Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
научно-исследовательский радиофизический институт (НИРФИ)

Препринт №154

К ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

М.А.Антонец

А.И.Кнафель

А.И.Нотик

В.И.Турчин

Горький 1982

УДК 543.42:51

Рассматривается задача оценки спектральной плотности мощности по конечному числу значений корреляционной последовательности методом максимальной энтропии. Для анализа данного метода предложено использовать математический аппарат теории моментов и теории ортогональных многочленов. Проведен анализ некоторых особенностей метода максимальной энтропии и доказана эффективность его применения для широкого класса задач спектрального анализа.

Построен новый алгоритм восстановления спектра в случае суперпозиции "точечных" источников, для которого метод максимальной энтропии неприменим.

1. Введение

Спектральный анализ является одним из наиболее распространенных методов обработки результатов физического эксперимента. Обычной является следующая задача: найти оценку для спектральной плотности мощности $P(f)$, соответствующей значениям корреляционной функции $\Phi(\tau)$, известной на отрезке $[0, T]$ +). В подавляющем большинстве случаев можно с высокой степенью точности считать $P(f) \equiv 0$ для всех $|f| > \frac{\Delta f}{2}$ (например, исследуется источник излучения с конечными угловыми размерами Δf). При этом непрерывная корреляционная функция $\Phi(\tau)$ может быть заменена на отрезок корреляционного ряда $\Phi(n) = \Phi(n\Delta\tau)$, $n = \overline{0, N}$, $\Delta\tau \leq \frac{1}{\Delta f}$. Этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем; для упрощения последующих выражений заменим аргумент f на $\varphi = 2\pi\Delta\tau f$ и будем рассматривать спектральную плотность мощности $P(\varphi)$, периодически продолженную вне интервала $[-\pi, \pi]$. Таким образом,

---

+) Достаточно указать, например, апертурный синтез в радиоастрономии и Фурье-спектроскопию.

имеем

$$\Phi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi, \quad n=\overline{0,N}. \tag{1.1}$$

Требуется найти оценки для $P(\varphi)$ на основании известного набора значений $\Phi(0), \Phi(1) \dots \Phi(N)$. Обычно практикуемая в экспериментальной физике оценка заключается в том, что вычисляется сумма

$$\tilde{P}(\varphi) = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{N} (2-\delta_{n,0})\Phi(n) g(n) e^{in\varphi} = \tag{1.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi') F(\varphi-\varphi')\, d\varphi',$$

где $g(n)$ – некоторый набор весовых коэффициентов, а

$$F(\varphi) = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{N} g(n)(2-\delta_{n,0}) e^{in\varphi}.$$

В различных физических приложениях $F(\varphi)$ носит название "диаграмма направленности", "аппаратной функции" и пр. и характеризует возможное отклонение оценки $\tilde{P}(\varphi)$ от "истинной" (но неизвестной) спектральной плотности мощности. Одним из недостатков оценки (1.2) является то обстоятельство, что при $g(n) \equiv 1$ $F(\varphi)$ приобретает как положительные, так и отрицательные значения, т.е. $\tilde{P}(\varphi)$ для некоторых φ может быть отрицательным. Это противоречит физической сущности задачи. Положение может быть "исправлено" введением таких весовых коэффициентов $g(n)$, чтобы выполнялось условие $F(\varphi) \geq 0$ для всех φ. Эта операция, однако, ухудшает оценку (1.2), т.к. из-за уменьшения весовых коэффициентов $q(n)$ с ростом n подавляются Фурье-гармоники с большим номером n, несущие информацию о тонких деталях в структуре $P(\varphi)$. Основным недостатком оценки (1.2) можно считать неучет важной априорной информации о том, что спектральная плотность мощности есть по определению функция неотрицательная. Поэтому вместо (1.2) будем рассматривать следующую задачу. Найти такую функцию $\tilde{\tilde{P}}(\varphi)$, которая:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \tilde{\tilde{P}}(\varphi) \geq 0, \\
&2)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\tilde{P}}(\varphi)e^{-in\varphi}\,d\varphi = \Phi(n),\; n = \overline{0,N}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

В такой постановке задача (1.3) аналогична задаче теории моментов [1], где рассматриваются свойства функции $P(\varphi)$ (или, в более общем случае, неубывающих функций $\sigma(\varphi)$, $P(\varphi)\,d\varphi = d\sigma(\varphi)$), удовлетворяющих (1.3).

