МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
ГОРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт № 134

РЕКУРРЕНТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. III.

Я. И. Альбер
С. В. Шильман

Горький — 1980

УДК 517.9

Исследуются: 1) рекуррентные числовые неравенства

$$\lambda_{n+1} \leqslant (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \lambda_n^p + \gamma_n, \quad n=1, 2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0, \ \lambda_1 = \bar{\lambda},$$

где

$$p > 0, \ \alpha_n = \alpha n^{-t}, \ \alpha > 0, \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\gamma_n = \gamma n^{-s}, \ \gamma > 0, \ s > t, \ \sum_{1}^{\infty} \beta_n < \infty,$$

2) дифференциальные неравенства

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant \beta(t)\lambda(t) - \alpha(t)\lambda^p(t) + \gamma(t),$$

$$t \geqslant t_0, \ \lambda(t) \geqslant 0, \ \lambda(t_0) = \lambda_0, \ \int_{\infty}^{0} \beta(t)dt < \infty,$$

$$p>0, \ \alpha(t) = \alpha t^{-n}, \ 0 \leqslant n \leqslant 1, \ \gamma(t) = \gamma t^{-m}, \ \gamma > 0, \ \alpha > 0, \ m > n.$$

Устанавливаются неасимптотические оценки скорости убывания $\lambda_n(\lambda(t))$ к нулю, более точные по порядку по сравнению с [1, 2]. Асимптотитические оценки Чжуна, Вентера, Буркхольдера и других авторов, которые раньше были известны только для линейных рекуррентных неравенств, следуют теперь как частные случаи из полученных в настоящей работе общих утверждений.

ВВЕДЕНИЕ

В практике численного решения детерминированных и стохастических задач широкое применение получили итеративные алгоритмы и их непрерывные аналоги. Многие свойства этих вычислительных процедур (сходимость, скорость сходимости, устойчивость и т. д.) исследуются с помощью числовых и дифференциальных неравенств следующего вида:

$$\lambda_{n+1} \leqslant (1+\beta_n)\lambda_n - \alpha_n \Psi(\lambda_n) + \gamma_n, \quad n = 1, \ldots, \lambda_1 = \bar{\lambda}; \tag{1}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant \beta(t)\lambda(t) - \alpha(t)\Psi(\lambda) + \gamma(t), \quad \lambda(t_0) = \lambda_0, \tag{2}$$

где λ_n, α_n, β_n, γ_n — положительные (или неотрицательные) числовые последовательности, $\lambda(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — положительные (или неотрицательные) функции, $\Psi(\lambda)$ — монотонно возрастающая функция, $\Psi(0)=0$.

В такой общей форме эти неравенства впервые изучались в работах [1, 2] одним из авторов. Там были предложены альтернативные методы исследования этих неравенств, и на их основе получены неасимптотические оценки скорости сходимости λ_n $(\lambda(t))$ к нулю при условиях

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = 0$$

$$\left(\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)dt = \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \beta(t)dt < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t)/\alpha(t) = 0\right).$$

В настоящей работе предлагается существенно новый вариант альтернативного метода. Однако исследуются неравенства более узкого класса:

$$\Psi(\lambda) = \lambda^p, \quad p > 0, \quad \alpha_n = \alpha n^{-t}, \quad \alpha > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\gamma_n = \gamma n^{-s}, \quad \gamma > 0, \quad s > t, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$$

$$(\alpha(t) = \alpha t^{-n}, \ 0 \leqslant n \leqslant 1, \ \gamma(t) = \gamma t^{-m}, \ m > n,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \beta(t)\, dt < \infty)$$

и для них устанавливаются неасимптотические оценки скорости убывания λ_n $(\lambda(t))$, более точные по порядку по сравнению с [1, 2]. Эти оценки совпадают с асимптотическими (неулучшаемыми) оценками, которые раньше были известны только для линейного случая (см., например, [3—5]).

1. ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим вначале одно вспомогательное нелинейное неравенство

$$\lambda_{n+1} \leqslant (1 + \beta_n)\lambda_n - \alpha_n \lambda_n^p, \quad p > 0. \tag{3}$$

Лемма 1. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ удовлетворяет неравенству (3) и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$, $\alpha_n \geqslant 0$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\lambda_n \leqslant \bar{C} \lambda_1 \exp\left(- \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\alpha}_i\right) \quad \text{при } p = 1; \tag{4}$$

а при $p \neq 1$ $\lambda_n \leqslant \bar{C} \lambda_1 [\chi(n)]^{\frac{1}{1-p}}$, если $\chi(n) > 0$, и $\lambda_n = 0$, если (5)

$$\chi(n) \leqslant 0, \ \chi(n) = 1 + (p-1)\lambda_1^{p-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\alpha}_i.^*$$

Здесь

$$\bar{C} \geqslant \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta_i),$$

$$\bar{\alpha}_n = \frac{\alpha_n}{1 + \beta_n} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta_i)\right]^{p-1}.$$

---

* $\chi(n)$ становится отрицательным только при $p < 1$.

Доказательство. Введем новую переменную $\mu_n \geqslant 0$ по формуле

$$\lambda_n = \mu_n \prod_{i=1}^{n-1} (1+\beta_i), \tag{6}$$

где

$$\prod_{i=m}^{n} (1+\beta_i) = 1 \text{ при } n<m.$$

Тогда из неравенства (3) следует, что

$$\mu_{n+1} \leqslant \mu_n - \bar{\alpha}_n \mu_n^p . \tag{7}$$

Теперь исследуем это неравенство.

1. Пусть $p=1$. Тогда, выполняя итерации, из (7) найдем

$$\mu_n \leqslant \mu_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1-\bar{\alpha}_i).$$

Поскольку $\mu_n \geqslant 0$, то в силу (7) $\bar{\alpha}_n \leqslant 1$. Используя справедливую для любых $\bar{\alpha}_i$ оценку

$$1-\bar{\alpha}_i \leqslant e^{-\bar{\alpha}_i},$$

получим

$$\mu_n \leqslant \mu_1 \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \bar{\alpha}_i\right), \quad n \geqslant 2.$$

2. Пусть $p>0$, $p \neq 1$. Покажем, что в этом случае для (7) имеет место оценка (5) ($\bar{C}=1$). Приведем доказательство этого утверждения для $p<1$, используя метод математической индукции.

Итак, пусть при $p<1$ справедливо неравенство

$$\mu_n \leqslant \mu_1 \left[1-(1-p)\mu_1^{p-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\alpha}_i\right]^{\frac{1}{1-p}} . \tag{8}$$

Докажем, что тогда из соотношения (7) следует оценка вида

$$\mu_{n+1} \leqslant \mu_1 \left[1-(1-p)\mu_1^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i\right]^{\frac{1}{1-p}} . \tag{9}$$

Введем для удобства величины z_n и r_n, определяемые равенствами

$$\bar{\alpha}_n z_n^{-1} = \mu_n^{1-p},$$

$$\bar{\alpha}_n r_n^{-1} = \mu_1^{1-p}\left[1-(1-p)\mu_1^{p-1}\sum_{i=1}^{n-1}\bar{\alpha}_i\right].$$

Тогда соотношение (8) будет эквивалентно неравенству

$$z_n \geqslant r_n. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться в том, что $z_n \in [0,1]$. Действительно, неотрицательность z_n очевидна, а то, что $z_n \leqslant 1$, следует из соотношения

$$\mu_n(1-z_n) = \mu_n - \bar{\alpha}_n \mu_n^p \geqslant \mu_{n+1} \geqslant 0.$$

Введя в правые части (7) и (9) новые переменные z_n и r_n, получим соответственно

$$\mu_{n+1}^{1-p} \leqslant \bar{\alpha}_n z_n^{-1}(1-z_n)^{1-p} \tag{11}$$

и

$$\mu_{n+1}^{1-p} \leqslant \bar{\alpha}_n r_n^{-1}\left[1-(1-p)r_n\right]. \tag{12}$$

Теперь нужно доказать справедливость оценки (12) при условии, что имеют место неравенства (10) и (11). Для этого достаточно показать, что

$$z_n^{-1}(1-z_n)^{1-p} \leqslant r_n^{-1}[1-(1-p)r_n]$$

или

$$\frac{r_n}{1-(1-p)r_n} \leqslant \frac{z_n}{(1-z_n)^{1-p}}.$$

При условии (10) и $z_n \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$\frac{r_n}{1-(1-p)r_n} \leqslant \frac{z_n}{1-(1-p)z_n}.$$

Поэтому для доказательства достаточно убедиться в том, что

$$\frac{z_n}{1-(1-p)z_n} \leqslant \frac{z_n}{(1-z_n)^{1-p}}.$$

Это требование эквивалентно соотношению

$$u(z_n) = [1-(1-p)z_n](1-z_n)^{p-1} \geqslant 1. \qquad (13)$$

Поскольку

$$u(0) = 1, \quad \lim_{z_n \to 1} u(z_n) = \infty \text{ и } \frac{du}{dz_n} = \frac{p(1-p)z_n}{(1-z_n)^{2-p}} \geqslant 0$$

при $z_n \in [0,1]$, то неравенство (13) действительно имеет место.

