Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ (НИРФИ)

Препринт № 133

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ НЕГЛАДКИМИ СИСТЕМАМИ ГУРСА—ДАРБУ

В. И. Плотников

М. И. Сумин

ГОРЬКИЙ — 1980

## АННОТАЦИЯ

На примере задачи оптимального управления негладкой системой Гурса—Дарбу с негладким критерием качества иллюстрируется общий метод вывода необходимых условий оптимальности, пригодный для решения широкого класса оптимизационных задач для негладких систем как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами Этот метод сводит вывод необходимых условий оптимальности к некоторым общим процедурам функционального анализа и не зависит от частных особенностей, задающих оптимизационную задачу уравнений и функционалов.

УДК 519 3 : 62 50

В работе устанавливаются необходимые условия оптимальности в задаче управления объектами с распределенными параметрами, описываемыми системами Гурса—Дарбу с недифференцируемыми в классическом смысле правыми частями (1), а также с недифференцируемым интегрантом в интегральном критерии качества (5).

Подобные негладкие задачи для систем с распределенными параметрами ранее не рассматривались. Аналогичные задачи для негладких систем обыкновенных дифференциальных уравнений изучались, например, в [1, 2]. При этом необходимые условия оптимальности в форме, обобщающей классический принцип максимума Понтрягина, выражались с помощью «обобщенных градиентов» [1] или «производных множеств» [2].

Задача оптимального управления негладкой системой Гурса—Дарбу с негладким критерием качества служит удобным примером для иллюстрации предлагаемого в статье общего метода, пригодного для решения широкого класса оптимизационных задач для негладких систем как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами. В число таких систем входят, например, различные краевые задачи для гиперболических уравнений, начальные задачи для обыкновенных интегродифференциальных уравнений с частными производными и другие задачи. При этом необходимые условия оптимальности, записываемые с помощью обобщенных производных [3], существенно отличаются от необходимых условий [1] или [2], что объясняется более сложной природой систем с распределенными параметрами. Предлагаемый метод опирается на общую функциональную методику вывода необходимых условий оптимальности (см., например, [4, 5]) и вариационный принцип [6].

## 1. ПОСТАНОВКА НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый векторным нелинейным гиперболическим уравнением вида

$$z''_{xy} = f(x, y, z, z'_x, z'_y, u(x, y)) \tag{1}$$

с граничными условиями Гурса,

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad z(0, y) = \psi(y), \tag{2}$$

для которых выполняется условие согласования

$$\varphi(0) = \psi(0). \tag{3}$$

Функция $f \equiv (f^1, \ldots, f^n): [0, a] \times [0, b] \times R^{3n} \times R^m \to R^n$ измерима по совокупности $(x, y, z, p, q, u)$, непрерывна по совокупности $(z, p, q, u)$ почти всюду в прямоугольнике $\Pi \equiv [0, a] \times [0, b]$, имеет в любой области $S^{M_1}_{zpq}$ для почти всех $(x, y) \in \Pi$ первые обобщенные производные [3]: $D_{z_i} f^j(x, y, z, p, q, u)$, $D_{p_i} f^j(x, y, z, p, q, u)$, $D_{q_i} f^j(x, y, z, p, q, u)$, $i, j = \overline{1, n}$ для всех $u \in S^{M_2}_u$, где

$$S^{M_1}_{zpq} \equiv \{(z, p, q) \in R^{3n} \mid |z| + |p| + |q| < M_1,$$

$$0 < M_1 < +\infty\}, \quad S^{M_2}_u \equiv \{u \in R^m \mid |u| < M_2, \ 0 < M_2 < +\infty\},$$

причем во множестве $\Pi \times S^{M_1}_{zpq} \times S^{M_2}_u$ справедливы оценки

$$|f| \leqslant N(M) < +\infty, \ |D_{z_i} f^j|, \ |D_{p_i} f^j|, \ |D_{q_i} f^j| \leqslant K < +\infty, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где $K$ — некоторое положительное число. $M \equiv (M_1, M_2)$.

Функции $\varphi$: $[0, a] \to R^n$ и $\psi$: $[0, b] \to R^n$ считаем удовлетворяющими условию Липшица с некоторыми константами

Управления (управляющие функции) $u \cdot \Pi \to R^m$ считаем ограниченными и измеримыми на прямоугольнике $\Pi$. Допустимыми управлениями назовем такие управления, которые принимают значения из некоторого ограниченного множества $U \subset R^m$.

Будем рассматривать абсолютно непрерывные решения (см., например, [5, 8]) задачи (1)—(3).

