Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт № 148

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С.Ф.Морозов

М.И. Сумин

Горький 1981

УДК 519.3:62.50

В работе устанавливаются необходимые условия оптимальности (в форме принципа минимума) для задачи управления динамической системой с разрывной правой частью. Решение разрывной системы в течение некоторого положительного промежутка времени может принадлежать поверхности разрыва правой части (скользящий режим) и понимается в смысле А.Ф. Филиппова. Полученные необходимые условия оптимальности содержат в себе, в частности, необходимые условия для случая "протыкания" траекторией системы поверхности разрыва, исследовавшегося ранее в ряде работ. Рассматриваются примеры.

Исследование задач оптимизации процессов управления различными механическими, электротехническими, радиотехническими и другими системами приводит к необходимости изучения управляемых разрывных динамических систем, т.е. систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями, когда траектория управляемой системы может скользить по поверхности разрыва (скользящий режим).

В настоящей работе устанавливаются необходимые условия оптимальности (в форме принципа минимума) в задаче управления разрывной динамической системой, решение которой в течение некоторого (положительного) промежутка времени принадлежит поверхности разрыва и понимается в смысле А.Ф.Филиппова [1]. Полученные необходимые условия оптимальности отличаются от необходимых условий в случае "скольжения" [2], где разрывная оптимизационная задача исследовалась другим методом при предположениях, отличных от предположений на правую часть системы, функционал и класс допустимых управлений настоящей работы. Кроме того, установленные необходимые условия содержат в себе, в частности, необходимые условия для случая "прошивания" траекторией системы поверхности разрыва, исследовавшегося ранее в [3-7]. Приводятся примеры.+)

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x,u(t)), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x_0 \in R^n$ – заданный вектор, а управления $u: [0,1] \to R^m$ – кусочно-непрерывные слева функции, принимающие значения из ограниченного множества $U \subset R^n$.

Пусть ограниченная область $G \subset R^n$ разделена гладкой неособой поверхностью $S: \{g(x) = 0\}$, $g: R^n \to R^1$, $g \in C^2$, $\nabla_x g(x) \neq 0$ при $x \in S$, на области G^- и G^+. Функция $f(t, x, u)$ из (1) определена формулой

$$f(t,x,u) = \begin{cases} f^-(t,x,u), & x \in G^- \\ f^+(t,x,u), & x \in G^+ \end{cases},$$

+) Результаты этой работы частично докладывались на III Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах, Киев, 1979г., [8], а также на II Всесоюзном совещании-семинаре по оптимизации динамических систем, Минск, 1980г.

где функции $f^-, f^+ : [0,1] \times G \times U \longrightarrow R^n$ и их производные $\partial f_i^- / \partial x_j$, $\partial f_i^+ / \partial x_j$, $i,j=\overline{1,n}$ непрерывны по совокупности (t, x, u) и удовлетворяют следующему условию (A): существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|f^-|,\ |f^+|,\ |\nabla_x f^-|,\ |\nabla_x f^+| \leq K^{+)} \qquad (3)$$

при всех $(t,x,u) \in [0,1] \times G \times U$.

Решение $x_u(t)$, $x_u(t) \in G$, $0 \leq t \leq 1$ системы (1),(2) будем понимать в смысле А.Ф.Филлипова [1]. Кроме того, будем считать, что правая часть (1) такова, что для системы (1), (2) на $[0,1] \times G$ имеет место правосторонняя единственность решения (при условии его существования) для любого управления $u(t)$. Это условие выполняется во многих важных для практики случаях, например, когда функции $f^{\mp}(t,x,u)$ представлены в виде

$$f^{\mp}(t,x,u) = g_1^{\mp}(t,x) + g_2(t,u),$$

где функции $g_1^{\mp}(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности (t,x) (см. теорему 14, стр. 125 в [1]).

Для управляемой динамической системы (1), (2) поставим следующую оптимизационную задачу: среди допустимых управлений $u(t)$, для каждого из которых существует единственное решение $x_u(t) \in G$, $0 \leq t \leq 1$, задачи (1),

---

+) Здесь и в дальнейшем $|a|$ означает сумму модулей компонент вектора или матрицы

(2) такое, что $x_u(t)\in G^-$, $0\le t<t_0^1$; $x_u(t)\in S$, $t_0^1\le t\le t_0^2$; $x_u(t)\in G^+$, $t_0^2<t\le 1$; $t_0^1>0$, $t_0^1\le t_0^2\le 1$, найти управление, которое минимизирует функционал

$$I(u)=h(x_u(1))+\int_0^1 F(t,x_u(t),u(t))\,dt. \tag{4}$$

В (4) функции $h: G\to R^1$, $F:[0,1]\times G\times U\to R^1$ и их производные $\partial h/\partial x_j$, $\partial F/\partial x_j$, $j=\overline{1,n}$ непрерывны соответственно по x и (t,x,u) и удовлетворяют следующему условию (B): существует постоянная $K>0$ такая, что

$$|h|,\ |\nabla_x h|,\ |F|,\ |\nabla_x F|\le K \tag{5}$$

при всех $(t,x,u)\in[0,1]\times G\times U$.

Будем пользоваться обозначениями статьи [1]. Буквой со значком N, например f_N^+, будем обозначать проекцию (со знаком) соответствующего вектора f^+ на нормаль к поверхности S в точке (t,x,u); положительное направление нормали всегда от G^- к G^+.

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть вектор-функция $x(t)$ – абсолютно-непрерывна и при $t^1\le t\le t^2$ $x(t)\in S$, $f_N^-(t,x(t),u(t))\ge 0$, $f_N^+(t,x(t),u(t))\le 0$, $f_N^- - f_N^+>0$. Чтобы $x(t)$ было решением системы (1), соответствующим управлению $u(t)$, необходимо и достаточно, чтобы при почти всех $t \in [t^1, t^2]$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f^0(t, x(t), u(t)), \quad f^0 \equiv \alpha f^+ + (1-\alpha) f^-,$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha(t, x(t), u(t)) \equiv \frac{f_N^-(t, x(t), u(t))}{f_N^-(t, x(t), u(t)) - f_N^+(t, x(t), u(t))}$$

Лемма 2. Если $f_N^+(t, x(t), u(t)) \leq 0$, $(f_N^-(t, x(t), u(t)) \geq 0)$ при $t^1 \leq t \leq t^2$, $x \in S_0$, где S_0 – кусок поверхности S (открытая область на поверхности S), то при $t^1 \leq t \leq t^2$ никакое решение не может выйти с S_0 в область $G^+ (G^-)$, не выходя сначала с S_0 в $G^- \cup S \setminus S_0$ $(G^+ \cup S \setminus S_0)$.

Доказательство лемм 1, 2 см. в [1].

В дальнейшем будут использоваться следующие прост – ранства функций: $L_{p,n}[0,1]$ – пространство суммируемых в p -ой степени n -мерных вектор-функций $x(t)$ с нормой $\|x\|_{L_{p,n}[0,1]} \equiv \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$; $C_n[0,1]$ – прост – ранство непрерывных n -мерных вектор-функций $x(t)$ с нор – мой $\|x\|_{C_n[0,1]} \equiv \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

Лемма 3. Пусть задана линейная система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{6}$$

$$x(0) = 0, \tag{7}$$

где $A(t) \equiv (A_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$ $(n \times n)$ – матрица с ограниченными на $[0,1]$ компонентами, $A_{ij} \in L_{\infty,1}[0,1]$, $b \in L_{2,n}[0,1]$.

Тогда, если $x_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$, – решение задачи (6), (7), то для любой функции $a \in L_{2,n}[0,1]$ справедливо равенство

$$\int_0^1 (\dot{x}_0(t), a(t))dt = \int_0^1 (\psi(t), b(t))dt, \tag{8}$$

где функция $\psi(t)$ удовлетворяет линейной системе

$$\psi(t) - \int_t^1 A^*(t)\psi(t)dt = a(t), \tag{9}$$

$A^*(t)$ – транспонированная матрица+).