Таким образом, справедливость оценки (8) при $p < 1$ доказана; при $p > 1$ доказательство проводится аналогичным способом.

Рассматривая формально правую часть оценки (8), легко заметить, что при $p < 1$ выражение в квадратных скобках становится отрицательным, начиная с номера

$$n_0 = \min \left\{ s\colon \sum_{i=1}^{s-1} \bar{\alpha}_i > \frac{\lambda_1^{1-p}}{1-p} \right\}.$$

В условиях леммы ($\mu_n \geqslant 0$) это означает, что все $\mu_n = 0$ при $n \geqslant n_0$. Поэтому (8) следует переписать в виде

$$\mu_n \leqslant \mu_1 [\chi(n)]^{\frac{1}{1-p}}, \text{ если } \chi(n) > 0; \ \mu_n = 0, \text{ если } \chi(n) \leqslant 0, \qquad (8')$$

$$\chi(n) = 1-(1-p)\mu_1^{p-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\alpha}_i .$$

При $p > 1$ $\chi(n) > 0$ при всех $n \geqslant 1$.

Окончательные утверждения (4), (5) леммы получаются переходом от μ_n к λ_n согласно (6) и заменой $\prod_{i=1}^{n-1}(1+\beta_i)$ мажорирующей константой $\bar{C}$.

Замечание 1. Лемма 1 была раньше (см [6]) сформулирована только для $\beta_n \equiv 0$ *и* $p \geqslant 1$. Доказательство ее при $p = 2$ приведено в [7].

Замечание 2. Полезны следующие оценки $\bar{\alpha}_n$ снизу:

$$\bar{\alpha}_n \geqslant \frac{\alpha_n}{1+\beta_n} \text{ при } p \geqslant 1,$$

$$\bar{\alpha}_n \geqslant \frac{\alpha_n}{(1+\beta_n)\bar{C}^{1-p}} \quad \text{при } p < 1.$$

Если дополнительно известно, что $\beta_n < 1$, то $\frac{1}{1+\beta_n} \geqslant 1 - \beta_n$.

Перейдем теперь к изучению линейных $(p = 1)$ неравенств типа (1).

Лемма 2. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{b}{n}\lambda_n + \frac{d}{n^s}, \tag{14}$$

где $s > 1$, $b > 0$, $d > 0$, и пусть

1) $s - 1 < b$. Тогда: а) если $c_0 \geqslant \frac{b}{b - s + 1}$,

то $ab \geqslant s - 1$,

$a = \frac{c_0 - 1}{c_0}$ и при $\lambda_1 > d\left(\frac{c_0}{b} + 1\right)$ справедливы оценки

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 \left(\frac{1}{n-1}\right)^{ab}, \quad 2 \leqslant n \leqslant x^* = \left[\frac{\lambda_1}{a\left(\frac{c_0}{b} + 1\right)}\right]^{\frac{1}{ab-s+1}} + 1; \tag{15}$$

$$\lambda_n \leqslant d\left(\frac{c_0}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{s-1}, \quad n > x^*, \tag{16}$$

а при $\lambda_1 \leqslant d\left(\frac{c_0}{b} + 1\right)$ неравенство (16) выполняется при всех $n \geqslant 2$; б) если же $1 < c_0 < \frac{b}{b - s + 1}$ то $ab < s - 1$ и

$$\lambda_n \leqslant C\left(\frac{1}{n-1}\right)^{ab}, \quad n \geqslant 2, \tag{17}$$

$$\hat{C} = \max\left[\lambda_1,\ d\left(\frac{c_0}{b} + 1\right)\right].$$

2) $s - 1 \geqslant b$. Тогда при любых $c_0 > 1$ имеет место (17).

Доказательство. Сформулируем следующую альтернативу:

$$H_1 : \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-1},$$

$$H_2 : \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-1}, \quad C_1 = \frac{d}{b} c_0,$$

где $c_0 > 1$ — произвольное число.

При каждом $n \geqslant 1$ справедлива либо гипотеза H_1, либо гипотеза H_2. Введем следующие обозначения: I — множетсво чисел натурального ряда, $n \geqslant 1$,

$$I_1 = \left\{n \in I : \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-1}\right\},$$

$$I_2 = \left\{n \in I : \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-1}\right\}.$$

Ясно, что $I = I_1 \cup I_2$.

Пусть I_2 — пустое множество, тогда при всех $n \geqslant 1$ выполняется гипотеза H_1 и тем более

$$\lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n-1}\right)^{s-1}, \quad n = 2, \ldots \tag{18}$$

Предположим теперь, что I_1 — пустое множество. Тогда в силу того, что

$$\frac{d}{n^s} \leqslant \frac{b}{c_0 n} \lambda_n,$$

из неравенства (14) при всех $n \in I = I_2$ следует

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n + \frac{ab}{n} \lambda_n, \quad a = \frac{c_0 - 1}{c_0}. \tag{19}$$

Применяя лемму 1 к последовательности λ_n, удовлетворяющей (19), получаем (см. [18])

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 \exp\left(-ab\sum_{m=1}^{n-1} m^{-1}\right) \leqslant \lambda_1 \left(\frac{1}{n-1}\right)^{ab}. \qquad (20)$$

Если I_1 конечно (или I_2 конечно), то оценка (20) (или (18)) имеет место, начиная с некоторых $n = N_1$ (или $n = N_2$), а ситуация, которая возможна при $n < N_1$ (или $n < N_2$), описывается ниже.

Пусть, наконец, I_1 и I_2 — бесконечные множества. Обозначим через $n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots$ элементы I_1. Очевидно, что

$$\lambda_{n_l} < C_1 \left(\frac{1}{n_l}\right)^{s-1} \leqslant C_1 \left(\frac{1}{n_l - 1}\right)^{s-1}, \quad n_l \geqslant 2.$$

Рассмотрим интервал $I_l = [n_l, n_{l+1}]$, предпологая $n_{l+1} > n_l + 1$. Тогда в силу (14)

$$\lambda_{n_l+1} \leqslant \lambda_{n_l} + \frac{d}{n_l^s} \leqslant (C_1 + d)\left(\frac{1}{n_l}\right)^{s-1}. \qquad (21)$$

Если $b < 1$ или $n_l > b$, то для λ_{n_l+1} справедлива более точная оценка:

$$\lambda_{n_l+1} \leqslant \left(1 - \frac{b}{n_l}\right)\lambda_{n_l} + \frac{d}{n^s} \leqslant C_1 \left(\frac{1}{n_l}\right)^{s-1}. \qquad (22)$$

Для остальных значений $n \in I_l$, $n > n_l + 1$ справедливо (19). Это последнее неравенство запишем в виде

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+m-1} - \frac{ab}{n_l + m - 1} \lambda_{n_l+m-1},$$

$$m = 2, \ldots, n_{l+1} - n_l.$$

Отсюда получаем соотношение, аналогичное (20):

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+1} \left(\frac{n_l+1}{n_l+m}\right)^{ab} \leqslant \lambda_{n_l+1}\left(\frac{n_l+1}{n_l+m-1}\right)^{ab}. \qquad (23)$$

Таким образом, при всяком $n \geqslant 2$ имеет место одна из оценок (18), (20)—(23). Теперь задача сводится к нахождению общих мажорирующих оценок в зависимости от значений параметрв a, b, d и s. При этом следует иметь в виду то обстоятельство, что в оценке (21) значение «аргумента» n

сдвинуто на единицу по отношению к номеру оцениваемого члена последовательности λ_n. Поэтому для нахождения общих мажорирующих формул необходимо было и все другие оценки привести к «аргументу» $n-1$.

Случай 1. $s-1 \leqslant ab$. Величина λ_1 может быть как больше, так и меньше, чем C_1+d. Имея это в виду, получаем

$$\lambda_n \leqslant C\left(\frac{1}{n-1}\right)^{s-1}, \quad n=2,\dots, \tag{24}$$

где
$$C=\max\left[\lambda_1, \frac{d}{b} c_0+d\right].$$

Случай 2: $s-1>ab$ Тогда

$$\lambda_n \leqslant C\left(\frac{1}{n-1}\right)^{ab}, \quad n=2,\dots$$

Предположим, что $s-1<b$. Так как $a=\frac{c_0-1}{c_0}<1$, то в зависимости от значения c_0 может быть $ab \geqslant s-1$, если $c_0 \geqslant \frac{b}{b-s+1}$, и тогда $\lambda_n \leqslant C\left(\frac{1}{n-1}\right)^{s-1}$, $n \geqslant 2$. Если же $1<c_0<\frac{b}{b-s+1}$, то $ab<s-1$, $\lambda_n \leqslant C\left(\frac{1}{n-1}\right)^{ab}$, $n \geqslant 2$.

