α_n убывать слишком быстро, а условие 2) – слишком медленно.

Используя новую версию альтернативного метода, мы освобождаемся ниже от этих требований и предполагаем лишь, что ряд $\sum\limits^\infty \alpha_n$ расходится. При этом для сильных последовательностей оценки скорости сходимости не ухудшаются, а соответствующие доказательства значительно сокращаются по объему. Далее, альтернативный метод работы [1] использовал свободный параметр $C_0 > 1$ +), с помощью которого производилось расщепление нелинейного неоднородного неравенства на три неравенства, из которых одно – соответствующее нелинейное однородное неравенство ++). Это неизбежно приводило к завышению мажорирующих констант в окончательных оценках скорости сходимости. Новый метод, предлагаемый ниже, позволяет непосредственно перейти к линейному неоднородному неравенству и не использует параметр C_0.

+) Для определенности мы везде полагали $C_0 = 2$.

++) Оно, в свою очередь, сводилось к линейному неоднородному неравенству.

И, наконец, последнее. В рамках старого метода в предположениях $\sum_1^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\frac{\gamma_n}{\alpha_n} \to 0$, $\alpha_n \to 0$ мы могли утверждать лишь, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ (см. [2]). Теперь в тех же условиях мы можем дать монотонно убывающую к нулю оценку скорости сходимости на некоторой бесконечной подпоследовательности n_ℓ.

Все сказанное относится и к дифференциальным неравенствам вида (2).

Перейдем теперь к изложению новых результатов, при этом подробное доказательство основных утверждений мы проведем для случая $\psi(\lambda) = \lambda^p$, $p > 0$, для общей же функции $\psi(\lambda)$ приведем только соответствующие формулировки.

§1. Рекуррентные числовые неравенства

Лемма 1. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ при $n \geqslant n_0$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \alpha_n \lambda_n^p - \gamma_n, \; p>0, \; \lambda_{n_0} = \bar{\lambda}, \tag{3}$$

$$\alpha_n > 0, \; \alpha_n \to 0, \; \sum_1^{\infty} \alpha_n = \infty, \; \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \to 0, \; F(n) > 0, \tag{4}$$

тогда $\lim \lambda_n = 0$. Существует бесконечная подпоследовательность $n = n_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lambda_{n_\ell} \leqq \left(\frac{1}{F(n_\ell)} - \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

а при всех $n_\ell < n < n_{\ell+1}$

$$\lambda_n \leqslant \left(\frac{c}{F(n)} + \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}} \right)^{\frac{1}{p}} + \gamma_{n_\ell}, \tag{6}$$

$$C = \exp\left[\left(\frac{1}{F(n_0)} + \left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right)_{max}\right)^{1/p} + (\gamma_n)_{max} + \frac{\alpha_{n_0}}{F(n_0)}\right] \qquad (7)$$

При этом

$$n_0 \leq n_1 < S_{max} = \max\left\{S : \sum_{n_0}^{S} \frac{\alpha_m}{F(m)} < \bar{\lambda}\right\}, \qquad (8)$$

$$\lambda_{n+1} \leq \bar{\lambda} - \ln\frac{F(n+1)}{F(n_0)}, \quad n = n_0, n_0+1, \ldots \qquad (9)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку $F'(x) = \alpha(x) > 0$, то $F(x)$ монотонно возрастает и, в силу интегрального признака Коши, $F(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} F(n) = +\infty$. Отметим также, что $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{F(m)} = \infty$, т.к. $\int \frac{\alpha(x)}{F(x)}\,dx = \ln F(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Далее, при каждом $n \geq n_0$ можно рассмотреть следующую альтернативу:

1) $\lambda_n^p \leq \frac{1}{F(n)} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n}$

2) $\lambda_n^p > \frac{1}{F(n)} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n}$

Обозначим

$$I_1 = \left\{n \in I_{n_0} : \lambda_n \leq \left(\frac{1}{F(n)} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right)^{1/p}\right\}.$$

$$I_2 = \left\{n \in I_{n_0} : \lambda_n > \left(\frac{1}{F(n)} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right)^{1/p}\right\}$$

