Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 144

О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ ЭНЕРГИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ С ДВУХЧАСТИЧНЫМИ ВИРТУАЛЬНЫМИ УРОВНЯМИ

1. СИСТЕМЫ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ

С.А.Вугальтер

Г.М.Жислин

Горький–1980

УДК 517.9

В работе получены критерии конечности дискретного спектра в пространствах функций заданной симметрии операторов энергии квантовых систем трех и четырех частиц с короткодействующими потенциалами при наличии двухчастичных подсистем с виртуальными уровнями.

Из наших результатов следует, что для трехчастичных систем в рассматриваемых пространствах симметрии эффект Ефимова невозможен. Для четырехчастичных систем с двухчастичными виртуальными уровнями критерии конечности дискретного спектра ранее отсутствовали.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе устанавливаются критерии конечности дискретного спектра в пространствах функций заданной симметрии операторов энергии H_0^G квантовых систем трех и четырех частиц, не имеющих устойчивых подсистем. Рассматриваются системы, двухчастичные подсистемы которых могут иметь виртуальные уровни.

Для четырехчастичных квантовых систем, имеющих хотя бы один двухчастичный виртуальный уровень, условия конечности дискретного спектра ранее отсутствовали. Полученные нами условия конечности (теорема 7) разрешают системе четырех частиц иметь один, а в некоторых случаях и два двухчастичных виртуальных уровня.

Остановимся подробнее на трехчастичных системах, не имеющих устойчивых подсистем. Как было впервые замечено в [1] и математически строго доказано в [2], дискретный спектр гамильтонианов таких систем, рассматриваемых без учета симметрии (во всем пространстве), может быть бесконечным даже при короткодействующих потенциалах взаимодействия между частицами, если операторы энергии двух или трех двухчастичных подсистем имеют виртуальный уровень в точке ноль (эффект Ефимова). Мы изучаем трехчастичные гамильтонианы H_0 не во всем пространстве, а в некоторых его подпространствах B^{σ} функций заданной симметрии. Из наших результатов (теоремы 1–5) следует, что в рассматриваемых пространствах B^{σ} при короткодействующих потенциалах дискретный спектр оператора H_0^{σ} конечен независимо от числа двухчастичных виртуальных уровней, т.е. эффект Ефимова невозможен[+)]. Доказательство теорем 1–5 проводится с помощью усовершенствованной методики [4,5] и основано на изученных авторами свойствах виртуальных уровней спектров энергии систем двух частиц в подпространствах функций из $\mathcal{L}_2(R^3)\ominus P^{(0)}\mathcal{L}_2(R^3)$ (теорема 6). Доказательство утверждений 2, 3 использует кроме теоремы 6 информацию об узловых многообразиях функций из B^{σ}, полученную в лемме в конце раздела 3. Доказательство теоремы 7 развивает идеи [6].

Авторы благодарят В.Н.Ефимова, обратившего их внимание на задачу о дискретном спектре четырехчастичных гамильтонианов с двухчастичными виртуальными уровнями.

+) В физической литературе это утверждение содержится в [3].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть Z_1 –произвольная квантовая система n частиц $x_i=(x_{3i-2},x_{3i-1},x_{3i})$ с массами m_i, $x=(x_1,\dots,x_n)$, H_0 – оператор энергии системы Z_1, записанный после инвариантного отделения центра масс и введения скалярного произведения $(x,\tilde{x})_1=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i,\tilde{x}_i)$. Согласно [7]

$$H_0=-\Delta_0+0{,}5\sum_{i,j;\,i\neq j}^{1,n} v_{ij}(x_{ij}),$$

где $x_{ij}=x_i-x_j$, Δ_0 – оператор Лапласа на

$$R_0=\left\{x \,\middle|\, x=(x_1\dots x_n),\ \sum_{i=1}^{n} m_i x_i=0\right\}.$$