В случае $c_0 \geqslant \frac{b}{b-s+1}$ имеют место более точные оценки. Пусть $\lambda_1>C_1+d$, тогда графики функций

$$y_1(x)=\lambda_1\left(\frac{1}{x-1}\right)^{ab} \quad \text{и} \quad y_2(x)=(C_1+d)\left(\frac{1}{x-1}\right)^{s-1}$$

имеют на интервале $(2,\infty)$ точно одну точку пересечения $x^*=\left(\frac{\lambda_1}{C_1+d}\right)^{\frac{1}{ab-s+1}}+1$ и общая мажорирующая последовательность дает оценки (15), (16). При $\lambda_1 \leqslant C_1+d$ точек пересечения нет, поэтому при всех $n \geqslant 2$ имеет место (16). Теперь предположим, что $s-1 \geqslant b$. В этом случае при любых $c_0 > 1$ выполняется неравенство $s-1 > ab$, что влечет за собой оценку (17) при всех $n \geqslant 2$. Лемма доказана.

Замечание 3. Подчеркнем еще раз, что при значениях параметров $s-1 < b$, $c_0 \geqslant \dfrac{b}{b-s+1}$ и произвольных $\lambda_1 > 0$ наряду с оценками (15), (16) существует единая, но более грубая по сравнению с ними, оценка (24). При этом для $c_0 = \dfrac{b}{b-s+1}$ (15) и (16) автоматически переходят в утверждение (24), поскольку такое значение c_0 дает $x^* = \infty$.

Далее нетрудно показать, что при $ab > s-1$ множество I_1 конечным быть не может, так как в противном случае мы получили бы, что при всех достаточно больших n $C_1\left(\dfrac{1}{n}\right)^{s-1} \leqslant \lambda_n \leqslant C_2\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^{ab}$ с некоторой фиксированной константой $C_2 > 0$. Поэтому $n_l \to \infty$, если $s-1 < b$ и $c_0 > \dfrac{b}{b-s+1}$. Отсюда следует, что существует $\bar{l} > 1$ такое, что при всех $l \geqslant \bar{l}$ выполняется $n_l > b$, и в силу (22), для таких n_l $\lambda_{n_l+1} \leqslant C_1\left(\dfrac{1}{n_l}\right)^{s-1}$, $C_1 = \dfrac{d}{b}c_0$. Сравнивая в этой ситуации оценки (18)—(23), получаем дополнительно к (16) оценку $\lambda_n \leqslant C_1\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^{s-1}$, $n \geqslant \bar{n} = \max\{n_{\bar{l}}, x^*\}$.

Наименьшее значение константы C_1 соответствует $c_0 = \dfrac{b}{b-s+1}$ и равно $\dfrac{d}{b-s+1}$. Таким образом, при $s-1 < b$,

$c_0 \geqslant \dfrac{b}{b-s+1}$ лемма 2 дает две асимптотические оценки:

1) $\lambda_n \leqslant C\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^{s-1}$, где $C > \dfrac{d}{b-s+1}$ — произвольная константа. Это по порядку соответствует асимптотической оценке Чжуна (см. [3], стр. 220), но мажорирующая константа, указанная в оценке Чжуна, в точности равна

$\dfrac{d}{b-s+1}$; 2) $\lambda_n \leqslant C\left(\dfrac{1}{n-1}\right)^{s-1}$, $C = \max\left[\lambda_1, \dfrac{d}{b-s+1}\right]$

(при $c_0 = \frac{b}{b-s+1}$). Это неравенство совпадает с неасимптотическим результатом Катковника (см. [4], стр. 282), установленным для этих значений параметров s и b.

В случае $s-1 \geqslant b$, $b < 1$ аналогичным образом можно улучшить мажорирующую константу в оценке (17), положив в ней $C = \max\left[\lambda_1, \frac{d}{b} c_0\right]$.

Замечание 4. Пусть $s-1 < b$ и $s \to b+1$. Тогда в (16) $c_0 \to \infty$. В этом случае необходимо пользоваться оценкой (17), выбирая c_0 из интервала $\left(1, \frac{b}{b-s+1}\right)$. Тоже самое при $s \to 1+b$ имеет место и тогда, когда $s-1 \geqslant b$. Для сравнения приведем результаты Вентера ([3], стр. 242):

$$\lambda_n = O\left(\frac{\ln n}{n^b}\right), \quad \text{если} \quad s-1 = b,$$

$$\lambda_n = O(n^{-b}), \text{ если } s-1 > b.$$

По сравнению с ними наша оценка (17) хотя и имеет несколько меньший порядок убывания ($ab < b$ в силу того, что $a < 1$), но вместе с тем обладает и рядом преимуществ, а именно: 1) оценка (17) — неасимптотическая, 2) точно выписана мажорирующая константа, 3) при $s-1 = b$ эта константа ограничена.

Выше было приведено достаточно подробное дказательство леммы 2. Доказательства следующих лемм базируются на том же альтернативном методе, что неизбежно связано с повторениями. С целью уменьшения их числа авторы далее будут прибегать к определенным сокращениям изложения.

Лемма 3. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_2, \dots$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{b}{n^t}\lambda_n + \frac{d}{n^s}, \tag{25}$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $s > t$, $b > 0$, $d \geqslant 0$. Тогда при любых $c_0 > 1$ справедливы оценки

$$\lambda_n \leqslant C \exp\left\{-\frac{ab}{1-t}[(n-1)^{1-t}-1]\right\}, \quad 2 \leqslant n \leqslant x^*; \quad (26)$$

$$\lambda_n \leqslant d\left(\frac{c_0}{b}+1\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{s-t}, \quad n > x^*, \quad (27)$$

где $C = \max\left[\lambda_1, d\left(\frac{c_0}{b}+1\right)\right]$, $a = \frac{c_0-1}{c_0}$,

x^* есть единственный на интервале $(2, \infty)$ корень уравнения

$$\left[d\left(\frac{c_0}{b}+1\right)\right]^{\frac{1}{t-s}}(x-1) =$$

$$= C^{\frac{1}{t-s}} \exp\left\{\frac{ab}{(1-t)(s-t)}[(x-1)^{1-t}-1]\right\}.$$

При этом, если $s-t < b$, $c_0 \geqslant \frac{b}{b-s+1}$ и $\lambda_1 \leqslant d\left(\frac{c_0}{b}+1\right)$, то неравенство (27) выполняется при всех $n \geqslant 2$.

Доказательство. При каждом $n \geqslant 1$ рассмотрим следующую альтернативу:

$$H_1: \quad \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-t}, \quad (28)$$

$$H_2: \quad \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-t}, \quad C_1 = \frac{c_0 d}{b},$$

где $c_0 > 1$ — произвольная константа.

Введем обозначения

$$I_1 = \left\{n \in I: \quad \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-t}\right\},$$

$$I_2 = \left\{n \in I: \quad \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{s-t}\right\}.$$

Если I_2 — пустое множество, то при всех $n \in I_1 = I$ выполняется гипотеза H_1. Если же I_1 — пустое множество, то при всех $n \in I_2 = I$ справедливо неравенство

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{ab}{n^t} \lambda_n, \tag{29}$$

где $\quad a = \dfrac{c_0 - 1}{c_0}$.

Применяя лемму 1 к неравенству (29), имеем

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 \exp\left(- ab \sum_{m=1}^{n-1} m^{-t} \right).$$

Используя известную формулу суммирования расходящихся рядов ([8], стр. 336), получаем

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 \exp\left[- \frac{ab}{1-t} (n^{1-t} - 1) \right].$$

Но это противоречит гипотезе H_2. Таким образом, I_1 не может быть пустым множеством. По этой же причине оно не может быть и конечным. Если I_2 конечно, то оценка (28) имеет место, начиная с некоторого $n = N_1$. Пусть, наконец, I_1 и I_2 — одновременно бесконечные множества. Заметим, прежде всего, что если выполняется (на конечном множестве) последнее неравенство, то тем более будет справедливо соотношение

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 \exp\left\{ - \frac{ab}{1-t} [(n-1)^{1-t} - 1] \right\}. \tag{30}$$

Обозначая через $n_1, \ldots, n_l, \ldots$ элементы I_1, будем иметь

$$\lambda_{n_l} \leqslant C_1 \left(\frac{1}{n_l} \right)^{s-t}.$$

Рассмотрим произвольный интервал $I_l = [n_l, n_{l+1}]$ и, не исключая общности, примем, что $n_{l+1} > n_l + 1$. В силу (25) при $n = n_l + 1$

$$\lambda_{n_l+1} \leqslant (C_1 + d) \left(\frac{1}{n_l} \right)^{s-t}. \tag{31}$$

Если $\quad \alpha_{n_l} = \dfrac{b}{n_l^t} < 1$ при всех $n_l > \overline{n}$, то

$$\lambda_{n_l+1} \leqslant C_1 \left(\frac{1}{n_l} \right)^{s-t}. \tag{32}$$

Для остальных $n \in I_l$, $n > n_l + 1$ справедливо неравенство (29). Применяя лемму 1 и усиливая результат заменой n_l+m на $n_l + m - 1$, получаем

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+1} \exp\left\{-\frac{ab}{1-t}\left[(n_l + m - 1)^{1-t} - (n_l + 1)^{1-t}\right]\right\}, \quad (33)$$

$m = 2, \ldots, n_{l+1} - n_l$.