Как известно [1], задача (1.3) в общем случае имеет бесконечное множество решений. Чтобы обеспечить единственность решения (1.3), на $\tilde{\tilde{P}}(\varphi)$ должно быть наложено дополнительное условие. Такое условие было предложено Бергом: $\tilde{\tilde{P}}(\varphi)$ должно максимизировать функционал энтропии:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \tilde{\tilde{P}}(\varphi)\,d\varphi = \max. \tag{1.4}$$

Данный метод оценки получил в литературе название метода максимальной энтропии или спектрального анализа методом энтропии (САМЭ). С физической точки зрения условие (1.4) может быть интерпретировано как требование определенной гладкости $\tilde{\dot{P}}(\varphi)$ или же как выбор "наиболее случайного" из множества решений задачи (1.3) $^{+)}$; различные варианты таких интерпретаций обсуждаются, например, в [2-4].

В силу сложного нелинейного характера продолжения корреляционной последовательности $^{++)}$ метод максимальной энтропии оказался весьма сложным для дальнейшего анализа. Во всяком случае, подавляющее большинство работ [2-4], ограничивалось лишь обсуждением весьма общих положений и демонстрацией численных примеров, показывающих высокую эффективность САМЭ в смысле разрешения деталей тонкой структуры спектральной плотности мощности. Поэтому представляет большой интерес изучение свойств решения задачи методом максимальной энтропии.

В настоящей работе устанавливается связь метода максимальной энтропии с теорией тригонометрических моментов [1] и теорией многочленов, ортогональных на окружности. Эта связь позволяет практически без изменения привлечь теоремы, в частности, из [1] для выявления ряда интересных свойств решения задачи оценки спектральной плотности мощности методом максимальной энтропии. Кроме того, связь данного метода с теорией моментов позволяет решить зада-

---

$^{+)}$Здесь имеется ввиду связь между задачей оценки спектральной плотности мощности и теорией прогноза [7].

$^{++)}$Вывод явных соотношений для $\tilde{\dot{P}}(\varphi)$ см. в § 1.

чу о нахождении параметров дискретных источников по данному отрезку корреляционного ряда $\Phi(0), \Phi(1) \dots \Phi(N)$; $N \geq K$, где K – число источников.

2. Постановка задачи в методе максимальной энтропии

Пусть мы знаем первые $N+1$ значения тригонометрических моментов Φ_n, $n = \overline{0,N}$, $\Phi_{-n} = \overline{\Phi}_n$:

$$\Phi_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi)e^{-in\varphi}\,d\varphi, \quad n = \overline{0,N}. \qquad (2.1)$$

Задача состоит в том, чтобы на интервале $[-\pi,\pi]$ построить функцию $P_N(\varphi)$, которую назовем спектром максимальной энтропии и которая удовлетворяет условиям (1.3) и (1.4). Из (1.3) и (1.4), используя метод множителей Лагранжа и уравнение Эйлера, получим

$$\frac{1}{P_N(\varphi)} = \sum_{K=-N}^{N} \mu_K\, e^{-i\varphi K}$$

где μ_K – множитель Лагранжа.

Так как $P_N(\varphi) \geq 0$, то по теореме Фейера–Рисса о представлении неотрицательных тригонометрических полиномов

$$\frac{1}{P_N(\varphi)} = \left|\sum_{K=0}^{N} \gamma_K^N e^{i\varphi K}\right|^2 \qquad (2.2)$$

Для нахождения γ_K воспользуемся (1.3), причем в правой части (1.3) перейдем к интегрированию по единичной окружности в комплексной области,

$$\sum_{n=0}^{N} \gamma_n^N \varphi_{m-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{m-1}\,dz}{\sum\limits_{k=0}^{N} \gamma_k^N z^k}, \quad m=\overline{0,N}. \tag{2.3}$$