Поставим следующую оптимизационную задачу: среди множества тех допустимых управлений $u(x, y)$, которым отвечают единственные абсолютно непрерывные на прямоугольнике П решения $z_u(z, y)$ задачи (1)—(3), нужно выбрать такое, которое минимизирует функционал

$$I(u) \equiv \int_0^b \int_0^a F(x, y, z_u, (z_u)'_x, (z_u)'_y, u(x, y))\, dx\, dy. \qquad (5)$$

В (5) функция $F : \Pi \times R^{3n} \times R^m \to R^1$ измерима по совокупности $(x, y, z, p, q, u)$, непрерывна по совокупности $(z, p, q, u)$ при почти всех $(x, y) \in \Pi$, имеет почти всюду в П в любой области $S_{zpq}^{M_1}$ первые обобщенные производные: $D_{z_i} F(x, y, z, p, q, u)$, $D_{p_i} F(x, y, z, p, q, u)$, $D_{q_i} F(x, y, z, p, q, u)$, $i = \overline{1, n}$ для всех $u \in S_u^{M_2}$, причем во множестве $\Pi \times S_{zpq}^{M_1} \times S_u^{M_2}$ справедливы оценки

$$|F|, \quad |D_{z_i} F|, \quad |D_{p_i} F|, \quad |D_{q_i} F| \leqslant N(M), \quad i = \overline{1, n}. \qquad (6)$$

Заметим сразу, что обобщенные производные $D_{z_i} f^j(x, y, z, p, q, u)$, ..., $D_{q_i} F(x, y, z, p, q, u)$ измеримы по совокупности $(x, y, z, p, q, u)$. Аналогично для любого управления $u(x, y)$ функции $D_{z_i} f^j(x, y, z, p, q, u(x, y))$, ..., $D_{q_i} F(x, y, z, p, q, u(x, y))$ измеримы по совокупности $(x, y, z, p, q)$. Это следует, например, из [7], стр. 432.

## 2 УСТОЙЧИВОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО РЕШЕНИЯ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СГЛАЖЕННЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Пусть $\omega_1(|\xi - \eta|) \geqslant 0$ — некоторое усредняющее ядро (см., например, [3]). Введем в рассмотрение сглаженные функции

$$f_\rho \equiv (f_\rho^1, \ldots, f_\rho^n) : \Pi \times S_{zpq}^{M_1} \times S_u^{M_2} \to R^n \quad \text{и}$$

$$F_\rho : \Pi \times S_{zpq}^{M_1} \times S_u^{M_2} \to R^1$$

следующим образом (будем для удобства использовать обозначения $\xi \equiv (z, p, q)$, $\eta \equiv (z', p', q')$):

$$f_\rho(x, y, z, p, q, u) \equiv \frac{1}{\rho^{3n}} \int\limits_{S_{zpq}^{M_1+\varkappa}} \omega_\rho(|\xi - \eta|) f(x, y, \eta, u) d\eta, \quad (7)$$

$$F_\rho(x, y, z, p, q, u) \equiv \frac{1}{\rho^{3n}} \int\limits_{S_{zpq}^{M_1+\varkappa}} \omega_\rho(|\xi - \eta|) F(x, y, \eta, u) d\eta,$$

где $\varkappa > 0$ — некоторое фиксированное число. Число $M_1$ ниже будет фиксированным, положительным и достаточно большим (см. теорему 1, п. 2). Функции $f_\rho$, $F_\rho$, как легко видеть, измеримы по совокупности $(x, y, z, p, q, u)$, непрерывны по совокупности $(z, p, q, u)$ почти всюду в $\Pi$, имеют обычные производные $D_{z_i} f_\rho^j$, ..., $D_{q_i} F_\rho$ с теми же свойствами непрерывности, что и сами функции $f_\rho$, $F_\rho$, причем во множестве $\Pi \times S_{zpq}^{M_1} \times S_u^{M_2}$ справедливы оценки ($M_2 > 0$ — такое произвольное фиксированное число, что $U \subset S_u^{M_2}$)

$$\begin{gathered} |f_\rho| \leqslant N(M_1 + \varkappa, M_2), \quad |D_{z_i} f_\rho^j|, \quad |D_{p_i} f_\rho^j|, \\ |D_{q_i} f_\rho^j| \leqslant K, \qquad i, j = \overline{1, n}; \end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered} |F_\rho|, \quad |D_{z_i} F_\rho|, \quad |D_{p_i} F_\rho|, \quad |D_{q_i} F_\rho| \leqslant N(M_1 + \varkappa, M_2), \\ i = \overline{1, n}. \end{gathered} \quad (9)$$

Введем теперь для производных абсолютно непрерывных функций подобно [5, 8] следующие нормы:

$$\begin{aligned} \| z'_x \|_{C_y(\Pi)} &\equiv \sup_{y \in [0, b]} \{ \operatorname{vraisup}_{x \in [0, a]} | z'_x(x, y) | \}, \\ \| z'_y \|_{C_x(\Pi)} &\equiv \sup_{x \in [0, a]} \{ \operatorname{vraisup}_{y \in [0, b]} | z'_y(x, y) | \}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \| z'_x \|_{L_p^y} &\equiv \Big\{ \sup_{y \in [0, b]} \int\limits_0^a | z'_x(x, y) |^p dx \Big\}^{1/p}, \\ \| z'_y \|_{L_p^x} &\equiv \Big\{ \sup_{x \in [0, a[} \int\limits_0^b | z'_y(x, y) |^p dy \Big\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничная задача Гурса—Дарбу (1)—(3) обладает свойством устойчивости существования решения по возмущению управления $u(x, y)$ и правой части (1) в целом, которое удобно сформулировать в следующем виде.