Последовательность, стоящая в правой части (33), на интервале I_l совпадает с оценкой (30), справедливой для всех $n \geqslant 2$, если в ней положить

$$\lambda_1 = \lambda_{1(l)} = \lambda_{n_l+1} \exp\left\{\frac{ab}{1-t}\left[n_l + 1)^{1-t} - 1\right]\right\}, \quad \text{т. е.}$$

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{1(l)} \exp\left\{-\frac{ab}{1-t}\left[(n-1)^{1-t} - 1\right]\right\}. \quad (34)$$

Таким образом, при всяком $n \geqslant 2$ величина λ_n оценивается одной из формул (28), (30)—(33).

С целью получения общей мажоранты рассмотрим две функции:

$$y_1(x) = \exp\left\{-\frac{ab}{1-t}\left[(x-1)^{1-t} - 1\right]\right\},$$

$$y_2(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{s-t}, \qquad x \geqslant 2.$$

Первая функция при $x = n$ совпадает с точностью до константы с правой частью (30), вторая — с правой частью (31). Они монотонно убывают, в точке $x = 2$ равны единице, и их производные в этой точке принимают значения $y'_1(2) = -ab$, $y'_2(2) = -(s-t)$. Нетрудно также убедиться, что графики функций $\bar{C}_1 y_1(x)$ и $\bar{C}_2 y_2(x)$ ($\bar{C}_1 > 0$, $\bar{C}_2 > 0$) могут пересекаться на интервале $[2, \infty)$ не более чем в двух точках.

Возможны следующие ситуации:

1. $s - t > ab$. а) Пусть $\lambda_1 > C_1 + d$, тогда функции $\lambda_1 y_1(x)$ и $(C_1 + d) y_2(x)$ на интервале $(2, \infty)$ пересекаются в одной точке x^*. Поскольку $\lambda_1 y_1(x) \geqslant (C_1 + d)\, y_2(x)$ при $n \leqslant x^*$, то $\lambda_1 y_1(x)$ мажорирует оценки по гипотезе H_1. В том же ин-

тервале $[2, \infty)$ в силу (30) последовательность $\lambda_1 y_1(n)$ мажорирует на каждом множестве $n_l+2 \leqslant n < n_{l+1}$ оценки, полученные по гипотезе H_2. (Здесь нужно иметь в виду, что если $\lambda_1 y_1(n_l+2) > \lambda_{1(l)} y_1(n_l+2)$, то $\lambda_1 y_1(n) \geqslant \lambda_{1(l)} y_1(n)$ при всех $n \in I$.) б) Пусть $\lambda_1 \leqslant C_1 + d$. Функции $(C_1+d) y_1(x)$ и $(C_1+d) y_2(x)$ на интервале $(2, \infty)$ пересекаются в одной точке x^* и, следовательно, $(C_1+d) y_1(n) \geqslant (C_1+d) y_2(n)$ при $2 \leqslant n \leqslant x^*$. Повторяя рассуждения пункта а), получаем, что при $2 \leqslant n \leqslant x^*$ мажорантой является $(C_1+d) y_1(n)$.

Теперь для любых λ_1 рассмотрим ситуацию на интервале (x^*, ∞). Ясно, что оценки по гипотезе H_1 и значения λ_{n_l+1} не превосходят $(C_1+d) y_2(n)$. Кроме того, эта же последовательность мажорирует оценку (34) на любом интервале I_l. Действительно, предполагая противное, мы получили бы, что графики функций $(C_1+d)\, y_2(x)$ и $\lambda_{1(l)} y_1(x)$ пересекаются на интервале $[2, \infty)$ более, чем в двух точках.

2. $s-t \leqslant ab$. Тогда: а) при $\lambda_1 > C_1 + d$ справедливо рассуждение пункта 1; б) при $\lambda_1 \leqslant C_1 + d$ на интервале $(2, \infty)$ точек пересечения кривых $\lambda_1 y_1(x)$ и $(C_1+d) y_2(x)$ нет. Следовательно, при всех $n \geqslant 2$ имеет место неравенство (27) или, что то же самое, оценки (26) и (27), если в них положить $x^* = 1$.

Далее заметим, что если $s-t \leqslant b$, то, выбирая $c_0 \geqslant \dfrac{b}{b-s+t}$, получим $s-t \leqslant ab$. Если же $1 < c_0 < \dfrac{b}{b-s+t}$, то будем иметь $s-t > ab$. Наконец, при $s-t \geqslant b$ условие $s-t > ab$ выполняется для любых значений $c_0 > 1$. Лемма доказана.

Замечание 5. Из доказательства леммы (см. п. 2а) следует, что если $s-t \leqslant ab$ и $\lambda_1 > C_1 + d$, то мажорантой может служить последовательность $\lambda_1 \left(\dfrac{1}{n-1}\right)^{s-t}$, $n \geqslant 2$. Присоединяя к этому результат п. 2в), получаем, что при $c_0 \geqslant \dfrac{b}{b-s+t}$ существует единая, но более грубая по сравнению с (26), (27) оценка

$$\lambda_n \leqslant C \left(\frac{1}{n-1}\right)^{s-t}, \quad C = \max\left[\lambda_1, C_1 + d\right].$$

Замечание 6. Если $a_{n_l} = \frac{b}{n_l^t} < 1$ при $l > \bar{l}$, то для $n \geqslant \max[n_{\bar{l}}, x^*]$ мажорирующую константу $C = (c_0/b+1)d$ можно заменить на меньшую: $C = \frac{c_0}{b} d$. В силу неограниченности множества I_1 это всегда имеет место, начиная с некоторого $\bar{l}$. Для значений $n \geqslant \max[n_{\bar{l}}, x^*]$ наш результат, отмеченнный в замечании 5, совпадает с утверждением [4], стр. 282, которое было получено там только для случая $s - t < b$. Кроме того, поскольку $c_0 > 1$ — произвольная константа, то мы получаем асимптотическую формулу $\lambda_n \leqslant C\left(\frac{1}{n-1}\right)^{s-t}$, справедливую при любых $C > \frac{d}{b}$. Это совпадает с асимптотической оценкой Чжуна $\lim\limits_{n\to\infty} \sup n^{t-s}\lambda_n \leqslant \frac{d}{b}$ (см. [3] стр. 227).

Замечание 7. Можно проверить и убедиться в том, что при $t \to 1$ оценки леммы 3 переходят в соответствующие оценки леммы 2.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Приступим теперь к изучению нелинейных неравенств типа (1) с $\Psi(\lambda) = \lambda^p, p > 0, p \neq 1$.

Лемма 4. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{b}{n}\lambda_n^p + \frac{d}{n^s};$$

где $b > 0$, $d \geqslant 0$, $p > 1$, $s > 1$. Тогда при всех $n \geqslant 2$

$$\lambda_n \leqslant C\left[1 + (p-1)C^{p-1}\frac{c_0 - 1}{c_0} b \ln(n-1)\right]^{-\frac{1}{p-1}}, \quad (35)$$

где $C = \max\left[\lambda_1, \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d\right]$, $c_0 > 1$ выбирается из условия

$$\frac{c_0-1}{c_0}\left[\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}}+\mathrm{d}\right]^{p-1} b\leqslant\frac{s-1}{p}. \tag{36}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую альтернативу:

$$H_1:\quad \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}}.$$

$$H_2:\quad \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}},\quad C_1=\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $c_0 > 1$.

Обозначим через I_1 и I_2 следующие множества значений n:

$$I_1=\left\{n\in I:\quad \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}}\right\},$$

$$I_2=\left\{n\in I:\quad \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}}\right\}.$$

Предположим, что I_2 — пустое множество, тогда при $\forall n\in I$ имеет место гипотеза H_1 и тем более

$$\lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-1}{p}}.$$

Пусть теперь I_1 — пустое множество, тогда при $\forall n\in I$ имеет место гипотеза H_2 и, следовательно,

$$\lambda_{n+1}\leqslant\lambda_n-\frac{ab}{n}\lambda_n^p,$$

где $a=(c_0-1)/c_0$.