Доказательство. Обозначим через $V_{2,n}[0,1]$ банахово пространство абсолютно-непрерывных функций x: $[0,1] \to R^n$, $x(0)=0$, с конечной нормой

$$\|x\|_{V_{2,n}[0,1]} \equiv \|\dot{x}\|_{L_{2,n}[0,1]}.$$

Рассмотрим линейный непрерывный оператор

$$S: V_{2,n}[0,1] \to L_{2,n}[0,1],$$

заданный формулой

$$S(x) = \dot{x} - A(t)x.$$

Пусть $g \in L_{2,n}[0,1]$. Тогда линейная система

$$\dot{x} - A(t)x = g(t), \quad x(0) = 0$$

имеет единственное решение $x_g(t)$, $0 \le t \le 1$ в классе абсолютно-непрерывных функций. С помощью леммы Гронуолла для решения x_g получаем оценку

$$\|x_g\|_{V_{2,n}[0,1]} \le C\|g\|_{L_{2,n}[0,1]}, \tag{10}$$

+) Здесь и далее * означает транспонирование.

где $C>0$ – постоянная, не зависящая от $g\in L_{2,n}[0,1]$. Из (10) следует, что операторное уравнение

$$S(x) = g \tag{11}$$

корректно-разрешимо [8] на $L_{2,n}[0,1]$, что, в свою очередь, приводит к однозначной везде разрешимости сопряженного уравнения

$$S^*(y) = h, \tag{12}$$

где $h\in V^*_{2,n}$, $S^*: L^*_{2,n}[0,1]\to V^*_{2,n}[0,1]$ – сопряженный к S оператор. Применяя далее лемму о тройке ([10], стр. 26), имеем, что между пространствами $V^*_{2,n}[0,1]$ и $L_{2,n}[0,1]$ существует изоморфное соответствие, устанавливаемое с помощью равенства ([10], стр. 32)

$$h(x) = \int_0^1 (\dot{x}(t), q(t))dt, \quad q\in L_{2,n}[0,1]. \tag{13}$$

Пусть $y_1\in L^*_{2,n}[0,1]$. По теореме Рисса имеем

$$y(g) \equiv \int_0^1 (g(t),\psi(t))dt, \quad \psi\in L_{2,n}[0,1]. \tag{14}$$

В уравнении (12) в качестве h_1 возьмем функционал A:

$$V_{2,n}[0,1]\to R^1, \quad A(x) = \int_0^1 (\dot{x}(t), a(t))dt \quad (q(t)\equiv a(t))$$

с функцией $a(t)$ из (5). В силу определения сопряженного оператора получим

$$\int_0^1 (g(t),\psi(t))\,dt = \int_0^1 (\dot{x}(t) - A(t)x(t),\ \psi(t))\,dt =$$

$$= \int_0^1 (\dot{x}(t), \psi(t) - \int_t^1 A^*(t)\psi(t)dt)\,dt = \int_0^1 (\dot{x}(t), a(t))\,dt.$$

Поэтому для того, чтобы функционал (14) являлся решением уравнения (12) при выборном h, необходимо, чтобы функция $\psi \in L_{2,n}[0,1]$, определяющая функционал (14), удовлетворяла равенству (9). Сверх того из однозначной разрешимости уравнения (12) вытекает однозначная разрешимость уравнения (9) в классе $L_{2,n}[0,1]$. Представление (8), очевидно, следует из определения сопряженного оператора.

Лемма 4. Пусть $u_0(t)$ – допустимое управление, а $x_0(t)$, $0 \le t \le 1$ – единственное отвечающее ему решение задачи (1), (2). Пусть $v_k(t)$, $0 \le t \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$ такая последовательность управлений, что для почти всех $(t,x) \in [0,1] \times G$ $|f(t,x,v_k(t)) - f(t,x,u_0(t))| \le \psi_k(t)$, где $\psi_k(t)$ – суммируемая на $[0,1]$ функция и

$$\int_0^1 \psi_k(t)\,dt \to 0, \quad k \to \infty.$$

Тогда при достаточно больших k, $k > 0$, управлениям $v_k(t)$ отвечают решения $x_{v_k}(t)$, $0 \le t \le 1$, задачи (1), (2) такие, что $\|x_{v_k} - x_0\|_{C_n[0,1]} \to 0$, $k \to \infty$.

Доказательство леммы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 11 в [1].

Пусть $u_0(t)$ – допустимое управление, а $x_0(t)$, $0 \le t \le 1$, – единственное соответствующее ему решение задачи (1), (2), удовлетворяющее следующим условиям:

1) существуют моменты времени t_0^1, t_0^2, $0 < t_0^1 \le t_0^2 < 1$, такие, что $x_0(t) \in G^-$ при $t \in [0, t_0^1]$; $x_0(t) \in S$ при $t \in [t_0^1, t_0^2]$; $x_0(t) \in G^+$ при $t \in [t_0^2, 1]$;

2) существует $\varkappa_1 > 0$ такое, что при $t \in [t_0^1, t_0^2 + 0]$
$f_N^-(t, x_0(t); u_0(t)) \equiv (\nabla_x g(x_0(t)), f^-(t, x_0(t), u_0(t))) \ge \varkappa_1$;

3) существует $\varkappa_2 > 0$ такое, что при $t \in [t_0^1 + 0, t_0^2]$
$f_N^+(t, x_0(t), u_0(t)) \equiv (\nabla_x g(x_0(t)), f^+(t, x_0(t), u_0(t))) \le -\varkappa_2$;

4) существует $\varkappa_3 > 0$ такое, что

$$f_N^+(t_0^2, x_0(t_0^2), u_0(t_0^2 + 0)) \ge \varkappa_3 .$$

По условию 1) траектория $x_0(t)$, $0 \le t \le t_0^1$ является решением (в обычном смысле) на интервале $[0, t_0^1]$ для $u(t) \equiv u_0(t)$ системы

$$\dot{x} = f^-(t, x, u(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{15}$$

В силу (3) по теореме о продолжаемости решения найдется достаточно малое число $\beta_1 > 0$ такое, что для управления

$$\bar{u}_0(t) = \begin{cases} u_0(t), & 0 \le t \le t_0^1, \\ u_0(t_0^1), & t_0^1 < t \le t_0^1 + \beta_1 \end{cases}$$

существует решение $\bar{x}_0(t)$ системы (15), определенное на интервале $[0, t_0^1 + \beta_1]$, совпадающее с $x_0(t)$ при $0 \le t \le t_0^1$. Из условия 2) следует, что $\bar{x}_0(t) \in G^+$ при $t \in (t_0^1, t_0^1 + \beta_1]$.

Определим с помощью произвольной пары $(\bar{t}, v)$, $\bar{t} \in (0, t_0^1)$, $v \in U$, управление $\bar{u}_\varepsilon(t)$, $0 \le t \le t_0^1 + \beta_1$, следующим образом:

$$\bar{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} v \in U, & t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}], \bar{t} \in (0, t_0^1), \\ u_0(t), & t \in [0, t_0^1] \setminus (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}), \\ u_0(t_0^1), & t \in (t_0^1, t_0^1 + \beta_1) \end{cases}$$

По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра (см. [11], стр. 198) существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при всех $\varepsilon \le \varepsilon_1$ управлению $\bar{u}_\varepsilon(t)$ отвечает решение $\bar{x}_\varepsilon(t)$ задачи (15) и

$$\| \bar{x}_\varepsilon - \bar{x}_0 \|_{C_n [0, t_0^1 + \beta_1]} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{16}$$

Так как $\bar{x}_0(t_0^1 + \beta_1) \in G^+$, то из (16) получаем, что $\bar{x}_\varepsilon(t_0^1 + \beta_1) \in G^+$ при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_1$. Тогда в силу условия (3) на функцию f^- и условия 2) на f_N^- существует единственный момент времени t_ε^1, $t_\varepsilon^1 < t_0^1 + \beta_1$, такой, что $\bar{x}_\varepsilon(t_\varepsilon^1) \in S$, причем

$$t_\varepsilon^1 \longrightarrow t_0^1, \quad \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{17}$$

Действительно, предположим, например, что существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$ такая, что $t_{\varepsilon_k}^1 < t_0^1$, причем $t^1_{\varepsilon_k}$ не сходится к t^1_0 при $k\to\infty$. Тогда в силу (16) существует последовательность $\{\bar{x}_{\varepsilon_i}(t)\}\equiv\{\bar{x}_{\varepsilon_{k_i}}(t)\}$ такая, что $\bar{x}_{\varepsilon_i}(t)$ равномерно сходятся к $\bar{x}_0(t)$ при $i\to\infty$ и такой момент времени $\bar{t}^1_0=t^1_0-\varkappa$ ($\varkappa>0$ - некоторое число), что $t^1_{\varepsilon_i}\to t^1_0-\varkappa$ при $i\to\infty$, а точки $\bar{x}_{\varepsilon_i}(t^1_{\varepsilon_i})$ лежат на поверхности S. В то же время точки $\bar{x}_0(t^1_{\varepsilon_i})$ для достаточно больших i находятся на некотором положительном расстоянии $\rho>\alpha>0$ от поверхности S (α - фиксированное число), что противоречит равномерной сходимости $\bar{x}_{\varepsilon_i}(t)$ к $\bar{x}_0(t)$ при $i\to\infty$. Следовательно, если $t^1_{\varepsilon_k}<t^1_0$, то $t^1_{\varepsilon_k}\to t^1_0$ при $k\to\infty$. Аналогично доказывается, что если $t^1_{\varepsilon_k}>t^1_0$, то $t^1_{\varepsilon_k}\to t^1_0$ при $k\to\infty$.