Предположим, что все корни полинома $\sum\limits_{k=0}^{N} \gamma_k^N z^k$ лежат вне единичного круга (как будет показано в § 2, это всегда имеет место). Тогда подынтегральная функция в силу (2.3) имеет один простой полюс $z=0$ при $m=0$ и, взяв интеграл в правой части (2.3), получим

$$\sum_{k=0}^{N} \gamma_n^N \varphi_{m-n} = \frac{1}{\gamma_0^N}\delta_{m,0}, \quad m=\overline{0,N},$$

$$\delta_{m,k} = \begin{cases} 1, & m=k \\ 0, & m\neq k \end{cases}. \tag{2.4}$$

Запишем выражение спектра $P_N(\varphi)$ и γ_k^N в несколько ином виде:

$$P_N(\varphi) = \frac{\overline{\gamma}_0^N}{\left|\sum\limits_{k=0}^{N} \gamma_k^N e^{i\varphi k}\right|^2}, \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \gamma_k^N \varphi_{n-k} = \delta_{n,0}, \quad n=\overline{0,N}. \tag{2.6}$$

Ниже будет показано, что $\gamma_0^N \geq 0$. Спектр $P_N(\varphi)$, определяемый (2.5) и (2.6), является решением нашей задачи, т.е. удовлетворяет условиям (1.3) и (1.4).

3. Связь спектра максимальной энтропии с ортогональными многочленами

Пусть $\left\{W_n(z)\right\}$ – многочлены, ортогональные относительно веса $P(\varphi)$ на единичной окружности $|z|=1$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W_n(e^{i\varphi})\overline{W_m(e^{i\varphi})}P(\varphi)\,d\varphi=\delta_{m,n}\,, \qquad (3.1)$$

$$W_N(z)=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n^N z^n,\quad z=e^{i\varphi}.$$

Введем многочлен $\Gamma_N(z)$ по формуле

$$\Gamma_N(z)=\frac{1}{\sqrt{\gamma_0^N}}\sum_{k=0}^{N}\gamma_k^N z^k\,, \qquad (3.2)$$

где γ_k^N является решениями уравнения (2.8); отсюда непосредственно следует, что $\Gamma_N(z)\equiv z^N\overline{W_N}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Тем самым $\Gamma_N(z)$ обладает фактически теми же свойствами, что и $\varphi_N(z)$ (см., например, [5]):

а) все корни полинома $\Gamma_N(z)$ лежат вне единичного круга (этим свойством мы воспользовались при выводе (2.4)).

б) в случае непрерывного спектра $P(\varphi)$ и $\int_{-\pi}^{\pi}\log P(\varphi)d\varphi > -\infty$ существует предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|\Gamma_N(z)|^2}=\lim_{N\to\infty}P_N(\varphi)=P(\varphi)\,,$$

причем сходимость равномерная по $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Таким образом, $P_N(\varphi)$ является некоторым приближением $P(\varphi)$. Скорость сходимости можно оценить, накладывая различные условия на гладкость $P(\varphi)$; соответствующие теоремы см. [5]. Следующие два свойства нам понадобятся в дальнейшем:

в) $$\frac{\Delta_N}{\Delta_{N-1}} \geqslant \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N}, \quad \Delta_N = \det(\varphi_{k-n}), \tag{3.3}$$

г) в случае $\int_{-\pi}^{\pi} \log P(\varphi)\, d\varphi > -\infty$ существует предельное соотношение

$$r = \lim_{N\to\infty} \gamma_0^N = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln P(\varphi)\, d\varphi\right). \tag{3.4}$$

4. Связь с теорией позитивных последовательностей

Как известно, комплексная последовательность $\{\varphi_k\}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, $\varphi_{-k} = \overline{\varphi_k}$ образует позитивную последовательность, если $\sum_{m,n=0}^{N} \varphi_{m-n}\, \xi_m \overline{\xi}_n > 0$ при любом N и при любом выборе чисел ξ_n (не равных одновременно 0). Спектр этой последовательности $P(\varphi) > 0$, а необходимым и достаточным условием позитивности последовательности является положительность определителей Δ_k, при $k = 0, 1, \ldots$, где $\Delta_k = \det \varphi_{j-k}$. Так как $\gamma_0^N = \frac{\Delta_N}{\Delta_{N-1}}$, то $\gamma_0^N > 0$ (чем мы воспользовались при выводе (2.4) и (2.5)). Пусть мы хотим продолжить последовательность $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_N$.

еще на один член φ_{N+1}, сохраняя свойство положительной определенности удлиненной последовательности. Можно показать [1], что областью, в которой должно лежать значение φ_{N+1}, является круг C_{N+1} в комплексной плоскости с центром в точке $\tilde{\varphi}_{N+1}$ и радиусом r_{N+1}:

$$\tilde{\varphi}_{N+1} = \frac{(-1)^{N+1}}{\Delta_{N+1}} \begin{vmatrix} \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \dots & \varphi_{-N} & 0 \\ \varphi_{0} & \varphi_{-1} & \dots & \varphi_{-N+1} & \varphi_{-N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{N-1} & \varphi_{N-2} & & \varphi_{0} & \varphi_{-1} \end{vmatrix}, \qquad (4.1)$$

$$r_{N+1} = \frac{\Delta_N}{\Delta_{N-1}}. \qquad (4.2)$$

При этом значению $\varphi_{N+1} = \tilde{\varphi}_{N+1}$ соответствует максимальное значение Δ_{N+1}, а для значений φ_{N+1}, лежащих на окружности круга C_{N+1}, $\Delta_{N+1} = 0$. Таким образом, если мы хотим продолжить позитивную последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_N$ еще на один шаг, то следующее значение мы должны брать внутри круга C_{N+1}. Оказывается [6], что спектру максимальной энтропии $P_N(\varphi)$ соответствует продолжение по центру кругов C_K, $K \geq N+1$. Как известно (3.3), (3.4) $r_{N+1} \leq r$ и $\lim\limits_{N\to\infty} r_N = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln P(\varphi)\, d\varphi\right)$. Интересен случай вырождения, т.е. случай, когда $\Delta_N = 0$, $\Delta_{N-1} > 0$ (это соответствует значению φ_N, лежащему на границе круга, существования). При этом система (2.6) становится несовместной, т.е. в этом случае не существует спектра максимальной энтропии. В этом случае [1] дальнейшее продолжение ненегативной последовательности определено однозначно:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{-in\varphi_k}, \quad n = N+1, N+2\ldots, \tag{4.3}$$

$\rho_k > 0$, φ_k – действительны и $\varphi_k \neq \varphi_m$, $m \neq k$, $k,m = \overline{1,N}$.

Здесь $e^{i\varphi_k}$ находятся как корни полинома:

$$U_N(z) = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \ldots & \varphi_{-N} \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \ldots & \varphi_{-N+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{N-1} & \varphi_{N-2} & \ldots & \varphi_{-1} \\ 1 & z & & z^N \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

Все корни (4.4) в случае $\Delta_N = 0$ и $\Delta_{N-1} > 0$ лежат на окружности $|z| = 1$ и все различны.

ρ_k определяется из системы уравнений

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{-in\varphi_k}, \quad n = 0,1\ldots N-1. \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что спектр, отвечающий такой последовательности, будет состоять из N спектральных линий с координатами φ_k и амплитудами ρ_k.

5. Вид продолжения корреляционной последовательности, отвечающей спектру максимальной энтропии

Пусть

$$\xi_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_N(\varphi) e^{-in\varphi}\, d\varphi,\; n=0,\pm 1,\ldots,\; \xi_{-n}=\overline{\xi_n}.$$

Тогда $\xi_n = \varphi_n$, $\quad n=\overline{0,N}$.

Найдем аналитическое выражение для ξ_n, $n = N+1, N+2, \ldots$:

$$\xi_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\varphi}}{|\Gamma_N(\varphi)|^2}\, d\varphi \qquad (5.1)$$

Пусть $z_1 \ldots z_N$ корни многочлена $\Gamma_N(z)$, напомним, что $|z_K| > 1$ и $z_j \neq z_K$, $j,K = \overline{1,N}$, тогда

$$\Gamma_N(z) = \frac{\gamma_N^N}{\sqrt{\gamma_0^N}} \prod_{i=1}^{N} (z - z_i). \qquad (5.2)$$

Интеграл в правой части (5.1) можно вычислить методом теории вычетов, переходя к интегрированию по единичной окружности $|z| = 1$ в комплексной плоскости, и, используя (5.1) и (5.2), получим

$$\xi_n = \sum_{K=1}^{N} \frac{C_K}{z_K^n}, \qquad (5.3)$$

$$C_K = \frac{1}{\overline{\gamma_N^N} \prod\limits_{i=1}^{N} \left(\overline{z}_i - \frac{1}{z_K}\right) \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq K}}^{N} \left(1 - \frac{z_K}{z_i}\right)}. \qquad (5.4)$$

То есть спектру максимальной энтропии отвечает экспоненциально убывающая по модулю последовательность коэффициентов Фурье.