*Теорема 1.* Пусть $P$ — множество всевозможных управлений $u(x, y)$, равномерно ограниченных некоторым числом $0 < L < \infty$ в норме $\operatorname*{vraisup}_{(x, y) \in \Pi} |u(x, y)|$, для каждого из которых существует единственное абсолютно непрерывное на $\Pi$, ограниченное в норме

$$\| z_u \|_{C(\Pi)} + \| (z_u)'_x \|_{C_y(\Pi)} + \| (z_u)'_y \|_{C_x(\Pi)} \tag{12}$$

решение $z_u(x, y)$ задачи (1)—(3).

Тогда

1. Множество решений $\{z_u \mid u \in P\}$ равномерно ограничено в норме (12), т. е. для всех $u \in P$

$$\| z_u \|_{C(\Pi)} + \| (z_u)'_x \|_{C_y(\Pi)} + \| (z_u)'_y \|_{C_x(\Pi)} \leqslant N, \tag{13}$$

где $0 < N < +\infty$ — достаточно большое число.

2. Существует такое $\rho_0 > 0$, что для любого управления $u \in P$ существует единственное абсолютно непрерывное на $\Pi$ решение $z_{\rho, u}(x, y)$ векторного уравнения

$$z''_{xy} = f_\rho(x, y, z, z'_x, z'_y, u(x, y)) \tag{14}$$

с граничными условиями (2), (3), причем для всех $0<\rho\leqslant\rho_0$

$$\begin{gathered} \| z_{\rho, u} - z_u \|_{C(\Pi)} + \| (z_{\rho, u} - z_u)'_x \|_{C_y(\Pi)} + \\ + \| (z_{\rho, u} - z_u)'_y \|_{C_x(\Pi)} \leqslant \mu \rho, \end{gathered} \tag{15}$$

где $\mu > 0$ — некоторое постоянное число. При этом в качестве числа $M_1$ в (7) можно взять, например, $M_1 = 2N$.

3. Если $u_1$, $u_2$ — два управления из множества $P$ и им отвечают единственные абсолютно непрерывные решения $z_{\rho, 1}(x, y)$, $z_{\rho, 2}(x, y)$ граничной задачи (14), (2), (3), то для всех $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ справедлива оценка

$$\| z_{\rho, 1} - z_{\rho, 2} \|_{C(\Pi)} + \| (z_{\rho, 1} - z_{\rho, 2})'_x \|_{L^y_p(\Pi)} +$$

$$+\|(z_{\rho,1}-z_{\rho,2})'_y\|_{L_p^x(\Pi)}\leqslant \nu_p\|\Delta_u f_\rho(x,\ y,\ u_1,\ u_2\ z_{\rho,2})\|_{L_p(\Pi)},$$

$$1<p\leqslant+\infty, \tag{16}$$

где $\nu_p>0$ —некоторое постоянное число, а

$$\Delta_u f_\rho(x,\ y,\ u_1,\ u_2,\ z_{\rho,2})\equiv f_\rho(x,\ y,\ z_{\rho,2},\ (z_{\rho,2})'_x,\ (z_{\rho,2})'_y,$$

$$u_1(x,\ y))-f_\rho(x,\ y,\ z_{\rho,2},\ (z_{\rho,2})'_x,\ (z_{\rho,2})'_y,\ u_2(x,\ y)).$$

4. Для любого управления $u\in P$ и любого $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$ существует такое число $\varepsilon^*$, что как только некоторое управление $v\ (x,y)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname*{vraisup}_{y\in[0,\ b]}\int_0^a|\Delta_u f_\rho(x,\ y,\ v,\ u,\ z_{\rho,u})|\,dx+$$

$$+\operatorname*{vraisup}_{x\in[0,\ a]}\int_0^b|\Delta_u f_\rho(x,\ y,\ v,\ u,\ z_{\rho,u})|\,dy\leqslant\varepsilon^*,$$

то существует единственное абсолютно непрерывное на П решение $z_{\rho,v}$ задачи (14), (2), (3), причем

$$\|z_{\rho,v}-z_{\rho,u}\|_{C(\Pi)}+\|(z_{\rho,v}-z_{\rho,u})'_x\|_{C_y(\Pi)}+$$

$$+\|(z_{\rho,v}-z_{\rho,u})'_y\|_{C_x(\Pi)}\leqslant\lambda\Big\{\|\Delta_u f_\rho(x,\ y,\ v,\ u,\ z_{\rho,u})\|_{L_1(\Pi)}+ \tag{17}$$

$$+\operatorname*{vraisup}_{x\in[0,\ a]}\int_0^b|\Delta_u f_\rho(x,\ y,\ v,\ u,\ z_{\rho,u})|\,dy+$$

$$+\operatorname*{vraisup}_{y\in[0,\ b]}\int_0^a|\Delta_u f_\rho(x,\ y,\ v,\ u,\ z_{\rho,u})|\,dx\Big\},$$

где $\lambda>0$ — некоторое постоянное число.

Доказательство теоремы 1 можно провести по аналогии с [5, 8].

Обозначим через $D$ множество допустимых управлений, для которых существует единственное абсолютно непрерывное на П, ограниченное в норме (12) решение задачи (1)—(3).

Пусть $u_0\in D$ — оптимальное управление, доставляющее минимум функционалу (5). Тогда, очевидно,

$$I(u_0) = \inf_{u \in D} I(u). \qquad (18)$$

Обозначим далее через $\overline{D}$ замыкание множества $D$ в метрике [6]

$$\Delta(u_1, u_2) \equiv \operatorname{meas}\{(x, y) \in \Pi \mid u_1(x, y) \neq u_2(x, y)\}. \qquad (19)$$

В силу теоремы 1, п. п. 1, 3 и (6), как нетрудно видеть, задача (1)—(3) имеет единственное абсолютно непрерывное на $\Pi$ решение, ограниченное в норме (12) для любого управления $u \in \overline{D}$, и

$$I(u_0) = \inf_{u \in \overline{D}} I(u). \qquad (20)$$

В силу той же теоремы *1*, п. 2 для любого управления $u \in \overline{D}$ и любого $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ единственным образом разрешима и задача (14), (2), (3), причем, функционал

$$I_\rho(u) \equiv \int_0^b \int_0^a F_\rho(x, y, z_{\rho, u}, (z_{\rho, u})'_x, (z_{\rho, u})'_y, u(x, y))\, dx dy \qquad (21)$$

равномерно по $u \in \overline{D}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ ограничен и непрерывен в метрике (19) на $\overline{D}$. Из равномерной по $u \in \overline{D}$ оценки (15) и из свойств [3] средних функций (7) заключаем теперь, что равномерно по $u \in \overline{D}$

$$I_\rho(u) \to I(u) \qquad (22)$$

при $\rho \to 0$, а следовательно, и

$$\inf_{u \in \overline{D}} I_\rho(u) \to \inf_{u \in \overline{D}} I(u) \qquad (23)$$

при $\rho \to 0$. Из (22) и (23) вытекает существование такой функции $\varepsilon(\rho) > 0$, $\varepsilon(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, что

$$\inf_{u \in \overline{D}} I_\rho(u) \leqslant I_\rho(u_0) \leqslant \inf_{u \in \overline{D}} I_\rho(u) + \varepsilon(\rho). \qquad (24)$$

*Теорема 2.* Пусть $V$ — полное метрическое пространство с метрикой $d(u, v)$ и $G(v)$ — непрерывный, ограниченный снизу функционал на $V$. Тогда для любого $u \in V$ такого, что

$$\inf_V G \leqslant G(u) \leqslant \inf_V G + \varepsilon$$

и для любого $\lambda > 0$ существует $v \in V$ такой, что

$$G(v) \leqslant G(u), \quad d(u, v) \leqslant \lambda, \quad \forall w \in V, \quad w \neq v,$$

$$G(v) < G(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w).$$

Доказательство теоремы *2* см. в [6].

Применяя теорему *2* в нашем случае, получаем, что для любого $0 < \rho \leqslant \rho_0$ в $\overline{D}$ существует такое управление $u_\rho(x, y)$, которое минимизирует функционал

$$I_\rho(u) + \varepsilon^{1/2}(\rho)\,\Delta(u, u_\rho) \tag{25}$$

в пространстве $\overline{D}$, где управление $u_\rho(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta(u_0, u_\rho) \leqslant \varepsilon^{1/2}(\rho). \tag{26}$$

Так как $u_\rho \in \overline{D}$, то по теореме 1, п. 4 любая вариация $u_\rho^\delta(x, y)$ управления $u_\rho(x, y)$ вида

$$u_\rho^\delta(x, y) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} v \in U, \ (x, y) \in \Pi_\delta, \ \Pi_\delta \equiv \{(x, y) \in \Pi \mid \overline{x} - \delta \leqslant x \leqslant \overline{x}, \ \overline{y} - \delta \leqslant y \leqslant \overline{y}\}, \\ u_\rho(x, y), \ (x, y) \notin \Pi_\delta \end{cases}$$

при достаточно малых $\delta > 0$ также принадлежит $\overline{D}$.

Следовательно, по аналогии с [4, 5] можно записать необходимое условие оптимальности управления $u_\rho(x, y)$ в форме принципа минимума в гладкой оптимизационной задаче для системы (14), (2), (3) с функционалом (25), для которых выполняются оценки (8), (9).

*Теорема 3.* Пусть $z_\rho(x, y)$ — есть единственное абсолютно непрерывное на $\Pi$ решение задачи (14), (2), (3), соответствующее оптимальному управлению $u_\rho(x, y)$, $0 < \rho \leqslant \rho_0$. Тогда почти всюду на $\Pi$ для любого $u \in U$

$$\begin{gathered} F_\rho(x, y, z_\rho(x, y), (z_\rho(x, y))'_x, (z_\rho(x, y))'_y, u_\rho(x, y)) + \\ + (\psi_\rho(x, y), f_\rho(x, y, z_\rho(x, y), (z_\rho(x, y))'_x, (z_\rho(x, y))'_y, \\ u_\rho(x, y))) \leqslant F_\rho(x, y, z_\rho(x, y), (z_\rho(x, y))'_x, (z_\rho(x, y))'_y, u) + \\ + (\psi_\rho(x, y), f_\rho(x, y, z_\rho(x, y), (z_\rho(x, y))'_x, \\ (z_\rho(x, y))'_y, u)) + \varepsilon^{1/2}(\rho), \end{gathered} \tag{27}$$

где функция $\psi_\rho \in L_\infty(\Pi)$ есть решение векторного линейного уравнения (* — означает транспонирование)

$$\psi_\rho(x, y) - \int_y^b \int_x^a \nabla_z^* f_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y))\, \psi_\rho(x, y)\, dx dy - \int_y^b \nabla_p^* f_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y))\, \psi_\rho(x, y) dy -$$

$$- \int_x^a \nabla_q^* f_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y))\, \psi_\rho(x, y)\, dx = \tag{28}$$

$$= \int_y^b \int_x^a \nabla_z F_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y))\, dx dy +$$

$$+ \int_y^b \nabla_p F_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y))\, dy +$$

$$+ \int_x^a \nabla_q F_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y))\, dx.$$

## 3 НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Получим теперь с помощью теоремы 3 и предельного перехода $\rho \to 0$ необходимые условия оптимальности управления $u_0(x, y)$ в оптимизационной задаче (1) — (3), (5). Заметим сразу, что из теоремы 1, п. п. 2, 4 и из (26) следует сходимость

$$\| z_\rho - z_0 \|_{C(\Pi)} + \| (z_\rho - z_0)'_x \|_{L_p^y(\Pi)} + \| (z_\rho - z_0)'_y \|_{L_p^x(\Pi)} \to 0 \tag{29}$$

при $\rho \to 0$ для любого $1 \leqslant p < +\infty$.

Введем в рассмотрение полунепрерывные сверху по $(z, p, q) \in S_{zpq}^{M_1}$ для всех $u \in S_u^{M_2}$ при почти всех $(x, y) \in \Pi$ функции $MD_{z_i} f^j(x, y, z, p, q, u)$, $i, j = \overline{1, n}$, и полунепрерывные снизу по $(z, p, q) \in S_{zpq}^{M_1}$ для всех $u \in S_u^{M_2}$ при почти всех $(x, y) \in \Pi$ функции $mD_{z_i} f^j(x, y, z, p, q, u)$, $i, j = \overline{1, n}$ с помощью равенств (см., например, [9])

$$MD_{z_i} f^j(x, y, z, p, q, u) \equiv \lim_{\delta\to 0} \operatorname*{vraisup}_{\eta \in S(\xi,\delta)} D_{z_i} f^j(x, y, \eta, u),$$

$$mD_{z_i} f^j(x, y, z, p, q, u) \equiv \lim_{\delta\to 0} \operatorname*{vraiinf}_{\eta \in S(\xi,\delta)} D_{z_i} f^j(x, y, \eta, u),$$

где $S(\xi, \delta)$ — $\delta$-окрестность точки $\xi \equiv (z, p, q) \in S^{M_1}_{zpq}$. Аналогично определяются и функции $MD_{p_i} f^j(x, y, z, p, q, u), \ldots, mD_{q_i} F(x, y, z, p, q, u)$. Нетрудно видеть, что

$$D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y)) = D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho,$$

$$(z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_0(x, y)) + D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y,$$

$$u_\rho(x, y)) - D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_0(x, y)) \leqslant MD_{z_i} f^j(x, y,$$

$$z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y)) + \Bigg\{\Bigg[\frac{1}{\rho^{3n}} \int \omega_\rho (MD_{z_i} f^j(x, y,$$

$$\eta, u_0(x, y)) - MD_{z_i} f^j(x, y, z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y)))\, d\eta\Bigg]^+ +$$

$$+ D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y)) - D_{z_i} f^j_\rho(x, y,$$

$$z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_0(x, y))\Bigg\} = MD_{z_i} f^j(x, y, z_0, (z_0)'_x,$$

$$(z_0)'_y, u_0(x, y)) + \alpha^{ij}_\rho(x, y),$$

где через $\alpha^{ij}_\rho(x, y)$ обозначено выражение в фигурных скобках,

$$[g(x, y)]^+ \equiv \{g(x, y), \text{ если } g(x, y) \geqslant 0;\ 0, \text{ если } g(x, y) < 0\}.$$