Лемма 5. Справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^1_0-t^1_\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{A(\bar{t},v)}{(\nabla_x g(x_0(t^1_0)),f^-(t^1_0,x_0(t^1_0),u(t^1_0)))},\tag{18}$$

где

$$A(\bar{t},v)\equiv(\psi_0(\bar{t}),f^-(\bar{t},x_0(t),v)-f^-(\bar{t},x_0(\bar{t}),u_0(\bar{t})))+$$
$$\tag{19}$$
$$+(\nabla_x g(x_0(t^1_0)),f^-(\bar{t},x_0(\bar{t}),v)-f^-(\bar{t},x_0(\bar{t}),u_0(\bar{t}))),$$

а функция $\varphi_0(t)$ удовлетворяет системе

$$\varphi_0(t)-\int_t^{t_0^1}\nabla_x^* f^-(t,x_0(t),u_0(t))\,\varphi_0(t)\,dt=$$
$$=\int_t^{t_0^1}\nabla_x^* f^-(t,x_0(t),u_0(t))\,\nabla_x g(x_0(t_0^1))\,dt. \tag{20}$$

Доказательство. Так как $x_\varepsilon(t_\varepsilon^1)\in S$ и $x_0(t_0^1)\in S$, то

$$g(x_\varepsilon(t_\varepsilon^1))-g(x_0(t_0^1))=0.$$

Применяя формулу Лагранжа, получаем

$$(\nabla_x g(\theta_\varepsilon),\ x_\varepsilon(t_\varepsilon^1)-x_0(t_0^1))=0,$$

где $\theta_\varepsilon=x_0(t_0^1)+\theta_\varepsilon^1(x_\varepsilon(t_\varepsilon^1)-x_0(t_0^1))$, $0\le\theta_\varepsilon^1\le 1$.
Из последнего равенства следует

$$(\nabla_x g(\theta_\varepsilon),\int_0^{t_\varepsilon^1} f^-(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))dt-\int_0^{t_0^1} f^-(t,x_0(t),u_0(t))dt)=0 \tag{21}$$

Предположим сначала, что последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $k=1,2,\dots$, $\varepsilon_k\to 0$, $k\to\infty$ такова, что $t_{\varepsilon_k}^1<t_0^1$. Тогда из (21) имеем

$$(\nabla_x g(\theta_\varepsilon),\frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{t_{\varepsilon_k}^1}(f^-(t,x_{\varepsilon_k}(t),u_{\varepsilon_k}(t))-f^-(t,x_0(t),$$
$$u_0(t)))\,dt)=(\nabla_x g(\theta_{\varepsilon_k}),\frac{1}{\varepsilon_k}\int_{t_{\varepsilon_k}}^{t_0^1} f^-(t,x_0(t),u_0(t))dt). \tag{22}$$

Вычислим предел при $\varepsilon_k \to 0$ выражения, состоящего в левой части (22):

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0}\frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{t^1_{\varepsilon_k}}(\nabla_x g(\theta_{\varepsilon_k}), f^-(t, x_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)) - f^-(t, x_0(t), u_0(t)))\,dt = \lim_{\varepsilon_k\to 0}\frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{t^1_{\varepsilon_k}}(\nabla_x g(\theta_{\varepsilon_k}), f^-(t, x_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)) - f^-(t, x_0(t), u_{\varepsilon_k}(t)))\,dt + \lim_{\varepsilon_k\to 0}\frac{1}{\varepsilon_k}\int_0^{t^1_{\varepsilon_k}}(\nabla_x g(\theta_{\varepsilon_k}), f^-(t, x_0(t), u_{\varepsilon_k}(t)) - f^-(t, x_0(t), u_0(t)))\,dt \equiv$$

$$\equiv \lim_{\varepsilon_k\to 0}\frac{1}{\varepsilon_k} I^1_{\varepsilon_k} + \lim_{\varepsilon_k\to 0}\frac{1}{\varepsilon_k} I^2_{\varepsilon_k}. \tag{23}$$

С помощью формулы Лагранжа и интегрирования по частям, интеграл $I^1_{\varepsilon_k}$ приводим к виду, необходимому для применения леммы 3:

$$I^1_{\varepsilon_k} = \int_0^{t^1_{\varepsilon_k}}\Big(\int_t^{t^1_{\varepsilon_k}} \nabla^*_x f^-(t, \theta_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)) \cdot \nabla_x g(\theta_{\varepsilon_k})\,dt,\ (\dot{x}_{\varepsilon_k}(t) - \dot{x}_0(t))\Big)\,dt, \tag{24}$$

где $\theta_{\varepsilon_k}(t) = x_0(t) + \theta^1_{\varepsilon_k}(t)(x_{\varepsilon_k}(t) - x_0(t))$, $0 \le \theta^1_{\varepsilon_k} \le 1$.

Кроме того, из (15) имеем для $0 \le t \le t^1_{\varepsilon_k}$

$$\dot{x}_{\varepsilon_k}(t) - \dot{x}_0(t) = f^-(t, x_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)) - f^-(t, x_0(t), u_0(t)) = \nabla_x f^-(t, \theta_{\varepsilon_k}(t),$$

$$u_{\varepsilon_k}(t))\,(x_{\varepsilon_k}(t)-x_0(t))+$$
$$+f^-(t,x_0(t),u_{\varepsilon_k}(t))-f^-(t,x_0(t),u_0(t)). \tag{25}$$

Из равенств (24), (25) следует, что все условия леммы 3 выполняются. Применяя лемму 3 к функционалу (24) и уравнению (25), получаем, что

$$I^1_{\varepsilon_k}=\int_0^{t^1_{\varepsilon_k}}(\varphi_{\varepsilon_k}(t),f^-(t,x_0(t),u_{\varepsilon_k}(t))-f^-(t,x_0(t),u_0(t)))\,dt,$$

где

$$\varphi_{\varepsilon_k}(t)-\int_t^{t^1_{\varepsilon_k}}\nabla^*_x f^-(t,\theta_{\varepsilon_k}(t),u_{\varepsilon_k}(t))\varphi_{\varepsilon_k}(t)\,dt=$$
$$=\int_t^{t^1_{\varepsilon_k}}\nabla^*_x f^-(t,\theta_{\varepsilon_k}(t),u_{\varepsilon_k}(t))\nabla_x g(\theta_{\varepsilon_k})\,dt.$$

Переходя по теореме Лебега к пределу при $\varepsilon_k\to 0$, имеем окончательное выражение для (23) при $\bar t\in(0,t^1_0)$:

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0}\frac{1}{\varepsilon_k}I^1_{\varepsilon_k}+\lim_{\varepsilon_k\to 0}I^2_{\varepsilon_k}=$$

$$=(\varphi_0(\bar t),f^-(\bar t,x_0(\bar t),v)-f^-(\bar t,x_0(\bar t),u_0(\bar t)))+$$

$$+(\nabla_x g(x_0(t^1_0)),f^-(\bar t,x_0(\bar t),v)-f^-(\bar t,x_0(t),u_0(\bar t))), \tag{26}$$

где $\varphi_0(t)$ – решение системы (20).

Из равенства (22) и существования предела (26) левой части следует существование предела при $\varepsilon_k \to 0$ правой части, который равен

$$(\nabla_x g(x_0(t_0^1)), f^-(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1))) \lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{t_0^1 - t_{\varepsilon_k}^1}{\varepsilon_k},$$

что и приводит к (18). Случай $t_{\varepsilon_k}^1 > t_0^1$ рассматривается аналогично.