Из леммы 1 получаем

$$\lambda_n\leqslant\lambda_1\left[1+(p-1)\lambda_1^{p-1}ab\sum_{m=1}^{n-1}m^{-1}\right]^{-\frac{1}{p-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_1\left[1+(p-1)\lambda_1^{p-1}ab\ln(n-1)\right]^{-\frac{1}{p-1}},$$

Если I_1 (I_2) конечны, то последние оценки справедливы, начиная с некоторого номера $n = N_1$ ($n = N_2$). Пусть, наконец, I_1 и I_2— бесконечные множества. Обозначим через $n_1, \ldots, n_l, \ldots$ элементы I_1. Рассмотрим произвольный интервал $I_l = [n_l, n_{l+1}]$. В силу исходного неравенства при $n = n_l + 1$

$$\lambda_{n_l+1} \leqslant C_1 \left(\frac{1}{n_l}\right)^{\frac{s-1}{p}} + \frac{d}{n_l^s} \leqslant (C_1 + d)\left(\frac{1}{n_l}\right)^{\frac{s-1}{p}}.$$

Последнее неравенство справедливо потому, что $\frac{s-1}{p} < s$.

Не исключая общности, можно считать $n_{l+1} > n_l + 1$. При $n = n_l + m$, $m = 2, \ldots, n_{l+1} - n_l$ имеет место альтернатива H_2, поэтому

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+m-1} - \frac{ab}{n} \lambda_{n_l+m-1}^p.$$

Используя лемму 1, отсюда получаем

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+1}\{1 + (p-1)ab\, \lambda_{n_l+1}^{p-1}[\ln(n_l + m - 1) - \ln(n_l + 1)]\}^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Выведем условие, при выполнении которого последовательность

$$u(n) = (C_1 + d)\,[1 + (p-1)(C_1 + d)^{p-1} ab \ln(n-1)]^{-\frac{1}{p-1}}$$

мажорирует при $n \geqslant 2$ последовательность

$$v(n) = (C_1 + d)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-1}{p}}.$$

Для этого сравним производные соответствующих функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке $x = 2$:

$$u'(2) = -ab(C_1 + d)^p, \quad v'(2) = -\frac{s-1}{p}(C_1 + d).$$

Можно показать, что функции $u(x)$ и $v(x)$ могут пересекаться не более, чем в двух точках. Поскольку $u(2) = v(2)$

и $\dfrac{v(x)}{u(x)} > 0$ при $x \to \infty$, то $v(x) < u(x)$ при условии $|u'(2)| \leqslant \leqslant |v'(2)|$. Последнее означает, что

$$\frac{c_0-1}{c_0} b \left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right] \leqslant \frac{s-1}{p}.$$

Это неравенство можно удовлетворить при всех значениях $\dfrac{s-1}{p}$ $\left(0 < \dfrac{s-1}{p} < \infty\right)$ за счет выбора c_0.

Пусть $\lambda_1 \leqslant C_1 + d$, тогда в силу очевидного неравенства

$$\frac{A}{1+Ax} \leqslant \frac{B}{1+Bx}, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad B \geqslant A$$

$u(n)$ мажорирует λ_n при $n \in [n_l + 2, n_{l+1})$, следовательно,

$$\lambda_n < (C_1 + d) \left[1 + (p-1)(C_1+d)^{p-1} ab \ln (n-1) \right]^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Если же $\lambda_1 > C_1 + d$, то при условии (36) для всех $n \geqslant 2$ будет справедливой оценка (35) с $C = \lambda_1$. Отсюда и следуют утверждения леммы.

Лемма 5. Пусть последовательность неотрицательных чи- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{b}{n^t} \lambda_n^p + \frac{d}{n^s},$$

где $b > 0$, $d \geqslant 0$, $0 \leqslant t < 1$, $p > 1$, $s > t$.

Имеют место следующие утверждения:

1. Пусть $\dfrac{s-t}{p} < \dfrac{1-t}{p-1}$. Тогда: а) если $c_0 > 1$ выбирается из условия

$$\left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right]^{p-1} \frac{c_0 - 1}{c_0} b \leqslant \frac{s-t}{p}, \tag{37}$$

то при $\lambda_1 > \left(\dfrac{d}{h} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d$

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 \left\{ 1 + \lambda_1^{p-1} \frac{p-1}{1-t} \frac{c_0-1}{c_0} b \left[(n-1)^{1-t} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{p-1}},$$

$$2 \leqslant n \leqslant x^*; \tag{38}$$

$$\lambda_n \leqslant \left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right] \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{s-t}{p}}, \quad n > x^*, \tag{39}$$

а при $\lambda_1 \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d$ оценка (39) выполняется при всех $n \geqslant 2$. Здесь x^* — единственный на интервале $(2, \infty)$ корень уравнения

$$x = 1 + \left[\frac{\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d}{\lambda_1} \right]^{\frac{p}{s-t}} \left\{ 1 + \lambda_1^{p-1} \frac{c_0-1}{c_0} b \frac{p-1}{1-t} \times \right.$$

$$\left. \times \left[(x-1)^{1-t} - 1 \right] \right\}^{\frac{p}{(p-1)(s-t)}}, \tag{40}$$

б) если же $c_0 > 1$ выбирается из условия

$$\left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right]^{p-1} \frac{c_0-1}{c_0} b < \frac{s-t}{p},$$

то справедливы оценки (38)—(40) с заменой λ_1 на константу

$$C = \max \left[\lambda_1, \left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right].$$

2. Пусть $\frac{s-t}{p} \geqslant \frac{1-t}{p-1}$. Тогда для любых c_0, удовлетворяющих условиям $c_0 > 1$ и

$$\left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right]^{p-1} \frac{c_0-1}{c_0} b \leqslant \frac{s-t}{p},$$

при всех $n \geqslant 2$ имеет место неравенство (38) с заменой λ_1 на константу C.

Доказательство. При каждом $n \geqslant 1$ можно рассмотреть следующую альтернативу:

$$H_1 : \lambda_n < \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-t}{p}},$$

$$H_2 : \lambda_n \geqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-t}{p}}, \quad c_0 > 1.$$

Введем обозначения

$$I_1 = \left\{ n \in I : \quad \lambda_n < \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-t}{p}} \right\}$$

$$I_2 = \left\{ n \in I : \quad \lambda_n \geqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-t}{p}} \right\}.$$

Если $I_2 = \varnothing$, то при всх $n \in I$ справедлива гипотеза H_1 и тем более

$$\lambda_n < \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-t}{p}}. \qquad (41)$$

Если же $I_1 = \varnothing$, то для $\forall n \in I$ справедлива гипотеза H_2 и, следовательно,

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{ab}{n^t} \lambda_n^p, \quad a = \frac{c_0 - 1}{c_0}.$$

Отсюда с помощью леммы 1 находим

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 \left\{ 1 + \lambda_1^{p-1} \frac{p-1}{1-t} \frac{c_0 - 1}{c_0} b \left[(n-1)^{1-t} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{p-1}},$$

$$n \geqslant 2. \qquad (42)$$

Как и в предыдущих леммах рассмотрим интервал $I_l = [n_l, n_{l+1}]$, $n_{l+1} > n_l + 1$, где $n_l \in I_1$. Из неравенства (40) следует, что при $n = n_l + 1$

$$\lambda_{n_l+1} \leqslant \left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n_l}\right)^{\frac{s-t}{p}} + \frac{d}{n_l^s} \leqslant \left[\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d\right]\left(\frac{1}{n_l}\right)^{\frac{s-t}{p}}. \quad (43)$$

При $n = n_l + m$, $m = 2, \ldots, n_{l+1} - n_l$ имеет место альтернатива H_2. Отсюда следует неравенство

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+m-1} - \frac{ab}{n^t}\lambda^p_{n_l+m-1}, \quad a = \frac{c_0 - 1}{c_0}.$$

Согласно лемме 1 это дает оценку

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+1}\left\{1 + \lambda^{p-1}_{n_l+1} ab\, \frac{p-1}{1-t}\left[(n_l + m)^{1-t} - (n_l + 1)^{1-t}\right]\right\}^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Усиливая результат заменой $n_l + m$ на $n_l + m - 1$, эту формулу можно записать в виде (42), если в ней положить

$$\lambda_1 = \lambda_{1(l)} = \lambda_{n_l+1}\left\{1 - \lambda^{p-1}_{n_l+1} ab\, \frac{p-1}{1-t}\left[(n_l + 1)^{1-t} - 1\right]\right\}^{-\frac{1}{p-1}}.$$

В зависимости от соотношения степеней $\frac{s-t}{p}$ и $\frac{1-t}{p-1}$, а также входящих в фрмулы (41)—(43) констант возможны следующие ситуации.