Относительно потенциалов $v_{ij}=v_{ij}(x_1)$ всегда будем предполагать, что

$$\bar{v}_{ij}=v_{ij},\quad v_{ij}\in\mathcal{L}_{2,loc}(R^3),$$

$$\int\limits_{|x_1-x_1'|\leq 1} |v_{ij}(x_1)|^2 dx_1\to 0 \text{ при } |x_1'|\to\infty; \tag{1}$$

при $n=3$ будем считать, что $v_{ij}(\cdot)=v_{ij}(|\cdot|)$ и

$$t\,v_{ij}(t)\in\mathcal{L}_1(R^1_+), \tag{2}$$

при $n=4$ предполагаем, что

$$v_{ij}(x_1)\in\mathcal{F}(R^3), \tag{3}$$

где, как и в [4],

$$\mathfrak{F}(R^3)=\{v_{ij}(x_1),\ v_{ij}(x_1)$$

удовлетворяет требованиям (1) и дискретный спектр оператора $-\varepsilon\Delta_{x_1}+v_{ij}(x_1)$ конечен при всех $\varepsilon>0\}$.

Заметим, что при выполнении (2) $\pm|v_{ij}(x_1)|\in\mathfrak{F}(R^3)$ [8]. В силу (1) оператор H_0, определенный на C_0^∞, существенно самосопряжен в $\mathcal{L}_2(R_0)$. Расширим его до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение. Далее для любого инвариантного для H_0 подпространства функций $B^\sigma\subset\mathcal{L}_2(R_0)$ через H_0^σ будем обозначать ограничение H_0 на B^σ. Дискретный спектр оператора H_0^σ обозначим $S_d(H_0^\sigma)$, бесконечнократный точечный спектр $S_{p\infty}(H_0^\sigma)$, нижнюю границу существенного спектра $-\mu^\sigma$. Далее мы всюду считаем, что $\mu^\sigma=0$.

В качестве пространств B^σ мы будем брать пространства функций, преобразующихся по кратным неприводимым представлениям группы симметрии гамильтониана H_0. Эти пространства будут строиться с помощью проекторов на подпространства функций, преобразующихся по представлению веса l группы $O^+(3)$ (проектор $P^{(l)}$) и по представлению типа α группы перестановок тождественных частиц из Z_1 (проектор P^α).

3. СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ

3.1. Пусть Z_1 – система трех частиц с парными взаимодействиями, для которых выполняются условия (1), (2).

Теорема 1. Пусть все частицы в Z_1 тождественны и α_1 – тип неприводимого представления группы перестановок S_3, для которого пространство $B^{\sigma}=P^{\alpha_1}\mathcal{L}_2(R_0)$ состоит из всех функций $\psi(x_1,x_2,x_3)$, антисимметричных относительно перестановок $x_i \leftrightarrow x_j$, $i\neq j$, $i,j=1,2,3$. Тогда спектр $S_d(H_0^{\sigma})$ конечен и $0\bar{\in} S_{p\infty}(H_0^{\sigma})$.

Теорема 2. Пусть все частицы в Z_1 тождественны, α_2 – тип двумерного неприводимого представления группы перестановок S_3, $B^{\sigma}=P^{(0)}P^{\alpha_2}\mathcal{L}_2(R_0)$. Тогда спектр $S_d(H_0^{\sigma})$ конечен и $0\bar{\in} S_{p\infty}(H_0^{\sigma})$.

Теорема 3. Пусть в Z_1 тождественны частицы i_0 и j_0, $B(R_0)$ – подпространство всех функций из $\mathcal{L}_2(R_0)$, антисимметричных относительно перестановки $x_{i_0} \leftrightarrow x_{j_0}$, и $B^{\sigma}=P^{(0)}B(R_0)$. Тогда спектр $S_d(H_0^{\sigma})$ конечен и $0\bar{\in} S_{p\infty}(H_0^{\sigma})$.

Следующие две теоремы не требуют наличия в системе тождественных частиц.