Очевидно $I_1 \cup I_2 = I_{n_0} = \{n_0, n_0+1, \ldots\}$ Покажем, что I_1 – бесконечное множество. Действительно, предполагая противное, получаем, что существует $N_0 \geq n_0$ такое, что при всех $n \geq N_0$

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \frac{\alpha_n}{F(n)},$$

откуда

$$\lambda_n \leq \lambda_{N_0} - \sum_{m=N_0}^{n-1} \frac{\alpha_m}{F(m)} .$$

В силу расходимости ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{F(m)}$ этого быть не может. Таким образом, существует бесконечная подпоследовательность $n = n_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots$ (она, собственно, и составляет все множество I_1) такая, что

$$\lambda_{n_\ell} \leq \left(\frac{1}{F(n_\ell)} + \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}} \right)^{1/p} .$$

Рассмотрим два случая.

1) $I_1 = I_0$. Выберем произвольный интервал $I_\ell = [n_\ell + 1, n_{\ell+1} - 1]^0$. Поскольку нам необходимо выяснить поведение λ_n при $n \neq n_\ell$, будем считать, что $n_{\ell+1} - n_\ell > 1$. Очевидно,

$$\lambda_{n_\ell + 1} \leq \lambda_{n_\ell} + \gamma_{n_\ell} \leq \left(\frac{1}{F(n_\ell)} + \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}} \right)^{1/p} + \gamma_{n_\ell} \tag{10}$$

и при всех $n_\ell + 1 \leq n < n_{\ell+1}$

$$\lambda_n \leq \lambda_{n_\ell + 1} - \sum_{m=n_\ell+1}^{n-1} \frac{\alpha_m}{F(m)} \leq \lambda_{n_\ell + 1} \tag{11}$$

Отсюда и в силу неограниченности множества I_1 следует соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Выведем оценку (6). Имеем

$$\sum_{m=n_\ell+1}^{n_{\ell+1}-1} \frac{\alpha_m}{F(m)} \leq \left(\frac{1}{F(n_\ell)} + \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}} \right)^{1/p} + \gamma_{n_\ell} \tag{12}$$

С другой стороны, для любого расходящегося ряда $\sum_1^\infty \alpha_i$.

$$F(n+1) - F(n) < \alpha_n$$

Проссумировав это неравенство от n_ℓ до $n_{\ell+1}-1$, получаем

$$\sum_{n_\ell}^{n_{\ell+1}-1} \alpha_m > F(n_{\ell+1}) - F(n_\ell).$$

Из этого соотношения вытекает

$$\sum_{n_\ell+1}^{n_{\ell+1}-1} \frac{\alpha_m}{F(m)} = \sum_{n_\ell}^{n_{\ell+1}-1} \frac{\alpha_m}{F(m)} - \frac{\alpha_{n_\ell}}{F(n_\ell)} > \ln \frac{F(n_{\ell+1})}{F(n_\ell)} - \frac{\alpha_{n_\ell}}{F(n_\ell)}$$

Следовательно, в силу (12)

$$\frac{F(n_{\ell+1})}{F(n_\ell)} < \exp\left[\left(\frac{1}{F(n_\ell)} + \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}}\right)^{1/p} + \gamma_{n_\ell} + \frac{\alpha_{n_\ell}}{F(n_\ell)}\right] = C_{n_\ell}$$

Поскольку $\frac{\gamma_n}{\alpha_n} \to 0$ при $\alpha_n \to 0$, то и $\gamma_n \to 0$.

Обозначим

$$\max_{n \geq n_0}\left\{\frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right\} = \left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right)_{max} \text{ и } \max_{n \geq n_0}\{\gamma_n\} = (\gamma_n)_{max}.$$

Тогда

$$1 < C_{n_\ell} \leq C = \exp\left[\left(\frac{1}{F(n_0)} + \left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right)_{max}\right)^{\frac{1}{p}} + (\gamma_n)_{max} + \frac{\alpha_{n_0}}{F(n_0)}\right]$$

Поскольку $F(n)$ монотонно возрастает, то для всех

$$n_\ell + 1 \leq n \leq n_{\ell+1} - 1$$

$$\frac{1}{F(n_e)} \leqslant \frac{F(n_{e+1})}{F(n_e)} \frac{1}{F(n)} \leqslant \frac{C}{F(n)} \tag{13}$$

Оценка (6) следует теперь из (10), (11) и (13).