Справедлива аналогичная оценка и снизу:

$$D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y)) \geqslant$$

$$\geqslant mD_{z_i} f^j(x, y, z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y)) + \beta^{ij}_\rho(x, y),$$

где $([g(x, y)]^- \equiv \{g(x, y), \text{ если } g(x, y) \leqslant 0;\ 0, \text{ если } g(x, y) > 0\})$

$$\beta_\rho^{ij}(x, y) \equiv \left[\frac{1}{\rho^{3n}} \int \omega_\rho (mD_{z_i} f^j(x, y, \eta, u_0(x, y)) - \right.$$

$$\left. - mD_{z_i} f^j(x, y, z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y))) \, d\eta \right]^- +$$

$$+ D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_\rho(x, y)) -$$

$$- D_{z_i} f^j_\rho(x, y, z_\rho, (z_\rho)'_x, (z_\rho)'_y, u_0(x, y)).$$

Аналогичные неравенства имеют место и для производных $D_{p_i} f^j_\rho, \ldots, D_{q_i} F_\rho$.

Обозначим через $\Psi$ множество решений $\psi \in L_\infty(\Pi)$ системы

$$\psi(x, y) - \int\limits_y^b \int\limits_x^a A(x, y)\psi(x, y)dx\,dy - \int\limits_y^b B(x, y)\psi(x, y)dy -$$

$$- \int\limits_x^a C(x, y)\psi(x, y)dx = \int\limits_y^b \int\limits_x^a D(x, y)dxdy + \int\limits_y^b E(x, y)dy + \tag{30}$$

$$+ \int\limits_x^a G(x, y)dx,$$

где элементы $A_{ij}(x, y), \ldots, G_i(x, y)$, $i, j = \overline{1, n}$ (компоненты функциональных $(n \times n)$-матриц $A, B, C$ и векторов $D, E, G$ соответственно) есть всевозможные наборы измеримых на $\Pi$ функций, удовлетворяющих неравенствам

$$mD_{z_i} f^j(x, y, z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y)) \leqslant A_{ji}(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant MD_{z_i} f^j(x, y, z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y)), \tag{31}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$mD_{q_i} F(x, y, z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y)) \leqslant G_i(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant MD_{q_i} F(x, y, z_0, (z_0)'_x, (z_0)'_y, u_0(x, y)).$$

В силу линейности системы (30) такие решения существуют для любого измеримого набора (31) [5, 8]. Из (30), учитывая (4), (6), (31), имеем

$$|\psi(x, y)| \leqslant Kn^2\left(\int\limits_y^b\int\limits_x^a |\psi(x, y)|\,dxdy + \int\limits_y^b |\psi(x, y)|\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^a |\psi(x, y)|\,dx\right) + N(M_1 + \varkappa, M_2)\,n(ab + a + b).$$

Комбинируя последнее неравенство с неравенствами Гронуолла—Вендроффа [10], получаем

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Pi)} \leqslant \nu, \tag{32}$$

где $\nu > 0$ — постоянная, зависящая лишь от $a$ $b$, $n$, $K$, $N(M_1 + \varkappa, M_2)$. Из неравенства (32) заключаем, что множество $\Psi \subset L_\infty(\Pi)$ ограничено в $L_\infty(\Pi)$. По той же причине равномерно по $0 < \rho \leqslant \rho_0$ ограничены в $L_\infty(\Pi)$ все решения $\psi_\rho \in L_\infty(\Pi)$ сопряженной системы (28) .Покажем теперь, что из сходимости по мере при $s \to \infty$ коэффициентов $A_{ij}^s(x, y), \ldots, G_i^s(x, y)$, удовлетворяющих неравенствам (31), к $A_{ij}(x, y), \ldots, G_i(x, y)$ соответственно следует сходимость по мере соответствующих решений $\psi^s(x, y)$ к $\psi(x, y)$. Заметим при этом сразу, что в силу равномерной ограниченности всех этих последовательностей их сходимость по мере равносильна сходимости в $L_p(\Pi)$ для любого $1 \leqslant p < +\infty$. Из (30), (3[1]), (32) имеем

$$|\psi^s - \psi| \leqslant Kn^2\left(\int\limits_y^b\int\limits_x^a |\psi^s - \psi|\,dxdy + \int\limits_y^b |\psi^s - \psi|\,dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^a |\psi^s - \psi|\,dx\right) + \nu\left(\int\limits_0^b\int\limits_0^a |A^s - A|\,dxdy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^b |B^s - B|\,dy + \int\limits_0^a |C^s - C|\,dx\right) + \int\limits_0^b\int\limits_0^a |D^s - D|\,dxdy +$$

$$+ \int\limits_0^b |E^s - E|\,dy + \int\limits_0^a |G^s - G|\,dx.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int\limits_y^b\int\limits_x^a |\psi^s - \psi|\,dxdy \leqslant Kn^2\left(\int\limits_y^b\int\limits_x^a \left(\int\limits_y^b\int\limits_x^a |\psi^s - \psi|\,dxdy\right)dx\,dy + \right.$$

$$+\int_y^b\Big(\int_y^b\int_x^a|\psi^s-\psi|\,dxdy\Big)dy+\int_x^a\Big(\int_y^b\int_x^a|\psi^s-\psi|\,dxdy\Big)dx\Big)+$$

$$+\nu(ab\,\|A^s-A\|_{L_1(\Pi)}+b\,\|B^s-B\|_{L_1(\Pi)}+$$

$$+a\,\|C^s-C\|_{L_1(\Pi)})+ab\,\|D^s-D\|_{L_1(\Pi)}+b\,\|E^s-E\|_{L_1(\Pi)}+$$

$$+a\,\|G^s-G\|_{L_1(\Pi)}.$$

Комбинируя последнее неравенство опять же с неравенствами Гронуолла—Вендроффа (см., например, [5, 8]), нетрудно получить оценку

$$\|\psi^s-\psi\|_{L_1(\Pi)}\leqslant\mu(\|A^s-A\|_{L_1(\Pi)}+\|B^s-B\|_{L_1(\Pi)}+$$

$$+\|C^s-C\|_{L_1(\Pi)}+\|D^s-D\|_{L_1(\Pi)}+\|E^s-E\|_{L_1(\Pi)}+$$

$$+\|G^s-G\|_{L_1(\Pi)}),$$

где $\mu>0$ — постоянная, зависящая лишь от $a$ $b$, $n$, $K$, $N(M_1+\varkappa,\ M_2)$ $\left(\|A\|_{L_1(\Pi)}\equiv\sum\limits_{ij}\|A_{ij}\|_{L_1(\Pi)}\right.$ и т. д.), из которой и следует сходимость по мере, а следовательно (в силу равномерной ограниченности), и в $L_p(\Pi)$ для любого $1\leqslant p<+\infty$ решений $\psi^s\in L_\infty(\Pi)$ к $\psi\in L_\infty(\Pi)$.

Выберем теперь из семейства решений $\{\psi_\rho(x,\ y)\}$, $0<\rho\leqslant\rho_0$, сопряженной системы (28) последовательность $\{\psi_{\rho_\kappa}(x,\ y)\}$, слабо сходящуюся в $L_2(\Pi)$ при $k\to\infty$ $(\rho_\kappa\to 0)$ к некоторой функции $\psi_0\in L_\infty(\Pi)$ (это можно сделать в силу слабой компактности шара в $L_2$). Из свойств средних функций (7), условий (4), (6), а также в силу (26), (29) легко видеть, что равномерно по $0<\rho\leqslant\rho_0$ ограниченные функции $\alpha_\rho^{ij}(x,\ y)$, $\beta_\rho^{ij}(x,\ y)$ сходятся по мере к нулю при $\rho\to 0$. Применяя теперь теорему о совпадении сильного и слабого замыканий выпуклого множества в $L_2$, заключаем, что для любого $\delta>0$

$$\psi_0\in(\overline{\mathrm{conv}\,\Psi})_\delta\,, \tag{33}$$

где $\overline{\mathrm{conv}}\Psi$ — выпуклое замыкание множества $\Psi$ (пересечение всех замкнутых выпуклых множеств, содержащих данное множество $\Psi$) в норме $L_2(\Pi)$ или, что эквивалентно, в смысле сходимости по мере на $\Pi$ (т. к. $\Psi$ — ограниченное в $L_\infty(\Pi)$ множество), а через $(S)_\delta$ обозначено выпуклое множество

$$(S)_\delta \equiv \{\psi \in L_2(\Pi) \mid \exists\, \psi_1 \in S \subset L_2(\Pi),\ \ \|\psi_1 - \psi\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \delta\}.$$

Из (33) ввиду произвольности $\delta > 0$ получаем

$$\psi_0 \in \overline{\operatorname{conv}}\, \Psi. \tag{34}$$

Покажем, наконец, что для почти всех $(x, y) \in \Pi$

$$\begin{gathered} F(x,\ y,\ z_0,\ (z_0)'_x,\ (z_0)'_y,\ u_0(x,\ y)) + (\psi_0(x,\ y),\ f(x,\ y,\ z_0, \\ (z_0)'_x,\ (z_0)'_y,\ u_0(x,\ y))) = \inf_{u \in U} \{F(x,\ y,\ z_0,\ (z_0)'_x, (z_0)'_y,\ u) + \\ + (\psi_0(x,\ y),\ f(x,\ y,\ z_0,\ (z_0)'_x,\ (z_0)'_y,\ u))\}. \end{gathered} \tag{35}$$

Действительно, имеем, учитывая (27), очевидное неравенство для любого $s > 0$:

$$\begin{gathered} \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} F_{\rho_k}\left(x,\ y,\ z_{\rho_k},\ (z_{\rho_k})'_x,\ (z_{\rho_k})'_y,\ u_{\rho_k}\right) + \\ + \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \psi_{\rho_k},\ f\left(x,\ y,\ z_0,\ (z_0)'_x,\ (z_0)'_y,\ u_0(x,\ y)\right)\right) + \\ + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \left(\psi_{\rho_k},\ \left[f_{\rho_k}\left(x,\ y,\ z_{\rho_k},\ (z_{\rho_k})'_x,\ (z_{\rho_k})'_y,\ u_{\rho_k}\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - f\left(x,\ y,\ z_0,\ (z_0)'_x,\ (z_0)'_y,\ u_0(x,\ y)\right)\right]\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} F_{\rho_k}\left(x,\ y,\ z_{\rho_k},\ (z_{\rho_k})'_x,\ (z_{\rho_k})'_y,\ u\right) + \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \psi_{\rho_k},\right. \\ \left. f(x,\ y,\ z_0,\ (z_0)'_x,\ (z_0)'_y,\ u)\right) + \\ + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \left(\psi_{\rho_k}, [f_{\rho_k}(x,\ y,\ z_{\rho_k},\ (z_{\rho_k})'_x,\ (z_{\rho_k})'_y,\ u) - \right. \\ \left. - f(x,\ y,\ z_0,\ (z_0)'_x,\ (z_0)'_y,\ u)]\right) + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^{1/2}(\rho_k). \end{gathered}$$

Соотношения (26), (29) позволяют, не ограничивая общности, считать последовательности $\{(z_{\rho_k})'_x\}$, $\{(z_{\rho_k})'_y\}$, $\{u_{\rho_k}\}$,

$k = 1, 2, \ldots$, сходящимися к $(z_0)'_x$, $(z_0)'_y$, $u_0$ соответственно на некотором множестве полной меры в П. Также не ограничивая общности, можно считать последовательность $\left\{\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\psi_{\rho_k}\right\}$, $s = 1, 2, \ldots$, сходящейся на том же множестве полной меры (см., например, [3], стр. 319) к функции $\psi_0(x, y)$. Вместе с условиями (4), (6) это позволяет перейти к пределу при $s \to \infty$ в последнем неравенстве, после чего мы и получаем (35).

Таким образом доказана следующая теорема.

*Теорема 4.* Пусть $u_0(x, y)$ минимизирующее управление в оптимизационной задаче (1)—(3), (5). Тогда существует такая функция $\psi_0 \in L_\infty(\Pi)$, удовлетворяющая включению (34), где множество $\Psi$ состоит из всех решений системы (30), коэффициенты которой есть всевозможные измеримые наборы $A_{ij}(x, y), \ldots, G_i(x, y)$, $i, j = \overline{1, n}$, удовлетворяющие неравенствам (31), что выполняется соотношение (35).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Clarke F H The maximum principle under minimal hypothesis — SIAM J Control and Optim, 1976, v 14, № 6, p 1078—1091
2 Варга Дж Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями — М Наука, 1977
3 Смирнов В И Курс высшей математики — М ГИФМЛ, 1959, т 5
4 Плотников В И Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида — Изв АН СССР Сер. матем, 1972, т 36, № 3, с 652—679
5 Плотников В. И, Сумин В И Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса—Дарбу — Журн. вычисл матем и матем физ, 1972, т 12, № 1, с 61—77
6 Ekeland I On the Variational Principle — J Math Anal and Appl, 1974, v 47, № 2, p 324—353
7 Сакс С Теория интеграла — М ИЛ, 1949
8 Плотников В И, Сумин В И Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса—Дарбу — Диф уравн, 1972, т 8, № 5, с 845—856
9 Камкс Э Интеграл Лебега—Стилтьеса — М · ГИФМЛ, 1959
10 Беккенбах Э., Беллман Р Неравенства —М. Мир, 1965

Дата поступления статьи
14 января 1980 года.

Владимир Иванович Плотников

Михаил Иосифович Сумин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ НЕГЛАДКИМИ СИСТЕМАМИ ГУРСА—ДАРБУ

Подписано в печать 24.01.80 МЦ 09605. Формат 60 x 84 1/16.
Бумага писчая Гарнитура литературная Печать высокая.
Объем 1,25 п. л Тираж 120 экз. Заказ № 144 Бесплатно

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ), г. Горький, 603600. ГСП-51, ул Лядова 25/14, т. 38-90-91, д 5—09.

Горьковская городская типография областного управления издательств, полиграфии и книжной торговли, ул. Свердлова, 37.