Из (18) и условия 2), таким образом, следует, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ $t_\varepsilon^1 < t_0^1$, если $A(\bar{t}, v) > 0$ и $t_\varepsilon^1 > t_0^1$, если $A(\bar{t}, v) < 0$.

3. Устойчивость решения задачи (1), (2)

Определим вариацию допустимого управления $u_0(t)$, $0 \le t \le 1$, удовлетворяющего условиям 1)–4) п. 2. следующим образом:

а) при $\bar{t} \in (0, t_0^1)$

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \bar{u}_\varepsilon(t), & 0 \le t \le t_\varepsilon^1 \\ u_0(t_0^1 + 0), & t_\varepsilon^1 < t \le t_0^1 \\ u_0(t), & t_0^1 < t \le 1 \end{cases}$$

если $A(\bar{t}, v) > 0$ и

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \bar{u}_\varepsilon(t), & 0 \le t \le t_\varepsilon^1 \\ u_0(t), & t_\varepsilon^1 < t \le 1 \end{cases}$$

если $A(\bar{t}, v) < 0$;

в) при $\bar{t} \in (t_0^1, t_0^2)$, если $v \in U$ таково, что существует открытая область S_v на поверхности S, $x_0(\bar{t}) \subset S_v$ и $f_N^-(\bar{t}, x, v) \geq 0$, $f_N^+(\bar{t}, x, v) \leq 0$ при $x \in S_v$, то

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v \in U, & t \in (\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}] \\ u_0(t), & t \in [0,1] \setminus (\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}] \end{cases};$$

с) при $\bar{t} \in (t_0^2, 1]$

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v \in U, & t \in (\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}] \\ u_0(t), & t \in [0,1] \setminus (\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}] \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема устойчивости решения задачи (1), (2) по возмущению управления $u(t)$.

Теорема 1. Пусть $u_0(t)$ – допустимое управление, а $x_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$,–отвечающее ему единственное решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям 1)–4) п. 2. Тогда, если $\bar{t} \in (0, t_0^1)$, то существует число $\varepsilon(\bar{t}, v) > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \leq \varepsilon(\bar{t}, v)$ управлению $u_\varepsilon(t)$ отвечает решение $x_\varepsilon(t)$, $0 \leq t \leq 1$, задачи (1), (2) и

$$\| x_\varepsilon - x_0 \|_{C_n[0,1]} \longrightarrow 0, \ \varepsilon \to 0, \tag{27}$$

а для траектории $x_\varepsilon(t)$ справедливы следующие включения: $x_\varepsilon(t) \in G^-$ при $t \in [0, t_\varepsilon^1)$, $x_\varepsilon(t) \in S$ при $t \in [t_\varepsilon^1, t_0^2]$, $x_\varepsilon(t) \in G^+$ при $t \in (t_0^2, 1]$. Кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$t^1_\varepsilon \longrightarrow t^1_0 . \tag{28}$$

Если $\bar t \in (t^1_0, t^2_0) \cup (t^2_0, 1]$, то выполняется (27) и $x_\varepsilon(t) \in G^-$ при $t \in [0, t^1_0]$, $x_\varepsilon(t) \in S$ при $t \in [t^1_0, t^2_0]$, $x_\varepsilon(t) \in G^+$ при $t \in (t^2_0, 1]$.

Доказательство. Пусть $\bar t \in (0, t^1_0)$. В силу условия (3) для функции f справедливо неравенство

$$| f(t, x, u_\varepsilon(t)) - f(t, x, u_0(t)) | \leq a_{\bar t, \varepsilon}(t),$$

где

$$a_{\bar t, \varepsilon}(t) = \begin{cases} 2K, & t \in (\bar t - \varepsilon, \bar t] \cup (t^1_\varepsilon, t^1_0] \\ 0, & t \in [0,1] \setminus (\bar t - \varepsilon, \bar t] \cup (t^1_\varepsilon, t^1_0] \end{cases},$$

если $A(\bar t, v) > 0$ и

$$a_{\bar t, \varepsilon}(t) = \begin{cases} 2K, & t \in (\bar t - \varepsilon, \bar t] \cup (t^1_0, t^1_\varepsilon] \\ 0, & t \in [0,1] \setminus (\bar t - \varepsilon, \bar t] \cup (t^1_0, t^1_\varepsilon] \end{cases},$$

если $A(\bar t, v) < 0$ и

$$\int_0^1 a_{\bar t, \varepsilon}(t)\, dt \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Тогда, используя лемму 4, получаем, что существует число $\varepsilon(\bar t, v) > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon(\bar t, v)$ управлению $u_\varepsilon(t)$ отвечает решение $x_\varepsilon(t)$, $0 \leq t \leq 1$, задачи (1),

(2) и выполняется (27).

В силу построения управления $\bar{u}_\varepsilon(t)$, $0 \le t \le t_0^1 + \beta_1$ (см. п. 2) траектория $x_\varepsilon(t)$, отвечающая допустимому управлению $u_\varepsilon(t)$, совпадает с траекторией $\bar{x}_\varepsilon(t)$ системы (15) на интервале $[0, t_\varepsilon^1)$, а, следовательно, траектория $x_\varepsilon(t)$ попадает в момент времени t_ε^1 на поверхность разрыва S и выполняется (17).

Покажем, что при $t_\varepsilon^1 \le t \le t_0^2$ $x_\varepsilon(t) \in S$. По условиям 2), 3) п. 2 в силу построения вариации $u_\varepsilon(t)$ и равномерной непрерывности функций f_N^-, f_N^+ по $(t, x, u) \in [0,1] \times \bar{G} \times \bar{U}$ существуют числа μ_1, μ_2, $\beta_2 > 0$ и открытая область S_0 поверхности S такие, что $x_0(t) \in S_0$ при $t_0^1 \le t \le t_0^2$, а для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$f_N^-(t, x, u_\varepsilon(t)) \ge \mu_1 > 0, \quad f_N^-(t, x, u_\varepsilon(t)) \le -\mu_2 < 0 \quad (29)$$

при $x \in S_0$ и при всех $t \in [t_\varepsilon^1, t_0^2]$.

Из (27) и (17) следует, что $x_\varepsilon(t_\varepsilon^1) \in S_0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Пользуясь неравенствами (29) и еще раз сходимостью (27), имеем при тех же $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \varepsilon(\bar{t}, v))$, что $x_\varepsilon(t) \in S_0$ при $t_\varepsilon^1 \le t \le t_0^2$, так как в силу леммы 2 траектория $x_\varepsilon(t)$ не может сойти с поверхности S при $t \in [t_\varepsilon^1, t_0^2)$ и, значит, выполняется (28).

Покажем, что траектория $x_\varepsilon(t)$ сойдет с поверх -

ности S в момент времени t_0^2. В силу условий 2), 4) п. 2 и равномерной непрерывности функций f_N^-, f_N^+ по $(t,x,u) \in [0,1] \times \bar{G} \times \bar{U}$ существуют числа ϑ_1, ϑ_2 $\beta_3 > 0$ и открытая область S_1 на поверхности S, содержащая точку $x_0(t_0^2)$, такие, что

$$f_N^-(t,x,u_0(t)) \geq \vartheta_1, \quad f_N^+(t,x,u_0(t)) \geq \vartheta_2 \tag{30}$$

при $x \in S_1$ и при всех $t \in (t_0^2, t_0^2+\beta_3)$. Так как по условию 1) $x_0(1) \in G^+$, выполняется (27) и $x_0(t_0^2) \in S$, то найдется наименьший момент времени $t_\varepsilon^2 > t_0^2$, $x_\varepsilon(t_\varepsilon^2) \in S$, схода с поверхности S. Рассуждая аналогично предыдущему, можно показать, что $t_\varepsilon^2 \to t_0^2$, $\varepsilon \to 0$ откуда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в силу (27) $x_\varepsilon(t_\varepsilon^2) \in S_1$. Заметим теперь, что если траектория $x_\varepsilon(t)$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ не сойдет с поверхности S в момент времени t_0^2, то вследствие (27) $x_\varepsilon(t) \in S_1$ при $t_0^2 \leq t \leq t_0^2 + \vartheta$ ($\vartheta > 0$ – достаточно малое число), а это невозможно ввиду (30) и определения решения в смысле А.Ф.Филиппова. Сверх того, траектория $x_\varepsilon(t)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, сойдя с поверхности S в G^+ в момент t_0^2, уже не сможет вновь попасть на S из G^+, так как в силу (27) она попадает тогда в область S_1 в близкие к t_0^2 моменты времени, что противоречит (30) (см. замечание к лемме 8 в [1]). Первая часть теоремы доказана. Доказательство второй части теоремы проводится аналогично.