2) Пусть теперь $n_1 > n_0$. Тогда для $n \geqslant n_1$ выполняются оценки (5) и (6), а $\{n\} = \overline{n_0, n_1 - 1} \in I_2$. Значит, для всех $n_0 \leqslant n \leqslant n_1 - 1$

$$\lambda_{n+1} \leqslant \bar{\lambda} - \sum_{n_0}^{n} \frac{\alpha_m}{F(m)} \leqslant \bar{\lambda} - \ln \frac{F(n+1)}{F(n_0)}.$$

Из последнего соотношения очевидна также оценка (8). Лемма полностью доказана.

Замечание 1. Если $\frac{\gamma_n}{\alpha_n}$ и γ_n монотонно убывающие последовательности, то

$$C = \exp\left[\left(\frac{1}{F(n_0)} + \frac{\gamma_{n_0}}{\alpha_{n_0}}\right)^{\frac{1}{p}} + \gamma_{n_0} + \frac{\alpha_{n_0}}{F(n_0)}\right].$$

Для того, чтобы получить монотонно убывающую к нулю оценку скорости сходимости λ_n при всех $n \geqslant n_1$, приходится накладывать дополнительные требования.

Лемма 2. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ удовлетворяет неравенству (3), условиям (4) и, кроме того,

$$\frac{\gamma_n}{\alpha_n} \leqslant \bar{\gamma} \left(\frac{1}{F(n)}\right)^{\varepsilon_1}, \quad \gamma_n \leqslant \bar{\bar{\gamma}} \left(\frac{1}{F(n)}\right)^{\varepsilon_2}, \tag{14}$$

$$n \geqslant n_0,$$

где $\bar{\gamma}$, $\bar{\bar{\gamma}}$, ε_1 и ε_2 – некоторые положительные числа. Тогда

$$\lambda_n \leq C_1 \left(\frac{1}{F(n)}\right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \min\left\{\frac{\tau}{p}, \varepsilon_2\right\}; \quad \tau = \min\left\{1, \varepsilon_1\right\}, \tag{15}$$

$$C_1 = C_2 + \bar{\bar{\gamma}} C^{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{F(n_0)}\right)^{\varepsilon_2 - \frac{\tau}{p}}, \text{ если } \varepsilon_2 \geq \frac{\tau}{p},$$

$$C_1 = C_2 \left(\frac{1}{F(n_0)}\right)^{\frac{\tau}{p} - \varepsilon_2} + \bar{\bar{\gamma}} C^{\varepsilon_2}, \text{ если } \varepsilon_2 \leq \frac{\tau}{p},$$

$$C_2 = \left[C \left(\frac{1}{F(n_0)}\right)^{1-\varepsilon_1} + \bar{\gamma} C^{\varepsilon_1}\right]^{\frac{1}{p}}, \text{ если } \varepsilon_1 \leq 1,$$

$$C_2 = \left[C + \bar{\gamma} C^{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{F(n_0)}\right)^{\varepsilon_1 - 1}\right]^{\frac{1}{p}}, \text{ если } \varepsilon_1 \geq 1,$$

по крайней мере, начиная с некоторого n_1, для которого имеет место (8) и (9). Здесь C –константа (7).

Следствие 1. Пусть выполнены все условия леммы 2;

$$N_1 = \min\left\{n : F(n) \geq 1\right\}, \quad N_0 = \max\left\{N_1, S_{max}\right\}.$$

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ и, кроме того, начиная с некоторого $n = n_1$, $n_0 \leq n_1 \leq N_0$, имеет место оценка (15), где

$$C_1 = (C + \bar{\gamma} C^{\varepsilon_1})^{\frac{1}{p}} + \bar{\bar{\gamma}} C^{\varepsilon_2}$$

Замечание 2. Если $\alpha_n = \frac{1}{n}$, то $F(n) = \ln n$, $n_0 = 2$, $N_1 = 3$; если $\alpha_n = \frac{1}{n^t}$, $0 < t < 1$, то $F(n) = \frac{n^{1-t}}{1-t}$, $n_0 = N_1 = 1$; если же $\alpha_n = \frac{1}{n \ln n}$, то $F(n) = \ln \ln n$, $n_0 = 3$, $N_1 = e^e \approx 15$; S_{max}, а, следовательно, и N_0 зависит от выбора начального значения $\bar{\lambda}$.