1. Пусть $\frac{s-t}{p} < \frac{1-t}{p-1}$. Сравним производные в точке $x = 2$ двух функций $u(x)$ и $v(x)$, соответствующих двум последовательностям, с общими членами вида

$$u(n) = (C_1 + d)\left\{1 + (C_1 + d)^{p-1} ab\, \frac{p-1}{1-t} \times \left[(n-1)^{1-t} - 1\right]\right\}^{-\frac{1}{p-1}}$$

$$v(n) = (C_1 + d)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-t}{p}}, \quad C_1 = \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Непосредственное вычисление дает

$$u'(2) = -(C_1 + d)^p ab, \quad v'(2) = -(C_1 + d)\frac{s-t}{p}.$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ могут пересекаться не более, чем в двух точках. Поскольку $u(2) = v(2)$ и $\frac{u(x)}{v(x)} \to 0$ при $x \to \infty$, то $v(x) > u(x)$ при $\forall x > 2$, если $|u'(2)| \geqslant |v'(2)|$. Последнее означает, что

$$(C_1 + d)^{p-1} ab \geqslant \frac{s-t}{p}. \tag{44}$$

Если же $|u'(2)| < |v'(2)|$, или

$$(C_1 + d)^{p-1} ab < \frac{s-t}{p}, \tag{45}$$

то на интервале $(2, \infty)$ есть обязательно одна точка пересечения функций $u(x)$ и $v(x)$. Из анализа функций $u(x)$ и $v(x)$ получаем следующее.

Если $\lambda_1 \leqslant C_1 + d$, то для $n \geqslant 2$

$$\lambda_n \leqslant (C_1 + d)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-t}{p}},$$

когда имеет место условие (44). Действительно, в этой ситуации последовательности (38) и (39) на интервале $(2, \infty)$ не пересекаются, так как в противном случае графики функций $u(x)$ и $v(x)$ на этом же интервале пересекались бы более чем в двух точках, чего быть не может. Если же выполняется требование (45), то

$$\lambda_n \leqslant (C_1 + d)\left\{1 + (C_1 + d)^{p-1} ab \frac{p-1}{1-t} \times \right.$$
$$\left. \times \left[(n-1)^{1-t} - 1\right]\right\}^{-\frac{1}{p-1}} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant n \leqslant x^*; \tag{46}$$

$$\lambda_n \leqslant (C_1 + d)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-t}{p}} \text{ при } n > x^*. \quad (47)$$

Здесь x^* есть решение уравнения $u(x) = v(x)$.

Теперь предположим, что $\lambda_1 > C_1 + d$. Тогда будут справедливы оценки (46), (47) с заменой $C_1 + d$ на λ_1 в $u(x)$ (в (46) и в уравнении $u(x) = v(x)$). То же самое имеет место при выполнении условия (45). Объединяя все эти рассуждения, получаем первое утверждение леммы.

2. Пусть $\frac{s-t}{p} \geqslant \frac{1-t}{p-1}$. В этом случае $\frac{v(x)}{u(x)} \to 0$ при $x \to \infty$, поэтому, если $|v'(2)| \geqslant |u'(2)|$, или

$$(C_1 + d)^{p-1} ab \leqslant \frac{s-t}{p}, \quad (48)$$

то $u(x) > v(x)$ при всех $x > 2$. Используя неравенство

$$\frac{A}{1 + Ax} \leqslant \frac{B}{1 + Bx}, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad B \geqslant A,$$

нетрудно показать, что $u(x)$ мажорирует оценку λ_n при всех $n \in I$. Отсюда следует, что если $\lambda_1 \leqslant C_1 + d$, то при условии (48) выполняется оценка (46) для всех $n \geqslant 2$. Если же $\lambda_1 > C_1 + d$, то справедлива та же оценка с заменой $C_1 + d$ на λ_1. Лемма доказана.

Замечание 8. Если $\frac{s-t}{p} < \frac{1-t}{p-1}$ и $c_0 > 1$ удовлетворяет условию (37), то существует единая оценка

$$\lambda_n \leqslant C\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-t}{p}}, \quad C = \max\left[\lambda_1, \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d\right], \quad n \geqslant 2.$$

Лемма 6. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{b}{n} \lambda_n^p + \frac{d}{n^s},$$

где $p < 1$, $s > 1$, $b > 0$, $d \geqslant 0$. Тогда справедливы оценки

$$\lambda_n \leqslant [C^{1-p} - (1-p)ab\ln(n-1)]^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant n < x^*,$$
$$\lambda_n \leqslant \left[\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d\right]\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\bar{s}} \quad \text{при} \quad n > x^*, \tag{49}$$

где $\bar{s} = \min\left\{\frac{s-1}{p}, s\right\}$, $C = \max\left\{\lambda_1, \left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d\right\}$, $a = \frac{c_0 - 1}{c_0}$, $c_0 > 1$ — произвольная константа, x^* есть единственный на интервале $(2, \infty)$ корень уравнения

$$\left[\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d\right]\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\bar{s}} = [C^{1-p} - (1-p)ab\ln(x-1)]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Если $ab \geqslant \left[\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d\right]^{1-p} \bar{s}$ и $\lambda_1 \leqslant \left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} + d$, то $x^* = 1$.

Доказательство. Рассмотрим альтернативу вида

$$H_1:\ \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}},$$

$$H_2:\ \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}},\ C_1 = \left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}},\quad c_0 > 1.$$

Обозначим через I_1, I_2 множества

$$I_1 = \left\{n \in I:\ \lambda_n < C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}}\right\},$$

$$I_2 = \left\{n \in I:\ \lambda_n \geqslant C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{s-1}{p}}\right\}.$$

Предположим, что $I_2 = \varnothing$, тогда при $\forall\ n \in I_1 = I$ имеет место гипотеза H_1 и тем более.

$$\lambda_n < C_1 \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{s-1}{p}}, \quad n \geqslant 2. \tag{50}$$

Пусть тперь $I_1 = \varnothing$, тогда при $\forall n \in I_2 = I$ имеет место гипотеза H_2 и, следовательно,

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{ab}{n} \lambda_n^p, \quad a = \frac{c_0 - 1}{c_0}.$$

Согласно лемме 1 отсюда получим

$$\lambda_n \leqslant \lambda_1 [\chi(n)]^{\frac{1}{1-p}}, \text{ если } \chi(n) > 0; \quad \lambda_n = 0, \text{ если } \chi(n) \leqslant 0, \tag{51}$$

$$\chi(n) = 1 - (1-p)\lambda_1^{p-1} ab \ln(n-1).$$

Поскольку, начиная с некоторого конечного $\bar{n}$, $\chi(n)$ становится отрицательным, то $\lambda_n = 0$ при $n \geqslant \bar{n}$, а это противоречит гипотезе H_2. Следовательно, $I_1 \neq \varnothing$. По этой же причине оно не может быть и конечным множеством. Если же I_2 конечно, то существует такое N_1, что при $n \geqslant N_1$ имеет место оценка (50), а оценки λ_n при $n < N_1$ приводятся ниже.

Наконец, предположим, что I_1 и I_2 одновременно бесконечные множества и рассмотрим произвольный интервал $I_l = [n_l, n_{l+1}]$, $n_{l+1} > n_l + 1$. Через n_l обозначены элементы I_1. В силу исходного неравенства при $n = n_l + 1$ находим

$$\lambda_{n_l+1} \leqslant \lambda_{n_l} + \frac{d}{n_l^s} \leqslant C_1 \left(\frac{1}{n_l}\right)^{\frac{s-1}{p}} + \frac{d}{n_l^s} \leqslant (C_1 + d) \left(\frac{1}{n_l}\right)^{\bar{s}},$$

где $\quad \bar{s} = \min\left\{\frac{s-1}{p}, s\right\}$.

При $n = n_l + m$, $m = 2, \ldots, n_{l+1} - n_l$, имеет место альтернатива H_2 и, следовательно,

$$\lambda_{n_l+m} \leqslant \lambda_{n_l+m-1} - \frac{ab}{n} \lambda_{n_l+m-1}^p.$$

Используя лемму 1, отсюда получаем

$$\lambda_{n+m} \leqslant \{\lambda_{n_l+1}^{1-p} - (1-p)ab[\ln(n_l + m - 1) - \ln(n_l + 1)]\}^{\frac{1}{1-p}}.$$

Рассмотрим две функции: $v(x) = \lambda_1 \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\bar{s}}$ и

$$u(x) = [\lambda_1^{1-p} - (1-p)ab\ln(x-1)]^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{при} \quad x \geqslant 2.$$

В точке $x = 2$ они совпадают, а при $x \to \infty$ монотонно убывают; при этом $v(x) \to 0$, а $u(x) \to \infty$. Их производные в точке $x = 2$ соответственно равны $v'(2) = -\lambda_1\bar{s}$, $u'(2) = -\lambda_1^p ab$. Если $ab < \lambda_1^{1-p}\bar{s}$, то $|v'(2)| > |u'(2)|$ и кривые $v(x)$, $u(x)$ обязательно пересекутся на интервале $(2, \infty)$. Нетрудно показать, что $v(x)$ и $u(x)$ не могут иметь более двух точек пересечений. Отсюда, в частности, следует, что $u(n)$ при $\lambda_1 = C_1 + d$ всегда мажорирует λ_n для $n \in I_l$. Если же $ab > \lambda_1^{1-p}\bar{s}$, то функция $v(x)$ будет мажорировать и $u(x)$, однако условие это при любом фиксированном c_0 может нарушиться, если λ_1 будет иметь достаточно большое значение.