6. Задача определения координат и мощностей точечных источников

Пусть мы знаем $(N+1)$ значение корреляционной последовательности Φ_n, $n = \overline{0,N}$, а искомый спектр $P(\varphi)$ представляет из себя K ($K \leq N$) источников на пьедестале:

$$P(\varphi) = A + \sum_{m=1}^{K} \rho_m \delta(\varphi - \varphi_m), \qquad (6.1)$$

где A, K, ρ_m, φ_m $m = \overline{1,K}$ – требуется определить. Найдем минимальное собственное число λ и его кратность α матрицы Φ^N:

$$\Phi^N = \left\{ \Phi_{n,m} \right\} = \Phi_{n-m} .$$

Можно доказать, что

$$K = N - \alpha + 1 ,$$

$$A = \lambda .$$

Рассмотрим теперь укороченную последовательность Φ_n, $n = \overline{0,K}$ и построим следующую матрицу $\tilde{\Phi}^K$:

$$\tilde{\Phi}^K = \Phi^K - \lambda E ,$$

где E – единичная матрица. Матрица $\tilde{\Phi}^K$ будет неотрицательно определена (т.к. все собственные числа неотрицательны) и $\det \tilde{\Phi}^K = 0$, $\det \tilde{\Phi}^{K-1} > 0$.

Соответствующая корреляционная последовательность будет иметь следующий вид:

$$\tilde{\Phi}_n = \sum_{m=1}^{K} \rho_m e^{-in\varphi_m} .$$

Тогда ρ_m и φ_m можно найти из (4.3) и (4.4).

7. Заключение

В данной работе установлена связь решения задачи оценки плотности спектральной мощности $P(\varphi)$ методом максимальной энтропии с теорией ортогональных многочленов и теорией позитивных последовательностей, что позволяет выявить ряд интересных свойств решения:

– равномерную сходимость оценок к "истинному" спектру;

– решение задачи в случае вырожденности последовательности $\Phi_0, \Phi_1 \ldots \Phi_N$;

– экспоненциальное убывание коэффициентов Фурье, соответствующих спектру максимальной энтропии.

Предложен также новый метод восстановления спектра в случае точечных источников.

Литература

1. Ахиезер Н.И., Крейн М.Г. О некоторых вопросах теории моментов, ДНТВУ, 1938.
2. Gull S.F.,Daniell G.J.The maximum entropy method.ImageForm from Coherence Funct in Astron.-Proc.IAU Colloq.N49,Greningen,1978.
3. Ables J.G. Maximum entropy spectral analysis.-Astron.and Astrophys.Suppl.1974,v.15, p.383-393.
4. Barrodale,Erickson R.E.Algoriths for least-squares analysis.Part 1:Theory.-Geophysics, 1980,v.45,N3,p.420-432.
5. Геронимус Я.Л. Многочлены ортогональные на окружности и отрезке. - М.: Гос. изд. физ. мат. литер. 1958.
6. Komessaroff M.M.,Lerche I. Image Form from Coherence Funct in Astronom.-Proc.IAU Coll. N49,Greningen,1978.
7. Гейбриел У.Ф. Спектральный анализ и методы сверхразрешения с использованием адаптивных решеток. - ТИИЭР, 1980, т.68, №6.

С о д е р ж а н и е

Дата поступления статьи

30 апреля 1982 г.

Михаил Александрович АНТОНЕЦ

Александр Ильич КНАФЕЛЬ

Александр Израилевич НОТИК

Виктор Игоревич ТУРЧИН

К ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Подписано в печать 22.06.82 г., МЦ 17789. Формат 60 x 84/16. Бумага множительная. Печать офсетная. Объем 1 усл. печ. л. Тираж 120. Заказ 2803. Бесплатно.

Горьковский научно-исследовательский радиофизический институт, 603600. Горький, ГСП-51, ул. Лядова 25/14, т. 38-90-91, д. 5-09.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