Перейдем теперь от частного к общему случаю неравенства (1). Мы сразу сформулируем окончательный результат.

Лемма 3. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ при $n \geqslant n_0$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \alpha_n \Psi(\lambda_n) + \gamma_n, \; \lambda_{n_0} = \bar{\lambda},$$

$$\alpha_n > 0, \; \alpha_n \to 0, \; \sum_1^\infty \alpha_n = \infty, \; \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = 0, \; F(n) > 0, \; \Psi(\lambda) -$$

монотонно возрастающая функция, $\Psi(0) = 0$, тогда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Существует бесконечная подпоследовательность $n = n_\ell$ такая, что

$$\lambda_{n_\ell} \leqslant \Psi^{-1}\left(\frac{1}{F(n_\ell)} + \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}}\right), \quad {}^{*)}$$

а при всех $n_\ell < n < n_{\ell+1}$

$$\lambda_n \leq \Psi^{-1}\left(\frac{C}{F(n)} + \frac{\gamma_{n_\ell}}{\alpha_{n_\ell}}\right) + \gamma_{n_\ell},$$

$$C = \exp\left[\Psi^{-1}\left(\frac{1}{F(n_0)} + \left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n}\right)_{max}\right) + (\gamma_n)_{max} + \frac{\alpha_{n_0}}{F(n_0)}\right],$$

и выполняются соотношения (8) и (9).

Следствие 2. Пусть выполнены все условия леммы 3 и условие (14) леммы 2. Тогда, начиная с некоторого $n = n_1$, $n_0 \leq n_1 \leq N_0$

---

*) Здесь и дальше символ Ψ^{-1} означает функцию, обратную к Ψ.

$$\lambda_n \leq \psi^{-1}\left(\frac{C_1}{(F(n_0))^{\tau}}\right)+\bar{\bar{\gamma}}\left(\frac{C}{F(n)}\right)^{\varepsilon_2}$$

$C_1 = C + \bar{\gamma} C^{\varepsilon_1}$; $\tau = \min\{1, \varepsilon_1\}$, $N_0 = \max\{N_1, S_{max}\}$, $N_1 = \min\{n : F(n) \geq 1\}$.

§ 2. Примеры

1. Предположим, что в неравенстве (i) $d_n = \frac{b}{n}$, $\gamma_n = \frac{d}{n^s}$; $s > 1$; b ; $d > 0$. Тогда $d(x) = \frac{b}{x}$;
$F(x) = b\ln x$; $n_0 = 2$.
Выведем условия, при которых выполняются оценки (14). Займемся вначале первой из них. Сравним две последовательности

$$y_1(n) = \frac{\gamma_n}{d_n} = \frac{d}{b}\left(\frac{1}{n}\right)^{s-1} \text{ и } y_2(n) = \bar{\gamma}\left(\frac{1}{b\ln n}\right)^{\varepsilon_1}; \ \varepsilon_1 > 0.$$

Поскольку в асимптотике $y_2(n) > y_1(n)$ при любом ε_1, то имеет смысл положить $\varepsilon_1 = 1$. Далее потребуем, чтобы при $n = 2$ последовательности принимали равные значения, т.е.

$$\frac{d}{b}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} = \bar{\gamma}\frac{1}{b\ln 2},$$

Отсюда $\bar{\gamma} = d\,2^{1-s}\ln 2$.

Теперь сравним между собой две функции:

$$y_1(x) = \frac{d}{b}\left(\frac{1}{x}\right)^{s-1} \text{ и } y_2(x) = \frac{d}{b}\,\frac{\ln 2}{2^{s-1}}\,\frac{1}{\ln x}.$$

Очевидно, что на интервале $(2, \infty)$ они могут иметь не более одной точки пересечения.