Пусть выполняется условие $ab < (C_1 + d)^{1-p}\bar{s}$. Тогда из этого анализа и полученных выше оценок следует, что при $\lambda_1 \leqslant C_1 + d$ выполняются неравенства

$$\lambda_n \leqslant [(C_1 + d)^{1-p} - (1-p)ab\ln(n-1)]^{\frac{1}{1-p}}, \quad 2 \leqslant n \leqslant x^*; \qquad (52)$$

$$\lambda_n \leqslant (C_1 + d)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\bar{s}}, \quad n > x^*, \qquad (53)$$

где x^* — единственная точка пересечения на интервале $(2, \infty)$ функций $u(x)$ и $v(x)$ при $\lambda_1 = C_1 + d$.

Если $\lambda_1 > C_1 + d$, то оценка будет определяться соотношениями (52), (53), если в (52) и в $u(x)$ заменить $C_1 + d$ на λ_1.

Теперь пусть $ab \geqslant (C_1 + d)\bar{s}$. Если $\lambda_1 \leqslant C_1 + d$, то мажорирующая последовательность имеет общий член вида

$$(C_1 + d)\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\bar{s}},$$

иными словами, справедлива оценка (52), (53), но следует принять, что $x^* = 1$.

При $\lambda_1 > C_1 + d$ оценку можно задать теми же формулами (52), (53) с заменой в (52) и в $u(x)$ $C_1 + d$ на λ_1.

Таким образом, оценка (49) применима при любых c_0, $c_0 > 1$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n - \frac{b}{n^t} \lambda_n^p + \frac{d}{n^s},$$

где $p < 1$, $s > t$, $0 \leqslant t < 1$, $b > 0$, $d \geqslant 0$. Тогда при любых c_0, $c_0 > 1$,

$$\lambda_n \leqslant \left\{ C^{1-p} - (1-p) \frac{ab}{1-t} [(n-1)^{1-t} - 1] \right\}^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant n \leqslant x^*,$$

$$\lambda_n \leqslant \left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right] \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\bar{s}} \quad \text{при} \quad n > x^*,$$

где $C = \max \left[\lambda_1, \left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right]$, $a = \frac{c_0 - 1}{c_0}$,

$$\bar{s} = \min \left\{ \frac{s-t}{p}, s \right\},$$

x^* есть единственный на интервале $(2, \infty)$ корень уравнения

$$\left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right] \left(\frac{1}{x-1} \right)^{\bar{s}} = \left[C^{1-p} - \frac{1-p}{1-t} \times \right.$$

$$\left. \times\, ab((x-1)^{1-t} - 1) \right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Если $ab \geqslant \bar{s} \left[\left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d \right]^{1-p}$ и $\lambda_1 \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} + d$,

то $x^* = 1$.

Доказательство этой леммы мы не приводим, поскольку оно с незначительными изменениями повторяет доказательство леммы 6.

Замечание 9. В леммах 6 и 7 существует $\bar{n}$ такое, что если

$$n \geqslant \bar{n} \text{ и } n_l \geqslant \bar{n}, \text{ то } \lambda_n < 1, \quad \frac{b}{n_l^t} < 1, \quad 0 < t \leqslant 1.$$

Тогда при $n \geqslant \bar{n}$ можно положить

$$C = \max \left\{ \lambda_1, \left(\frac{d}{b} c_0 \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Замечание 10. Если рассмотреть неравенство

$$\lambda_{n+1} \leqslant (1 + \beta_n)\lambda_n - \frac{b_n}{n^t} \lambda_n^p + \frac{d_n}{n^s}, \quad n = 1, \ldots,$$

где $p > 0, \quad s > t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant d_n \leqslant d, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$

и $\dfrac{b_n}{1 + \beta_n} \geqslant \begin{cases} b & \text{при } p \geqslant 1 \\ b\bar{C}^{1-p} & \text{при } p < 1 \end{cases}, \quad \bar{C} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \beta_n),$

то все приведенные в леммах 2—7 утверждения сохранятся при условии увеличения правых частей неравенств для λ_n в $\bar{C}$ раз.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Перейдем к рассмотрению дифференциальных неравенств, являющихся непрерывными аналогами ранее изучавшихся рекуррентных числовых неравенств.

Лемма 8. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant \beta(t)\lambda - \alpha(t)\lambda^p, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $p > 0$, $\beta(t)$, $\alpha(t)$ — неотрицательные функции. Предположим, кроме того, что $\int\limits_{t_0}^{\infty} \beta(t)dt < \infty$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\lambda(t) \leqslant \bar{C}\lambda_0 \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)d\tau\right) \qquad \text{при } p = 1,$$

а при $p \neq 1$

$$\lambda(t) \leqslant \bar{C}\lambda_0[\chi(t)]^{\frac{1}{1-p}}, \quad \text{если } \chi(t) > 0; \quad \lambda(t) = 0, \quad \text{если } \chi(t) \leqslant 0,$$

где

$$\chi(t) = 1 + (p-1)\lambda_0^{p-1}\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)^*, \quad \bar{C} \geqslant \exp\left[\int_{t_0}^{\infty} \beta(\tau)d\tau\right],$$

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)\exp\left[(p-1)\int_{t_0}^{t} \beta(\tau)d\tau\right], \quad \bar{\alpha}(t) \gtrless 0.$$

Доказательство. Произведем замену $\lambda(t)=\mu(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]$. Очевидно, что $\lambda_0 = \mu_0$. Тогда из исходного неравенства следует

$$\frac{d\mu}{dt} \leqslant -\bar{\alpha}(t)\mu^p. \tag{54}$$

1) Пусть $p = 1$, тогда отсюда следует, что

$$\mu(t) \leqslant \mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)d\tau\right).$$

2) Теперь рассмотрим неравенство (54) при $p < 1$. Имеем

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\mu}{\mu^p} \leqslant -\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)d\tau.$$

Интегрируя выражение слева, получаем

$$\frac{1}{1-p}\left[\mu^{1-p}(t) - \mu_0^{1-p}\right] \leqslant -\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует

$$\mu(t) \leqslant \left[\mu_0^{1-p} - (1-p)\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

С учетом замены и предположения $\lambda(t) \geqslant 0$ получаем утверждение леммы.

---

* $\chi(t)$ становится отрицательным только при $p < 1$.

3) Пусть теперь $p > 1$. Интегрируя неравенство (54), находим

$$-\frac{1}{p-1}\left[\mu^{1-p}(t)-\mu_0^{1-p}\right] \leqslant -\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{\mu^{p-1}} \geqslant \mu_0^{1-p} + (p-1)\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)d\tau,$$

или

$$\mu(t) \leqslant \frac{1}{\left[\mu_0^{1-p} + (p-1)\int_{t_0}^{t} \bar{\alpha}(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{p-1}}}.$$

С учетом замены опять получаем утверждение леммы.

Далее без доказательства будут приведены формулировки лемм, аналогичных леммам 2—7.

Лемма 9. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\frac{b}{t}\lambda + \frac{d}{t^m}, \quad t \geqslant t_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $b > 0$, $d \geqslant 0$, $m > 1$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ и, более того, имеют место следующие оценки:

1. Пусть $m-1 < b$. Тогда: а) если $c_0 \geqslant \dfrac{b}{b-m+1}$, то

$ab \geqslant m-1$, $a = \dfrac{c_0-1}{c_0}$ и при $\lambda_0 > \dfrac{dc_0}{b}\, t_0^{1-m}$

$$\lambda(t) \leqslant \lambda_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^{ab}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T^* = \left(\frac{b\lambda_0 t_0^{ab}}{dc_0}\right)^{\frac{1}{ab-m+1}}; \quad (55)$$

$$\lambda(t) \leqslant \frac{dc_0}{b}\left(\frac{1}{t}\right)^{m-1}, \quad t \geqslant T^*, \quad (56)$$

а при $\lambda_0 \leqslant \frac{d}{b} c_0 t_0^{1-m}$ неравенство (56) выполняется при всех $t \geqslant t_0$; б) если же $1 < c_0 < \frac{b}{b-m+1}$, то $ab < m-1$ и

$$\lambda(t) \leqslant C \left(\frac{t_0}{t}\right)^{ab}, \quad t \geqslant t_0,$$

где $C = \max\left[\lambda_0, \frac{d}{b} c_0 t_0^{1-m}\right]$.

2. Если $m-1 \geqslant b$, то при любых $c_0 > 1$ справедливо утверждение пункта 1б).

Лемма 10. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\frac{b}{t^n}\lambda + \frac{d}{t^m}, \quad t > t_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $b > 0$, $d \geqslant 0$, $m > n$, $0 \leqslant n < 1$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ и, кроме того, для $\lambda(t)$ можно указать следующие оценки. При любом $c_0 > 1$

$$\lambda(t) \leqslant C \exp\left[-\frac{ab}{1-n}(t^{1-n} - t_0^{1-n})\right], \quad t_0 \leqslant t \leqslant T^*; \tag{57}$$

$$\lambda(t) \leqslant \frac{d}{b} c_0 \left(\frac{1}{t}\right)^{m-n}, \quad t \geqslant T^*, \tag{58}$$

$$C = \max\left[\lambda_0, \frac{d}{b} c_0 t_0^{n-m}\right], \quad a = \frac{c_0 - 1}{c_0},$$

T^* есть единственная на интервале (t_0, ∞) точка пересечения функций (57) и (58). При этом, если $c_0 \geqslant \frac{t_0^{1-n} b}{t_0^{1-n} b - m + n}$ и $\lambda_0 \leqslant \frac{d}{b} c_0 t_0^{n-m}$, то неравенство (58) выполняется при всех $t \geqslant t_0$.

Лемма 11. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\frac{b}{t}\lambda^p + \frac{d}{t^m}, \quad t \geqslant t_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $b > 0, \quad d \geqslant 0, \quad p > 1, \quad m > 1.$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ и, более того,

$$\lambda(t) \leqslant \left[C^{1-p} + ab(p-1)\ln\frac{t}{t_0}\right]^{-\frac{1}{p-1}},$$

где

$$C = \max\left[\lambda_0, \left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} t_0^{\frac{1-m}{p}}\right], \quad a = \frac{c_0 - 1}{c_0},$$

c_0 выбирается из условия

$$\frac{m-1}{p} \geqslant ab\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{p-1}{p}} t_0^{\frac{(1-m)(p-1)}{p}}.$$

Лемма 12. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству.

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\frac{b}{t^n}\lambda^p + \frac{d}{t^m}, \quad t \geqslant t_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $b > 0, \quad d \geqslant 0, \quad p > 1, \quad m > n, \quad 0 \leqslant n < 1.$ Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ и имеют место следующие утверждения.

1. Пусть $\frac{1-n}{p-1} > \frac{m-n}{p}$. Тогда: а) если $c_0 > 1$ выбирается из условия $\left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \frac{c_0 - 1}{c_0} b t_0^{1-n+\frac{(n-m)(p-1)}{p}} \geqslant \frac{m-n}{p}$,

то при $\lambda_0 > \left(\frac{d}{b}c_0\right)^{\frac{1}{p}} t_0^{\frac{n-m}{p}}$

$$\lambda(t) \leqslant \lambda_0 \left[1 + \lambda_0^{p-1}\frac{p-1}{1-n}\frac{c_0 - 1}{c_0} b(t^{1-n} - t_0^{1-n})\right]^{-\frac{1}{p-1}}, \tag{59}$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant T^*;$$

$$\lambda(t) \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{m-n}{p}}, \quad t \geqslant T^*, \tag{60}$$

а при $\lambda_0 \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} t_0^{\frac{n-m}{p}}$ оценка (60) выполняется при всех $t \geqslant t_0$. Здесь T^* — единственная на интервале (t_0, ∞) точка пересечения функций (59) и (60); б) если же $c_0 > 1$ выбирается из условия

$$\left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{c_0 - 1}{c_0} b t_0^{1-n+\frac{(n-m)(p-1)}{p}} < \frac{m-n}{p},$$

то справедливы оценки (59), (60) с заменой λ_0 на константу

$$C = \max\left[\lambda_0, \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} t_0^{\frac{n-m}{p}}\right].$$

2. Пусть $\frac{1-n}{p-1} \leqslant \frac{m-n}{p}$. Тогда для любых c_0, удовлетворяющих условиям $c_0 > 1$ и

$$\left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{c_0 - 1}{c_0} b t_0^{1-n+\frac{(n-m)(p-1)}{p}} \leqslant \frac{m-n}{p},$$

при всех $t \geqslant t_0$ имеет место неравенство (59) с заменой λ_0 на константу C.

Лемма 13. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\frac{b}{t} \lambda^p + \frac{d}{t^m}, \quad t \geqslant t_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $p < 1$, $b > 0$, $d \geqslant 0$, $m > 1$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ и при любых значениях c_0, $c_0 > 1$ справедливы оценки

$$\lambda(t) \leqslant \left[C^{1-p} - (1-p)ab \ln \frac{t}{t_0}\right]^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T^*; \tag{61}$$

$$\lambda(t) \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{m-1}{p}} \quad \text{при} \quad t \geqslant T^*, \tag{62}$$

где $C = \max\left[\lambda_0, \quad \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t_0}\right)^{\frac{m-1}{p}}\right], \qquad a = \frac{c_0 - 1}{c_0},$

T^* — единственная на интервале (t_0, ∞) точка пересечения функций (61), (62). При этом, если

$$\frac{c_0 - 1}{c_0} b t_0^{\frac{(m-1)(1-p)}{p}} \geqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1-p}{p}} \frac{m-1}{p} \quad \text{и}$$

$$\lambda_0 \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t_0}\right)^{\frac{m-1}{p}}, \quad \text{то} \quad T^* = t_0.$$

Лемма 14. Пусть неотрицательная функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant -\frac{b}{t^n} \lambda^p + \frac{d}{t^m}, \quad t \geqslant t_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $p < 1$, $m > n$, $b > 0$, $d \geqslant 0$, $0 \leqslant n < 1$.

Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda(t) = 0$ и при любых значениях c_0, $c_0 > 1$ справедливы оценки

$$\lambda(t) \leqslant \left[C^{1-p} - ab \frac{1-p}{1-n} (t^{1-n} - t_0^{1-n})\right]^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T^*; \tag{63}$$

$$\lambda(t) \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{m-n}{p}} \quad \text{при} \quad t \geqslant T^*, \tag{64}$$

где $C = \max\left[\lambda_0, \quad \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{m-n}{p}}\right], \qquad a = \frac{c_0 - 1}{c_0},$

T^* — единственная точка пересечения на интервале (t_0, ∞) функций (63), (64). При этом, если

$$\frac{c_0 - 1}{c_0} b t_0^{\frac{(m-n)(1-p)}{p} + 1 - n} \geqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1-p}{p}} \frac{m-n}{p} \quad \text{и}$$

$$\lambda_0 \leqslant \left(\frac{d}{b} c_0\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{m-n}{p}}, \quad \text{то} \quad T^* = t_0.$$

Замечание 11. Пусть неотрицательная функция $\lambda\ (t)$ при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant \beta(t)\lambda - \frac{b(t)}{t^n}\lambda^p + \frac{d(t)}{t^m}, \quad t \geqslant t_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

где $p > 0$, $m > n$, $0 \leqslant n \leqslant 1$, $0 \leqslant d(t) \leqslant d$, $\int\limits_{t_0}^{\infty} \beta(t) dt < \infty$,

$$b(t) \geqslant \begin{cases} b & \text{при } p \geqslant 1 \\ b\overline{C}^{1-p} & \text{при } p < 1 \end{cases}, \quad \overline{C} = \exp\left[\int\limits_{t_0}^{\infty} \beta(t)\, dt\right].$$

Тогда все утверждения лемм 9—14 сохраняются при увеличении оценок для $\lambda\ (t)$ в $\overline{C}$ раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбер Я И. Рекуррентные числовые и дифференциальные неравенства. I. Препринт № 116, НИРФИ, Горький, 1978
2. Альбер Я. И. Рекуррентные числовые и дифференциальные неравенства. II. Препринт № 130, НИРФИ, Горький, 1979.
3. Вазан М. Стохастическая аппроксимация.— М.: Мир, 1972.
4. Катковник В. Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации.— М.: Наука, 1976.
5. Поляк Б. Т Сходимость и скорость сходимости интеративных стохастических алгоритмов. I. Общий случай.— В журн: Автоматика и телемеханика, 1976, № 12, с. 83—94
6. Любич Ю. И., Майстровский Г. Д. Общая теория релаксационных процессов— УМН, 1970, т. 25, № 1, с. 52—112
7. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1975
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Физматгиз. 1962, т. 2.

Дата поступления статьи
12 декабря 1979 г.

РЕКУРРЕНТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА III

Яков Иосифович Альбер
Семен Вольфович Шильман

Подписано в печать 25.02.80. МЦ 00607. Формат 60 x 84[1]/16.
Бумага писчая. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем 2,5 п л. Тираж 120 экз Заказ № 542. Бесплатно.

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский
радиофизический институт (НИРФИ), г. Горький, 603600. ГСП-51,
ул. Лядова 25/14, т. 38-90-91, д. 5—09.

Горьковская городская типография областного управления издательств,
полиграфии и книжной торговли, ул. Свердлова, 37.