4. Первая вариация в разрывной оптимизационной задаче.

Под первой вариацией мы будем понимать, как обычно, выражение

$$\delta I = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta_\varepsilon I}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(u_\varepsilon)-I(u_0)}{\varepsilon}.$$

Для вычисления первой вариации δI получим сначала выражение для приращения $\Delta_\varepsilon I$.

Пусть $\bar t \in (0, t_0^1)$ и $A(\bar t, v) \geq 0$ т.е. $t_\varepsilon^1 < t_0^1$. Тогда по теореме 1 имеем для $\varepsilon < \varepsilon(\bar t, \bar v)$

$$\dot x_\varepsilon(t)-\dot x_0(t) = f(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t)) =$$

$$= \begin{cases} f^-(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - f^-(t, x_0(t), u_0(t)), & 0 \leq t \leq t_\varepsilon^1 \\ f^0(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - f^-(t, x_0(t), u_0(t)), & t_\varepsilon^1 < t \leq t_0^1 \\ f^0(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - f^0(t, x_0(t), u_0(t)), & t_0^1 < t \leq t_0^2 \\ f^+(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - f^+(t, x_0(t), u_0(t)), & t_0^2 < t \leq 1 \end{cases} \quad (31)$$

Предположим далее, что существует номер i, $1 \leq i \leq n$ такой, что $\partial g/\partial x_i \neq 0$ при $x \in S$. Тогда по теореме о неявной функции существует открытая область $S_0 \subset R^{n-1}$ такая, что $(x_{1,0}(t),\dots,x_{i-1,0}(t),x_{i+1,0}(t),\dots,x_{n,0}(t))\in S_0$ при всех $t\in[t_0^1,t_0^2]$ и функция $\bar g: S_0\to R^1$, $\bar g\in C^2$:

$$x_{i,0}(t)=\bar g(x_{1,0}(t),\dots,x_{i-1,0}(t),x_{i+1,0}(t),\dots,x_{n,0}(t)),$$

удовлетворяющая равенству

$$g(x_1,\dots,x_{i-1},\bar g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n),x_{i+1},\dots,x_n)=0$$

при всех $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\in S_0$.

Введем обозначение $\Delta_u f(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t))\equiv$ $\equiv f(t,x_0(t),u_\varepsilon(t))-f(t,x_0(t),u_0(t))$, $\Delta_\varepsilon x(t)\equiv$ $\equiv x_\varepsilon(t)-x_0(t)$, $x^g\equiv(x_1,\dots,x_{i-1},\bar g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n),x_{i+1},\dots,x_n)$.

Применяя к (31) покомпонентно теорему Лагранжа, имеем на соответствующих интервалах следующие равенства:

1) для $0\le t\le t_\varepsilon^1$

$$f^-(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))-f^-(t,x_0(t),u_0(t))= \tag{32}$$

$$=\nabla_x f^-(t,\theta_\varepsilon^1(t),u_\varepsilon(t))(x_\varepsilon(t)-x_0(t))+\Delta_u f^-(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)),$$

где $\theta_\varepsilon^1(t)=x_0(t)+\xi_\varepsilon^1(t)\Delta_\varepsilon x(t)$, $0\le\xi_\varepsilon^1(t)\le 1$.[+)]

+) Здесь и в дальнейшем запись, аналогичная правой части (32), означает, что j -ая строка матрицы $\nabla_x f^-(t,\theta_\varepsilon^1(t),u_\varepsilon(t))$ имеет вид

$$\partial f_j^-(t,\theta_\varepsilon^{1,j}(t),u_\varepsilon(t))/\partial x_k,\quad \theta_\varepsilon^{1,j}(t)\equiv x_0(t)+\xi_\varepsilon^{1,j}(t)\Delta_\varepsilon x(t),$$

$$0\le\xi_\varepsilon^{1,j}(t)\le 1,\quad k=1,n.$$

2) для $t_\varepsilon^1 < t \le t_0^1$

$$f^0(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))-f^-(t,x_0(t),u_0(t))=$$

$$=\nabla_x f^-(t,\theta_\varepsilon^2(t),u_\varepsilon(t))(x_\varepsilon(t)-x_0(t))+$$

$$+\alpha(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))(f^+(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))-f^-(t,x_\varepsilon(t),$$

$$u_\varepsilon(t)))+\Delta_u f^-(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)), \tag{33}$$

где $\theta_\varepsilon^2(t)=x_0(t)+\xi_\varepsilon^2(t)\Delta_\varepsilon x(t)$, $0\le\xi_\varepsilon^2(t)\le 1$;

3) далее, для $t_0^1 < t \le t_0^2$

$$f^0(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))-f^0(t,x_0(t),u_0(t))=$$

$$=f^0(t,x_\varepsilon^g(t),u_\varepsilon(t))-f^0(t,x_0^g(t),u_0(t))=$$

$$=\nabla_x f^0(t,\theta_\varepsilon^g(t),u_\varepsilon(t))(x_\varepsilon(t)-x_0(t))+$$

$$+\Delta_u f^0(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)), \tag{34}$$

где у матрицы $\nabla_x f^0(t,\theta_\varepsilon^g(t),u_\varepsilon(t))$ i - й столбец состоит из нулей, а j - й элемент k -го столбца, $k\ne i$, равен

$$\partial f_j^0(t,\theta_{j,\varepsilon}^g(t),u_\varepsilon(t))/\partial x_k+$$

$$+\left(\partial f_j^0(t,\theta_{j,\varepsilon}^g(t),u_\varepsilon(t))/\partial x_i\right)\frac{\partial\bar g(\theta_{j,\varepsilon}^3(t))}{\partial x_k}, \tag{35}$$

где $\theta^3_{j,\varepsilon}(t) \equiv (x_{1,0}(t)+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_1(t),\dots,x_{i-1,0}(t)+$
$+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_{i-1}(t),\dots,x_{i+1,0}(t)+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_{i+1}(t),$
$\dots,x_{n,0}(t)+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_n(t))$; $\theta^g_{j,\varepsilon}(t)\equiv(x_{1,0}(t)+$
$+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_1(t),\dots,x_{i-1}(t)+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_{i-1}(t),$
$\bar{g}(\theta^3_{j,\varepsilon}(t)),\ x_{i+1,0}(t)+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_{i+1}(t),\dots,x_{n,0}(t)+$
$+\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\Delta_\varepsilon x_n(t)),\qquad 0\le\xi^3_{j,\varepsilon}(t)\le 1.$

4) наконец, для $t^2_0<t\le 1$

$$f^+(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))-f^+(t,x_0,(t),u_0(t))= \tag{36}$$
$$=\nabla_x f^+(t,\theta^4_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))(x_\varepsilon(t)-x_0(t))+\Delta_u f^+(t,x_0(t),u_0(t),$$
$u_\varepsilon(t)$, где $\theta^4_\varepsilon(t)=x_0(t)+\xi^4_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x(t)$, $0\le\xi^4_\varepsilon\le 1$.

Объединяя (32) – (34), (36), получаем

$$\Delta_\varepsilon\dot{x}(t)=\begin{cases}\nabla_x f^-(t,\theta^1_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\Delta_\varepsilon x(t)+\\ +\Delta_u f^-(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t),\ 0\le t\le t^1_\varepsilon,\\ \nabla_x f^-(t,\theta^2_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\Delta_\varepsilon x(t)+\\ +\alpha(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))(f^+(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))-\\ -f^-(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t)))+\Delta_u f^-(t,x_0(t),u_0(t),\\ u_\varepsilon(t)),\quad t^1_\varepsilon<t\le t^1_0,\\ \nabla_x f^0(t,\theta^g_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\Delta_\varepsilon x(t)+\\ +\Delta_u f^0(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)),\ t^1_0<t\le t^2_0,\\ \nabla_x f^+(t,\theta^4_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\Delta_\varepsilon x(t)+\\ +\Delta_u f^+(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)),\ t^2_0<t\le 1.\end{cases} \tag{37}$$

Вычислим теперь приращение $\Delta_\varepsilon I \equiv I(u_\varepsilon) - I(u_0)$ функционала I. Применяя теорему Лагранжа и интегрируя по частям, имеем

$$\Delta_\varepsilon I \equiv h(x_\varepsilon(1)) - h(x_0(1)) + \int_0^1 F(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)dt - \int_0^1 F(t, x_0(t), u_0(t))\,dt = \int_0^1 (\nabla_x h(\theta_\varepsilon), \Delta_\varepsilon \dot{x}(t)dt + \int_0^1 \Big(\int_t^1 \nabla_x F(t, \theta_\varepsilon^5(t), u_\varepsilon(t))\,dt,\ \Delta_\varepsilon \dot{x}(t)\Big)\,dt + \int_0^1 \Delta_u F(t, x_0(t), u_0(t), u_\varepsilon(t))\,dt, \tag{38}$$

где $\theta_\varepsilon = x_0(1) + \xi_\varepsilon \Delta_\varepsilon x(1)$, $\quad 0 \leq \xi_\varepsilon \leq 1$, а вектор $\nabla_x F(t, \theta_\varepsilon^5(t), u_\varepsilon(t))$ на интервале $t_0^1 \leq t \leq t_0^2$ имеет нулевую i-ую компоненту, а остальные компоненты для $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ равны

$$\partial F(t, \theta_\varepsilon^g(t), u_\varepsilon(t))/\partial x_k + \big(\partial F(t, \theta_\varepsilon^g(t), u_\varepsilon(t)/\partial x_i\big) \frac{\partial \bar{g}(\theta_\varepsilon^6(t))}{\partial x_k}, \tag{39}$$

где $\theta_\varepsilon^6(t) \equiv (x_{1,0}(t) + \eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_1(t), \dots, x_{i-1,0}(t) + \eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_{i-1}(t),\ x_{i+1,0}(t) + \eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_{i+1}(t), \dots, x_{n,0}(t) + \eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_n(t))$, $\theta_\varepsilon^g(t) \equiv (x_{1,0}(t) + \eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_1(t), \dots, x_{i-1,0}(t) + \eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_{i-1}(t),$
${}_0\bar{g}(\theta_\varepsilon^6(t)), x_{i+1,0}(t) + \eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_{i+1}(t), \dots,$

$$x_{n,0}(t)+\eta_\varepsilon(t)\Delta_\varepsilon x_n(t)),$$

$$0\le \eta_\varepsilon(t)<1.$$

На интервалах $0\le t\le t_0^1$, $t_0^2\le t\le 1$, $\theta_\varepsilon^5(t)=x_0(t)+$ $+\eta_\varepsilon^1(t)\Delta_\varepsilon x(t)$, $0\le \eta_\varepsilon^1(t)\le 1$.

Применяя лемму 3 к линейной системе (37) и двум первым слагаемым (38), получим следующее представление для $\Delta_\varepsilon I$:

$$\Delta_\varepsilon I=\int_0^{t_0^1}(\psi_\varepsilon(t),\Delta_u f^-(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)))dt+$$
$$+\int_{t_0^2}^1(\psi_\varepsilon^0(t),\Delta_u f^0(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)))dt+$$
$$+\int_{t_0^1}^{t_0^2}(\psi_\varepsilon(t),\Delta_u f^+(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t)))dt+$$
$$+\int_{t_\varepsilon^1}^{t_0^1}(\psi_\varepsilon^0(t),\alpha(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))(f^+(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))-$$
$$-f^-(t,x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t)))+\Delta_u f^-(t,x_0(t),u_0(t),$$
$$u_\varepsilon(t)))dt+\int_0^1\Delta_u F(t,x_0(t),u_0(t),u_\varepsilon(t))dt,\tag{40}$$

где функция $\psi_\varepsilon(t)$, $0\le t\le 1$, есть решение системы

$$\psi_\varepsilon(t)-\int_t^1\nabla_x^* f(t,\theta_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\psi_\varepsilon(t)dt=$$
$$=\int_t^1\nabla_x F(t,\theta_\varepsilon^5(t),u_\varepsilon(t))dt+\nabla_x h(\theta_\varepsilon),\tag{41}$$

в которой $\nabla_x^* f(t,\theta_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\equiv\{\nabla_x^* f^-(t,\theta_\varepsilon^1(t),$

$$u_\varepsilon(t),\ 0\le t\le t_\varepsilon^1;\ \nabla_x^* f^-(t,\theta_\varepsilon^2(t),u_\varepsilon(t)),$$
$$t_\varepsilon^1< t\le t_0^1;\ \nabla_x^* f^0(t,\theta_\varepsilon^3(t),u_\varepsilon(t)),\ t_0^1<t\le t_0^2;$$
$$\nabla_x^* f^+(t,\theta_\varepsilon^4(t),u_\varepsilon(t)),\ t_0^2<t\le 1\}.$$

Пусть $\psi_0(t),\ 0\le t\le 1$ – решение линейной сопряженной системы

$$\psi_0(t)-\int_t^1 \nabla_x^* f(t,x_0(t),u_0(t))\psi_0(t)dt=$$
$$=\int_t^1 \nabla_x F(t,x_0(t),u_0(t))dt+\nabla_x h(x_0(1)), \tag{42}$$

где матрица $\nabla_x^* f(t,x_0(t),u_0(t))\equiv\{\nabla_x^* f^-(t,x_0(t),$

$u_0(t)),\ 0\le t\le t_0^1;\ \nabla_x^* f^0(t,x_0(t),u_0(t)),$

$t_0^1<t\le t_0^2;\quad \nabla_x^* f^+(t,x_0(t),u_0(t)),\ t_0^2<t\le 1\},$

у матрицы $\nabla_x^* f^0(t,x_0(t),u_0(t))$ i-й сталбец состоит из нулей, а j-ый элемент k-го столбца, $k\ne i$, равен

$$\partial f_j^0(t,x_0(t),u_0(t))/\partial x_k+$$
$$+\partial f_j^0(t,x_0(t),u_0(t))/\partial x_i\left(\frac{\partial\bar g(x_{1,0}(t),\dots,x_{i-1,0}(t),x_{i+1,0}(t),\dots,x_{n,0}(t))}{\partial x_k}\right). \tag{43}$$

а вектор $\nabla_x F(t,x_0(t),u_0(t))$ на интервале $t_0^1 \le t \le t_0^2$ имеет нулевую i -ю компоненту, а остальные компоненты для $k = 1,\ldots, i-1,\ i+1,\ldots, n$ равны

$$\partial F(t,x_0(t),u_0(t))/\partial x_k + \tag{44}$$

$$+\partial F(t,x_0(t),u_0(t))/\partial x_i \left(\frac{\partial \bar{g}(x_{1,0}(t),\ldots,x_{i-1,0}(t),x_{i+1,0}(t),\ldots,x_{n,0}(t))}{\partial x_k}\right).$$

В силу (27) и представлений (35), (39), (43), (44) для матриц $\nabla_x^* f(t,\theta_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))$, $\nabla_x^* f(t,x_0(t),u_0(t))$ и векторов $\nabla_x F(t,\theta_\varepsilon^5(t),u_\varepsilon(t))$, $\nabla_x F(t,x_0(t),u_0(t))$ имеем при $\varepsilon \to 0$

$$\| |\nabla_x^* f(t,\theta_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t)) - \nabla_x^* f(t,x_0(t),u_0(t))| \|_{L_{1,1}[0,1]} \to 0,$$

$$\| |\nabla_x^* F(t,\theta_\varepsilon^5(t),u_\varepsilon(t)) - \nabla_x^* F(t,x_0(t),u_0(t))| \|_{L_{1,1}[0,1]} \to 0. \tag{45}$$

Из (41)-(42), (45) очевидно следует, что

$$\| \psi_\varepsilon - \psi_0 \|_{C_n[0,1]} \to 0,\quad \varepsilon \to 0. \tag{46}$$

Так как по предположению $\bar{t} \in (0,t_0^1)$, то в силу (18), (27), (46) с помощью теоремы Лебега получаем следующее выражение для первой вариации δI :

$$\delta I = \left(\psi_0(t), f^-(\bar{t},x_0(\bar{t}),v) - f^-(\bar{t},x_0(\bar{t}),u_0(\bar{t}))\right) +$$

$$+\Big(\psi_0(t_0^1), \Big[\big((f^+(t_0^1,x_0(t_0^1),u_0(t_0^1+0)) - f^-(t_0^1,x_0(t_0^1),$$

$$u_0(t_0^1+0))\big)\alpha(t_0^1,x_0(t_0^1),u_0(t_0^1+0)) + f^-(t_0^1,x_0(t_0^1),$$

$$u_0(t_0^1+0)) - f^-(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1)))A(\bar{t},v)/f_N^-(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1))\Big]\Big) + F(\bar{t}, x_0(\bar{t}), v) - \qquad (47)$$
$$- F(\bar{t}, x_0(\bar{t}), u_0(\bar{t})).$$

Пусть теперь $\bar{t} \in (0, t_0^1)$, $A(\bar{t},v) < 0$, т.е. $t_\varepsilon^1 > t_0^1$. Проводя рассуждения, полностью аналогичные приведенным выше, получаем и в этом случае представление (47) для δI.