Вычисляя и сравнивая производные этих функций в точке $x = 2$, заключаем:

а) если $S > \frac{1+\ln 2}{\ln 2}$, то точек пересечения нет, и функция $y_2(x)$ при всех $x \geq 2$ мажорирует функцию $y_1(x)^{\gamma_2}$, поэтому

$$\frac{d}{b}\left(\frac{1}{n}\right)^{s-1} \leq \frac{d \ln 2}{2^{s-1}} \quad \frac{1}{b \ln n},$$

б) если $S \leq \frac{1+\ln 2}{\ln 2}$, то на интервале $(2, \infty)$ имеется точно одна точка пересечения функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

В этом случае можно воспользоваться следующим простым утверждением; если две функции

$$z_1(x) = \theta_1\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_1} \text{ и } z_2(x) = \theta_2\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{\gamma_2}, \; z_1(2) = z_2(2)$$

на интервале $(2, \infty)$ имеют точку пересечения, то для построения общей мажорирующей функции достаточно $z_2(x)$ домножить на число

$$\tilde{\gamma} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\gamma_2} \exp[-\gamma_2] = 2^{\gamma_1}(\ln 2)^{-\gamma_2}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\gamma_2} \exp[-\gamma_2].$$

Применительно к $y_1(x)$ и $y_2(x)$ это означает: $\tilde{\gamma} = \frac{2^{s-1}}{e(s-1)\ln 2}$. Покажем, что $\tilde{\gamma} \geq 1$.

Действительно, соотношение $\tilde{\gamma} = 1$ при $S = \frac{1+\ln 2}{\ln 2}$ легко доказывается проверкой. При $S < \frac{1+\ln 2}{\ln 2}$ $\tilde{\gamma} > 1$, т.к. в этом случае

$$\tilde{\gamma}'_s = \frac{2^{s-1}}{e(s-1)^2 \ln 2}\left[(s-1)\ln 2 - 1\right] < 0.$$

Таким образом, общая мажорирующая последовательность такова:

$$\frac{d}{be(s-1)} \cdot \frac{1}{\ln n}, \quad \bar{\gamma} = \frac{d}{e(s-1)}.$$

Обратимся теперь ко второму из неравенств (14). Сравним две последовательности:

$$y_1(n) = \gamma_n = d\left(\frac{1}{n}\right)^s \text{ и } \quad y_2(n) = \gamma\frac{1}{b\ln n}.$$

Опять потребуем, чтобы при $n = 2$ они принимали одинаковые значения. Из этого условия

$$\gamma = db\frac{\ln 2}{2^s}$$

Поступая так же, как и в предыдущем случае $\left(y_1'(2) = -d\frac{s}{2^{s+1}}, \quad y_2'(2) = -\frac{d}{2^{s+1}}\frac{1}{\ln 2}\right)$, приходим к следующему заключению:

а) если $s > \frac{1}{\ln 2}$, то $d\left(\frac{1}{n}\right)^s \leqslant \frac{d\ln 2}{2^s}\frac{1}{\ln n}$; т.е. $\bar{\bar{\gamma}} = \frac{db\ln 2}{2^s}, \; b_2 = 1$,

б) если $s \leqslant \frac{1}{\ln 2}$, то $\bar{\bar{\gamma}} = \frac{db}{es}$.

Таким образом, справедлива

Лемма 4. Пусть выполнены все условия леммы 3, $\alpha_n = b/n$, $\gamma_n = d/n^s$, $s > 1$, $b > 0$, $d > 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ и, кроме того, начиная с некоторого $n = n_1$, $2 \leqslant n_1 \leqslant S_{max} = \max\left\{S : \sum_2^S \frac{1}{k\ln k} < \lambda\right\}$ имеет место оценка

$$\lambda_n \leqslant \Psi^{-1}\left(\frac{c_1}{\ln n}\right) + \frac{c_2}{\ln n},$$

где

$$c_1 = \frac{c}{b}\left(1 + \frac{d}{e(s-1)}\right), \; c_2 = \frac{cd}{es}, \; 1 < s \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

$$C_1=\frac{c}{b}\left(1+\frac{d}{e(s-1)}\right),\quad C_2=\frac{cd\,\ln 2}{2^s},\quad \frac{1}{\ln 2}\le s\le 1+\frac{1}{\ln 2},$$

$$C_1=\frac{c}{b}\left(1+\frac{d\ln 2}{2^{s-1}}\right),\quad C_2=\frac{cd\,\ln 2}{2^s},\quad s\ge 1+\frac{1}{\ln 2},$$

$$C=\exp\left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{b\ln 2}+\frac{d}{b2^{s-1}}\right)+\frac{d}{2^s}+\frac{1}{2\ln 2}\right],$$

2. Пусть в неравенстве (1) $\alpha_n=\frac{b}{n^t}$, $0<t<1$, $\gamma_n=\frac{d}{n^s}$, $s>t$, $b>0$, $d>0$. Тогда $\alpha(x)=b/x^t$, $F(x)=\frac{b}{1-t}x^{1-t}$, $n_0=1$. Поступая точно так же, как и в n° 1, приходим к следующему выводу:

1) если $s\ge 1$, то $\frac{\gamma_n}{\alpha_n}=\frac{d}{b}\left(\frac{1}{n}\right)^{s-t}\le\frac{d}{b}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-t}$, и наоборот, если $s\le 1$.

2) если $s\ge 1-t$, то $\gamma_n=d\left(\frac{1}{n}\right)^s\le d\left(\frac{1}{n}\right)^{1-t}$, и наоборот, если $s\le 1-t$.

Это приводит к такому утверждению (ср. с леммой 14 из работы [1]).

<u>Лемма 5.</u> Пусть выполнены все условия леммы 3:

$$\alpha_n=\frac{b}{n^t},\ 0<t<1,\ \gamma_n=\frac{d}{n^s},\ s>t,\ b>0,\ d>0.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ и, кроме того, начиная с некоторого $n=n_1$, $1\le n_1\le S_{max}=\max\left\{S:\sum_1^S 1/n<\lambda/1-t\right\}$ имеет место оценка

$$\lambda_n\le\psi^{-1}\left(\frac{C_1}{n^{\tau_1}}\right)+d\left(\frac{1}{n}\right)^{\tau_2},$$

$$C_1=\frac{c(1-t+d)}{b},\quad \tau_1=\min\{s-t,\ 1-t\},\ \tau_2=\min\{s,1-t\}$$

$$C=\exp\left[\psi^{-1}\left(\frac{1-t+d}{b}\right)+d+1-t\right].$$

Аналогично вычисляются оценки для других последовательностей α_n, например, для $\alpha_n = \frac{1}{(n\ln n)^t}, 0<t\leq 1$.

Замечание 3. Если вместо (1) рассмотреть неравенство (1'), $\sum^{\infty} \beta_n < \infty$, то все леммы §§ 1, 2 будут справедливы, при этом в оценках скорости стремления λ_n к нулю правые части необходимо умножить на число

$$B \geq \prod_1^{\infty} (1+\beta_n).$$

§ 3. Дифференциальные неравенства

В настоящем параграфе мы приведем результаты, подобные леммам 1–5, для дифференциальных неравенств типа (2). Будем предполагать, что положительная функция $\alpha(t)$ определена в промежутке (t_0, ∞), интегрируема в каждой конечной части этого промежутка, для $\alpha(t)$ существует первообразная $F(t)$, а само неравенство (2) имеет решение при всех $t \geq t_0$.

Лемма 6. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq -\alpha(t)\lambda^p(t) + \gamma(t), \lambda(t_0) = \lambda, t \in R^+_{t_0} = \{t : t \geq t_0\} \quad (16)$$

$$\alpha(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0, \int_{t_0}^{\infty} \alpha(\tau)\, d\tau = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} = 0, F(t) > 0 \quad (17)$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$. Если в дополнение к этому

$$\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \leq \gamma \left(\frac{1}{F(t)}\right)^{\varepsilon}, \ \varepsilon > 0, \ \gamma > 0, \quad (18)$$

то

$$\lambda(t) \leqslant \left[\frac{C}{F(t)} + \gamma\left(\frac{C}{F(t)}\right)^{\varepsilon}\right]^{1/p}$$

$$C = \exp\left[\frac{1}{F(t_0)} + \left(\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right)_{max}\right]^{1/p}, \quad \left(\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right)_{max} = \max_{t \geqslant t_0} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)},$$

по крайней мере, начиная с некоторого конечного $t = t_1$,

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \max\left\{t : \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha(\tau)}{F(\tau)}\, d\tau < \bar{\lambda}\right\}, \tag{19}$$

при этом

$$\lambda(t) \leqslant \bar{\lambda} - \ln \frac{F(t)}{F(t_0)}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{20}$$

<u>Доказательство</u>. Поскольку $F'(t) = \alpha(t) > 0$, то $F(t)$ монотонно возрастает, и в силу расходимости интеграла (17) $F(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Кроме того, $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{F(t)}\, dt = \infty$ (см. лемму 1).

При каждом $t \geqslant t_0$ можно рассмотреть следующую альтернативу:

1) $$\lambda^p(t) \leqslant \frac{1}{F(t)} + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}, \tag{21}$$

2) $$\lambda^p(t) > \frac{1}{F(t)} + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}. \tag{22}$$

Пусть $T_1^1, T_1^2, \ldots; T_2^1, T_2^2, \ldots$ – интервалы по t, на которых выполняются соответственно (21) и (22). Обозна –

чим через t_j^i и $\bar{t}_j^i$ начало и конец интервала T_j^i, $j = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots$, $T_1 = \cup T_1^i$, $T_2 = \cup T_2^i$. Тогда $R_{t_0}^+ = T_1 \cup T_2$. В силу (21) и (22) на каждом интервале T_1^i

$$\lambda(t) \leq \left(\frac{1}{F(t)} + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right)^{1/p},$$

а на каждом интервале T_2^i

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \leq -\frac{\alpha(t)}{F(t)}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\lambda(t) \leq \lambda(t_2^i) - \int_{t_2^i}^{t} \frac{\alpha(\tau)}{F(\tau)}\, d\tau, \quad \forall t \in T_2^i$$

Из этого соотношения легко следует, что T_1 – неограниченное множество (см. [1]),

$$\lambda(t) \leq \lambda(t_2^i) \leq \left(\frac{1}{F(\bar{t}_1^i)} + \frac{\gamma(\bar{t}_1^i)}{\alpha(\bar{t}_1^i)}\right)^{1/p} \tag{23}$$

и $\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим два случая.

1) $t_0 \in T_1^1$. Выберем произвольный интервал T_2^i. Имеем

$$\int_{t_2^i}^{\bar{t}_2^i} \frac{\alpha(\tau)}{F(\tau)}\, d\tau = \ln \frac{F(\bar{t}_2^i)}{F(t_2^i)} \leq \left(\frac{1}{F(\bar{t}_1^i)} + \frac{\gamma(\bar{t}_1^i)}{\alpha(\bar{t}_1^i)}\right)^{1/p}.$$

Отсюда

$$\frac{F(\bar{t}_2^i)}{F(t_2^i)} \leq \exp\left[\frac{1}{F(t_0)} + \left(\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right)_{max}\right]^{1/p} = C, \quad C > 1,$$

где $\left(\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right)_{max} = \max\limits_{t \geq t_0} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$. Поскольку $F(t)$ монотонно возрастает, то для всех $t \in T_2^i$

$$\frac{1}{F(\bar{t}_1^i)} \leqslant \frac{F(\bar{t}_2^i)}{F(t_2^i)} \frac{1}{F(t)} \leqslant \frac{c}{F(t)} .$$

Из оценки (23) теперь вытекает

$$\lambda(t) \leqslant \left(\frac{c}{F(t)} + \frac{\gamma(\bar{t}_1^i)}{\alpha(\bar{t}_1^i)}\right)^{1/p}.$$

Используя неравенство (18), окончательно получаем

$$\lambda(t) \leqslant \left(\frac{c}{F(t)} + \gamma\left(\frac{c}{F(t)}\right)^{\varepsilon}\right)^{1/p}.$$

2) Пусть теперь $t_0 \in T_2^1$. Условие неотрицательности $\lambda(t)$ дает оценки (19) и (20) на t_1 и $\lambda(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Лемма доказана.