Теорема 4. Пусть $l \geqslant 0$ – любое целое число, $B_l=\{\psi(x)\,|\,\psi(x)\in\mathcal{L}_2(R_0),\ \psi(-x)=(-1)^{l+1}\psi(x)\}$, $B^{\sigma}=P^{(l)}B_l$. Тогда спектр $S_d(H_0^{\sigma})$ конечен и $0\bar{\in} S_{p\infty}(H_0^{\sigma})$.

Теорема 5. Пусть $B^{\sigma}=P^{(l)}\mathcal{L}_2(R_0)$. Тогда существует такое $L>0$, что при всех $l>L$ спектр $S_d(H_0^{\sigma})$

конечен и $0 \bar{\in} S_p(H_0^\sigma)$.

Замечание. Метод доказательства теоремы 5 позволяет получить оценку числа L.

3.2. Доказательство теорем 1–5 использует устанавливаемые ниже свойства виртуальных уровней двухчастичных операторов в некоторых пространствах симметрии.

Пусть $\varepsilon \in [0;1/2)$ и функция $v(|x_1|)$ обладает свойствами (1), (2). Тогда оператор

$$h_\varepsilon = -(1-\varepsilon)\Delta_{x_1} + v(|x_1|),$$

определенный на $C_0^2(R^3)$, будет существенно самосопряжен в $\mathcal{L}_2(R^3)$. Замкнем его, сохраняя прежнее обозначение, и область определения полученного оператора обозначим $D(h_\varepsilon)$. В силу [8] $D(h_\varepsilon) = D(h_0)$. Пусть e – произвольное множество различных неотрицательных целых чисел l_i, $P(e) = \sum_{l_i \in e} P^{(l_i)}$,

$$B(e) = P(e)\mathcal{L}_2(R^3),\ h_\varepsilon(e) = P(e)h_\varepsilon,\ D(h_\varepsilon(e)) = P(e)D(h_\varepsilon).$$

Очевидно, оператор $h_\varepsilon(e)$ самосопряжен в $B(e)$. Будем говорить, что неотрицательный оператор $h_0(e)$ имеет виртуальный уровень, если отрицательный спектр оператора $h_\varepsilon(e)$ не пуст при любом $\varepsilon \in (0;1/2)$.

Т е о р е м а 6. Пусть $0 \bar{\in} e$ и неотрицательный оператор $h_0(e)$ имеет виртуальный уровень. Тогда:

а) число $\lambda_0 = 0$ является собственным значением оператора $\hbar_0(e)$;

б) отвечающее λ_0 собственное пространство $U \subset P^{(l_0)} \mathcal{L}_2(R^3)$ и $\dim U = 2l_0+1$, где $l_0 = \min\limits_{l_i \in e} l_i$;

в) $\exists\ \delta > 0$ такое, что $(\hbar_\delta(e)\psi,\psi) > 0$ $\forall\psi$, $\psi \in D(\hbar_0(e))$, $(\psi, \Delta_{x_1} u) = 0$ для всех $u \in U$.

3.3. В доказательстве теорем 2, 3 используется, кроме теоремы 6, следующая лемма.

Лемма. Пусть частицы i,j из Z_1 тождественны. Тогда для любой функции $\psi(x_1,x_2,x_3) \in P^{(0)} C(R_0)$, антисимметричной относительно перестановки $x_i \longleftrightarrow x_j$, выполняется $\psi(x_1,x_2,x_3)=0$ при $|x_{ki}|=|x_{kj}|$ $k \neq i,j$ $x \in R_0$.

4. СИСТЕМА ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ

Для формулировки условий конечности дискретного спектра четырех-частичных гамильтонианов напомним некоторые определения из [5].