Пусть далее $\bar{t} \in (t_0^1, t_0^2)$ или $\bar{t} \in (t_0^2, 1)$. Тогда можно показать, что

$$\delta I = (\psi_0(\bar{t}), f^0(\bar{t}, x_0(\bar{t}), v) - f^0(\bar{t}, x_0(\bar{t}), u_0(\bar{t}))) + $$
$$+ F(\bar{t}, x_0(\bar{t}), v) - F(\bar{t}, x_0(\bar{t}), u_0(\bar{t})) \qquad (48)$$

при $\bar{t} \in (t_0^1, t_0^2)$ и $v \in U$ таких, что $f_N^-(t, x, v) \geq 0$, $f_N^+(\bar{t}, x, v) \leq 0$, когда $x \in S_v$, $x_0(\bar{t}) \in S_v$ (см. п. 3) и

$$\delta I = (\psi_0(\bar{t}), f^+(\bar{t}, x_0(\bar{t}), v) - f^+(\bar{t}, x_0(\bar{t}), u_0(\bar{t}))) + \qquad (49)$$
$$+ F(\bar{t}, x_0(\bar{t}), v) - F(\bar{t}, x_0(\bar{t}), u_0(t))$$

при $\bar{t} \in (t_0^2, 1)$, где функция $\psi_0(t)$ – решение сопряженной системы (42).

5. Необходимые условия оптимальности.

Представления (47)–(49) для первой вариации δI дают возможность установить необходимые условия оптимальности в форме принципа минимума Л.С.Понтрягина в разрывной оптимизационной задаче (1), (2), (4). А именно имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $u_0(t)$ – оптимальное управление в разрывной оптимизационной задаче (1), (2), (4), а $x_0(t)$ – соответствующее ему единственное решение задачи (1), (2). Пусть выполняются условия 1)–4) п. 2 и существует номер i, $1 \le i \le n$, такой, что $\partial g/\partial x_i \neq 0$ при $x \in S$. Тогда

1) при $t \in (0, t_0^1)$ для всех $v \in U$

$$(\psi_0(t), f^-(t, x_0(t), v) - f^-(t, x_0(t), u_0(t))) + (\psi_0(t_0^1), [((f^+(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1+0)) - f^-(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1+0)))\alpha(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1+0)) + f^-(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1+0)) - f^-(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1))) \times A(\bar{t}, v) / f_N^-(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1))]) + F(t, x_0(t), v) - F(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0; \tag{50}$$

2) при $t \in (t_0^1, t_0^2)$ для $v \in U$ таких, что $f_N^-(t, x, v) \geq 0$, $f_N^+(t, x, v) \leq 0$ при $x \in S_v$, где S_v –

открытая область на поверхности S, $x_0(t) \in S_v$

$$(\psi_0(t), f^0(t, x_0(t), v) - f^0(t, x_0(t), u_0(t))) +$$

$$+ F(t, x_0(t), v) - F(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0; \qquad (51)$$

3) при $t \in (t_0^2, 1)$ для всех $v \in U$

$$(\psi_0(t), f^+(t, x_0(t), v) - f^+(t, x_0(t), u_0(t))) +$$

$$+ F(t, x_0(t), v) - F(t, x_0(t), u_0(t)) \geq 0, \qquad (52)$$

где $\psi_0(t)$ - сопряженная функция, удовлетворяющая системе (42), $\overset{0}{A}(t, v)$ определяется равенством (19).

Замечание. Если в теореме 2 положить $\alpha(t_0^1, x_0(t_0^1), u_0(t_0^1 + 0)) = 1$, $t_0^1 = t_0^2$, то сформулированные необходимые условия для случая скользящего режима преобразуются в необходимые условия для случая "протыкания" траекторией системы (1) поверхности разрыва.

6. Примеры.

Пример 1. Пусть управляемая система имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -2\operatorname{sign} x_2 + u(t), \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1,$$
$$U = [-1, 4].$$

Требуется минимизировать функционал

$$I(u) = x_1(1) + (x_2(1) - 1)^2.$$

Непосредственные вычисления дают : $\psi_{0,1}(t)=1,\ 0\le t\le 1$;

$$\psi_{0,2}(t)=\{t_0^1-t+1-t_0^2+2(x_{0,2}(1)-1),\ 0\le t\le t_0^1;\ 1-t_0^2+2(x_{0,2}(1)-1),\ t_0^1<t\le t_0^2;\ 1-t+2(x_{0,2}(1)-1),\ t_0^2<t\le 1\},\ A(t,v)=v-u_0(t),$$

$$f^0(t,x,u)=0,\quad \alpha(t_0^1,x_0(t_0^1),u_0(t_0^1+0))=(2+u_0(t_0^1+0))/4.$$

Неравенства (50), (52) имеют соответственно вид

$$(t_0^1-t-(1-t_0^2+2(x_{0,2}(1)-1)))(v-u_0(t))\ge 0,\ v\in U; \tag{53}$$

$$(1-t+2(x_{0,2}(1)-1))(v-u_0(t))\ge 0,\ v\in U. \tag{54}$$

Очевидный анализ неравенств (53), (54) показывает, что оптимальное управление $u_0(t)$ может иметь лишь следующий вид: $u_0(t)=\{-1,\ 0\le t\le \bar t;\ 4,\ \bar t<t\le t_0^1;\ -1\le$

$$\le u_0(t)\le 2,\ t_0^1<t\le t_0^2;\ -1,\ t_0^2<t<\bar{\bar t};\ 4,\ \bar{\bar t}<t\le 1\},$$

где $\bar t,\bar{\bar t},\ 0\le\bar t\le t_0^1,\ t_0^2\le\bar{\bar t}\le 1$ – точки переключения.

Легко видеть (так как $f_N^+(t_0^2,x_0(t_0^2),-1)<0$), что если $t_0^2<1$, то $\bar{\bar t}=t_0^2$ (в противном случае оптимальная траектория не сойдет с поверхности разрыва в момент

t_0^2 ; см. лемму 2). Поэтому $u_0(t) = \{-1,\ 0 \le t \le \bar{t}\ ;$
$4,\ \bar{t} < t \le t_0^1;\ -1 \le u_0(t) \le 2,\ t_0^1 < t \le t_0^2;\ 4,\ t_0^2 < t \le 1\}$

Отсюда следует, что $t_0^1 = (1 + 5\bar{t})/6$, $I(u_0) =$
$= 5(t_0^2)^2 - 6t_0^2 + 2 + \frac{5}{12}\bar{t}^2 - \frac{10}{12}\bar{t} + \frac{11}{12} \equiv I(\bar{t}, t_0^2).$

При любом (возможном) фиксированном $t_0^2 \le 1$ функция $I(\bar{t}, t_0^2)$ принимает наименьшее значение при $\bar{t} = 1$ и монотонно возрастает при убывании $\bar{t}$. Следовательно, если пара $(\bar{t}, t_0^2)$ минимизирующая, то момент $\bar{t}$ должен быть наибольшим из всех возможных, т.е. из $t_0^2 \ge t_0^1$ следует, что $\bar{t} = (6t_0^2 - 1)/5$. Так как

$$I\left(\frac{6t_0^2 - 1}{5}, t_0^2\right) = \frac{28}{5}(t_0^2)^2 - \frac{36}{5}t_0^2 + \frac{31}{10},$$

то оптимальный момент $t_0^2 = \frac{9}{14}$ откуда $t_0^1 = \frac{9}{14}$, $\bar{t} = \frac{4}{7}$.

Тот же результат получается и в случае, когда анализируются необходимые условия "протыкания" (см. замечание к теореме 2).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 4 + 2\,\mathrm{sign}\, x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 2 - 4\,\mathrm{sign}\, x_2 + u(t),\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = -1,$$
$$U = [-1, 1] \cup [8, 10].$$

Требуется минимизировать функционал

$$I(u)=\int_0^1 (x_2(t))^2\,dt+(x_2(1)-1)^2.$$

Имеем $\psi_{0,1}(t)=0,\ 0\le t\le 1;\ \ \psi_{0,2}(t)=\Big\{2\int_t^{t_0^1} x_{0,2}(t)dt+$ $+2\int_{t_0^2}^{1} x_{0,2}(t)dt+2(x_{0,2}(1)-1),\ 0\le t\le t_0^1;\ 2\int_{t_0^2}^{1} x_{0,2}(t)dt+$ $+2(x_{0,2}(1)-1),\ t_0^1<t\le t_0^2;\ 2\int_t^1 x_{0,2}(t)dt+$ $+2(x_{0,2}(1)-1),\ t_0^2<t\le 1\Big\};\quad A(t,v)=v-u_0(t);$

$f_1^0(t,x,u)=\dfrac{u}{2}+5,\ \ f_2^0(t,x,u)=0,\ \ \alpha(t_0^1,x_0(t_0^1),$ $u_0(t_0^1+0))=(6+u_0(t_0^1+0))/8.$

Неравенства (50), (52) принимают соответственно вид

$$(\psi_{0,2}(t)-\psi_{0,2}(t_0^1))(v-u_0(t)),\ v\in U; \tag{55}$$

$$\psi_{0,2}(t)(v-u_0(t))\ge 0,\ v\in U. \tag{56}$$

Так как $\psi_{0,2}(t)-\psi_{0,2}(t_0^1)=2\int_t^{t_0^1} x_{0,2}(t)\,dt<0$, то в силу (55) $u_0(t)=10$ при $0\le t\le t_0^1$, откуда сразу получаем, что $t_0^1=\frac{1}{16}$. Если $\psi_{0,2}(t_0^1)>0$, то из (56) (так как $\psi_{0,2}(t_0^1)=\psi_{0,2}(t_0^2)$ следует, что траектория $x_0(t)$ не выходит с поверхности разрыва. Поэтому в этом случае

$$I(u_0)=\int_0^{1/16}(16t-1)^2dt+1=\frac{49}{48}$$

Если $\psi_{0,2}(t_0^1) \le 0$, то траектория $x_0(t)$ в момент $t_0^2 \le 1$ может сойти с поверхности разрыва, причем из (56) следует, что $u_0(t) = 10$ при $t_0^2 < t \le 1$ (так как $\psi_{0,2}(t)$ убывает при $t > t_0^2$). Имеем в этом случае

$$I(u_0) = \frac{64}{3}(1-t_0^2)^3 + 64(1-t_0^2)^2 - 16(1-t_0^2) + \frac{49}{48}.$$

Это выражение достигает минимума в точке $t_0^2 = 2-\sqrt{5}/2 \approx$ $\approx 0,8819661$, причем $I(u_0) \approx \frac{49}{48} - 0,992$.

Анализ необходимых условий в случае "протыкания" дает "худший" результат.

Пример 3. Пусть управляемая система будет такая же, как в примере 2, а минимизируемый функционал равен

$$I(u) = \int_0^1 \left(x_1(t) + (x_2(t))^2\right)dt + (x_2(1)-1)^2.$$

Тогда имеем $\psi_{0,1}(t) = 1-t$, $0 \le t \le 1$; $\psi_{0,2}(t) =$

$$= \Big\{ 2\int_t^1 x_{0,2}(t)\,dt + 2\int_{t_0^2}^1 x_{0,2}(t)\,dt + 2(x_{0,2}(1)-1),$$

$$0 \le t \le t_0^1;\ 2\int_{t_0^2}^1 x_{0,2}(t)\,dt + 2(x_{0,2}(1)-1),\ t_0^1 < t \le t_0^2;$$

$$2\int_t^1 x_{0,2}(t)\,dt + 2(x_{0,2}(1)-1),\ t_0^2 < t \le 1 \Big\}.$$

Неравенства (50), (51), (52) переписываются соответственно в виде

$$\left(\psi_{0,2}(t) - \psi_{0,2}(t_0^1) + \frac{1}{2}(1-t_0^1)\,\frac{6+u_0(t_0^1+0)}{6+u_0(t_0^1)}\right)\times$$

$$\times (v - u_0(t)) \ge 0,\quad v \in U, \qquad (57)$$

$$(1-t)(v-u_0(t))\geq 0, \quad v\in[-1,1]; \tag{58}$$

$$\psi_{0,2}(t)(v-u_0(t))\geq 0, \quad v\in U. \tag{59}$$

Анализ неравенств (57), (58), (59) дает, что оптимальное управление $u_0(t)$ может иметь лишь следующий вид:

$u_0(t)=\{10, 0\leq t\leq\bar{t}; -1, \bar{t}<t\leq t_0^1; -1, t_0^1<t\leq t_0^2; 10, t_0^2<t\leq 1\}$,

где $\bar{t}$, $0\leq t\leq t_0^1$ – точка переключения. В силу этого представления для $u_0(t)$ имеем

$$I(u_0)\equiv I_1(t_0^2)+I_2(\bar{t}), \quad t_0^1=\frac{1-11\bar{t}}{5},$$

где

$$I_1(t_0^2)\equiv\frac{64}{3}(1-t_0^2)^3+3(1-t_0^2)^2+(7-8t_0^2)^2-$$
$$-\frac{9}{4}(t_0^2)^2+\frac{9}{2}t_0^2-\frac{1}{48},$$

$$I_2(\bar{t})\equiv-\frac{11}{240}(16\bar{t}-1)^3+\frac{1}{20}(1-11\bar{t})^2-\frac{1}{2}(1-11\bar{t}).$$

Так как $\bar{t}\leq t_0^1\leq t_0^2$, то $0\leq\bar{t}\leq\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}\leq t_0^2\leq 1$. С помощью непосредственных вычислений получаем, что функция $I_1(t_0^2)$ на отрезке $\frac{1}{16}\leq t_0^2\leq 1$ принимает наименьшее значение в точке $t_0^2=(257{,}5+\sqrt{20866{,}25})/128\approx$ $\approx 0{,}883191$, а функция $I_2(\bar{t})$ принимает наименьшее значение на отрезке $0\leq\bar{t}\leq 1/16$ в точке $t=0$. Очевидно, эти значения для t_0^2, $\bar{t}$ и являются оптимальными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – Матем. сб., 1960, т.51(93), №1, с.99.

2. Ащепков Л.Т., Левченко Н.М. Об оптимальности траектории разрывной системы управления на участке скольжения. – Сиб. матем. ж., 1981, т.XXII, №2, с.38.

3. Троицкий В.А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями. – ПММ, 1962, т.XXVI, вып.2, с.233.

4. Величко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. – Автоматика и телемеханика, 1966, №7, с.20.

5. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. О дифференцируемости решения систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями по начальным значениям. – В сб.: Теория оптимальных решений, – Киев: Ин-ут кибернетики АН УССР, 1968, №1, с.25.

6. Ащепков Л.Т., Бадам У. Оптимизация параметров разрывных динамических систем. – Автоматика и телемеханика, 1979, №8, с.13.

7. Ащепков Л.Т., Бадам У. Оптимизация параметров разрывных динамических систем. – В сб.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением, – Новосибирск: Наука, 1979, с.244.

8. Морозов С.Ф., Новоженов М.М., Сумин М.И. Оптимальное управление разрывными динамическими системами. Тезисы докладов на III Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах. – Киев: Ин-ут кибернетики АН УССР, 1979, т.2, с.89.

9. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве

– М.: Наука, 1971.

10. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.

11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.

Дата поступления статьи
10 июня 1981 г.

Станислав Федорович Морозов

Михаил Иосифович Сумин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Подписано в печать 14.07.81 г. МЦ 17259. Формат 60х84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 2,2 усл. печ. л.
Тираж 120. Заказ 2620. Бесплатно.

Горьковский научно-исследовательский радиофизический институт
603600, Горький ГСП-51, ул. Лядова 25/14, т. 38-90-91, д. 5-09

Отпечатано на ротапринте в НИРФИ