<u>Следствие 3</u>. Пусть выполнены все условия леммы 6:

$$T^1 = \min\{t : F(t) \geqslant 1\},\ T^0 = \max\{T^1, t_1\}.$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$, и, кроме того, начиная с некоторого $t = \bar{t}$, $t_0 \leqslant \bar{t} \leqslant T^0$, имеет место оценка

$$\lambda(t) \leqslant C_1 \left(\frac{1}{F(t)}\right)^{\frac{\nu}{p}},\ \nu = \min\{1, \varepsilon\},\ C_1 = (C + \gamma C^{\varepsilon})^{1/p}.$$

<u>Лемма 7.</u> Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq -\alpha(t)\Psi(\lambda(t)) + \gamma(t), \lambda(t_0) = \bar{\lambda}, t \in R^+_{t_0},$$

выполнены соотношения (17), $\Psi(\lambda)$ – монотонно возрастающая функция, $\Psi(0) = 0$. Тогда $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$. Если в дополнение к этому справедливо неравенство (18), то

$$\lambda(t) \leq \Psi^{-1}\left(\frac{c}{F(t)} + \gamma\left(\frac{c}{F(t)}\right)^{\varepsilon}\right),$$

$$c = \exp\left[\Psi^{-1}\left(\frac{1}{F(t_0)} + \left(\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right)_{max}\right)\right], \left(\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right)_{max} = \max_{t \geq t_0} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$$

и имеют оценки (19) и (20).

<u>Замечание 4.</u> Следствие 3 применительно к лемме 7 дает оценку

$$\lambda(t) \leq \Psi^{-1}\left(c_1\left(\frac{1}{F(t)}\right)^{\eta}\right), \eta = \min\{1, \varepsilon\}, c_1 = c + \gamma c^{\varepsilon}.$$

Подобно случаю числовых рекуррентных неравенств, в качестве примера полезно рассмотреть $\alpha(t) = \frac{b}{t^n}$, $0 < n \leq 1$:

1) $\alpha(t) = \frac{b}{t}$, $\gamma(t) = \frac{d}{t^m}$, $m > 1, b > 0, d > 0, t_0 > 1$,

Тогда $\lambda(t) \leq \Psi^{-1}\left(\frac{c_1}{\ln t}\right)$,

$$c_1 = \frac{c}{b}\left(1 + \frac{d}{e(m-1)}\right) \quad \text{при} \quad 1 < m \leq 1 + \frac{1}{\ln 2},$$

$$c_1 = \frac{c}{b}\left(1 + \frac{d \ln 2}{2^{m-1}}\right) \quad \text{при} \quad m \geq 1 + \frac{1}{\ln 2},$$

$$c = \exp\left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{b\ln t_0} + \frac{d}{b t_0^{m-1}}\right)\right],$$

2) $\alpha(t) = \frac{b}{t^n}$, $0 < n < 1$, $\gamma(t) = \frac{d}{t^m}$, $m > n$,

$b > 0$, $d > 0$, $t_0 \geq 1$,

Тогда

$$\lambda(t) \leq \psi^{-1}\left(\frac{c_1}{t^\tau}\right), \quad \tau = \min\{m-n,\ 1-n\},$$

$$c_1 = \frac{c(1-n+d)}{b}, \quad c = \exp\left[\psi^{-1}\left(\frac{1-n+d}{b}\right)\right].$$

Вычислим для этого случая соотношения (19) и (20). Поскольку

$$\int_{t_0}^{t} \frac{a(\tau)}{F(\tau)}\, d\tau = (1-n)\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau},$$

то

$$t_0 \leq t_1 \leq t_0 \exp\left[\frac{\bar\lambda}{1-n}\right], \quad \lambda(t) \leq \bar\lambda - (1-n)\ln\frac{t}{t_0}.$$

Сравнивая эти результаты с соответствующими оценками лемм 19 и 20 из [1], замечаем, что они отличаются только мажорирующими константами.

Аналогичные результаты можно сформулировать для $\alpha(t) = \frac{b}{(t\ln t)^n}$, $0 < n \leq 1$, $b > 0$.

Литература

1. Я.И. Альбер. Рекуррентные числовые и дифференциальные неравенства. Препринт НИРФИ № 116, 1978.

2. Я.И.Альбер. О решении уравнений и вариационных неравенств с максимальными монотонными операторами, ДАН СССР (в печати).