Пусть $Z = Z_p = (C_1,\ldots,C_p)$ – любое разбиение Z_1 на p непустых подсистем,

$$R_0(Z) = \left\{ x \mid x \in R_0,\ \sum_{i \in C_j} m_i x_i = 0 \quad \forall C_j \in Z \right\},$$

$\Delta_0(Z)$ –инвариантно заданный Лапласиан в $R_0(Z)$,

$$H_0(Z) = -\Delta_0(Z) + \sum_{C_k \in Z} \ \sum_{(i,j) \subset C_k} \frac{1}{2} V_{ij}(x_{ij}).$$

Обозначим через $G(Z)$ группу симметрии оператора $H_0(Z)$, $\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}(Z)$-типы неприводимых представлений $G(Z)$, $P^{\tilde{\sigma}}$ - проектор в $\mathcal{L}_2(R_0(Z))$ на подпространство функций, преобразующихся по представлениям типа $\tilde{\sigma}$.

Следуя [5] (см. также [9] стр. 133), определим понятие индуцирования симметрии $\tilde{\sigma}$ симметрией σ $(\tilde{\sigma}\prec\sigma)$ и положим

$$B(\sigma;Z)=\sum_{\tilde{\sigma}\prec\sigma}\oplus P^{\tilde{\sigma}}\mathcal{L}_2(R_0(Z)).$$

Ограничение $H_0(Z)$ на $B(\sigma;Z)$ обозначим $H_0(\sigma;Z)$. Будем писать $Z_q<Z_p$, если Z_p получено из Z_q объединением каких-либо подсистем. При $Z_q<Z_p$ через $\Delta(Z_p|Z_q)$ обозначим инвариантно заданный оператор Лапласа в $R_0(Z_p)\ominus R_0(Z_q)$.

Пусть $A(\sigma)=\{Z|Z\neq Z_1, \exists\ \varepsilon>0$ такое, что на $B(\sigma;Z)$ $H_0(\sigma;Z)+\varepsilon\Delta_0(Z)\geq 0\}$.

Т е о р е м а 7. Пусть Z_1 система частиц с потенциалами $V_{ij}(x_1)\in\mathcal{F}(R^3)$, и для каждого разбиения $Z_2\in\in A(\sigma)$, содержащего трехчастичную подсистему, найдется такое разбиение Z_3, $Z_3<Z_2$, что при некотором $\varepsilon>0$

$$H_0(\sigma;Z_2)+\varepsilon\Delta(Z_2|Z_3)\geq 0 \quad \text{на} \quad B(\sigma;Z_2).$$

Тогда спектр $S_d(H^{\sigma})$ конечен и $0\in S_{p\infty}(H_0^{\sigma})$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ефимов В.Н. – Phys.Letters,ser.B,1970,33,p.563.

2. Яфаев Д.Р. – Матем.сб. 1974, т.94, с.263.

3. Ефимов В.Н. – Ядерная физика, 1970, т.12, с.1080.

4. Вугальтер С.А., Жислин Г.М. – ТМФ, 1977, т.32, с.70.

5. Вугальтер С.А., Жислин Г.М. – Reports on Math. Phys.(в печати).

6. Вугальтер С.А. – Функ. анализ., 1978, т.12, вып.3, с.74.

7. Сигалов А.Г., Сигал И.М. – ТМФ, 1970, т.5, с.73.

8. Бирман М.Ш. – Мат. сб., 1961, т.55, с. 125.

9. Йоргенс К., Вайдман И. Спектральные свойства гамильтоновых операторов. – М. : Мир, 1976.

Дата поступления статьи
29 сентября 1980 года

О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ ЭНЕРГИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ С ДВУХЧАСТИЧНЫМИ ВИРТУАЛЬНЫМИ УРОВНЯМИ

1. СИСТЕМЫ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ

Семен Абрамович Вугальтер
Григорий Моисеевич Жислин

Подписано в печать 03.10.80 г. МЦ 00777. Формат 60 х 84 1/16. Бумага множительная марки А-1 Печать офсетная. Объем 0,6 п.л. Тираж 120 экз. Заказ 2475. Бесплатно.

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ), 603600, Горький, ГСП-51, ул. Лядова 25/14, т. 38-90-91, д.5 09.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ.